



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS TERESINA CENTRAL
DIRETORIA DE ENSINO
DEPARTAMENTO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

TIAGO GOMES SOUSA DA SILVA

**A UTILIZAÇÃO DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI PARA A CRIAÇÃO DE
AMBIENTES DE APRENDIZAGEM**

Teresina - Piauí
2020

TIAGO GOMES SOUSA DA SILVA

A UTILIZAÇÃO DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI PARA A CRIAÇÃO DE AMBIENTES DE APRENDIZAGEM

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito para obtenção do título de graduação do curso Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí.

Teresina, 15 de janeiro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. ValessaZaigla Faustino Sousa Carvalho – IFPI
Orientadora e Presidente da Banca

Prof. Me. Antonio Evangelista Ferreira Filho – IFPI
Membro avaliador

Prof. Me. Jeane Gardênia Costa do Nascimento – IFPI
Membro avaliador

A UTILIZAÇÃO DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI PARA A CRIAÇÃO DE AMBIENTES DE APRENDIZAGEM

Tiago Gomes Sousa da Silva¹

ValessaZaigla Faustino Sousa Carvalho²

RESUMO

A dificuldade dos alunos do 3º ano do ensino médio da Escola João Clímaco D'Almeida em visualizar a aplicação das fórmulas do cálculo de geometria espacial, com ênfase no volume de sólidos geométricos tais como o prisma e o cilindro, motivou o presente trabalho, que consiste em utilizar o material concreto como instrumento facilitador no aprendizado de geometria, em particular o Princípio de Cavalieri. Assim, formulou-se o seguinte problema: o uso do material concreto podem realmente ser inserido em sala de aula com o intuito de facilitar o saber escolar e criar ambientes de aprendizagem? Para uma melhor compreensão do estudo, essa pesquisa qualitativa de natureza explicativa foi fundamentada em alguns autores, em especial Skovsmoze (2000). Para a construção dos ambientes de aprendizagem utilizou-se a modelagem matemática, por meio de um material concreto feito em madeira cuja a construção obedeceu as definições do princípio de Cavalieri. O desafio foi calcular volumes de cilindros e paralelepípedos retângulo usando réguas, a definição de volume e o postulado. Com a manipulação do material concreto utilizando o princípio de Cavalieri constatou-se que os alunos tiveram um resultado positivo e conseguiram construir uma ponte acessível entre o conhecimento teórico (abstrato) e o concreto.

Palavras-chave: Material concreto. Ambientes de aprendizagem. Princípio de Cavalieri.

¹ Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI, Campus Teresina Central. E-mail: tiagomat07@gmail.com

² Professora Orientadora. Professora de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI, Campus Teresina Central. Especialista em Matemática (UFPI). Mestre em Matemática pela UFPI. E-mail: valessa.zaigla@ifpi.edu.br

THE USE OF THE CAVALIERI PRINCIPLE FOR THE CREATION OF LEARNING ENVIRONMENTS

Tiago Gomes Sousa da Silva

Valessa Zaigla Faustino Sousa Carvalho

ABSTRACT

The difficulty of the students of the 3rd year of high school of the João Clímaco D'Almeida School in visualizing the application of the formulas of the calculation of spatial geometry, with emphasis on the volume of geometric solids such as prism and cylinder, motivated the present work, which consists of using concrete material as a facilitating instrument in the learning of geometry, in particular the Cavalieri Principle. Thus, the following problem was formulated: can the use of concrete material actually be inserted into the classroom in order to facilitate school knowledge and create learning environments? For a better understanding of the study, this qualitative research of an explanatory nature was based on some authors, especially Skovsmoze (2000). For the construction (development) of learning environments, mathematical modeling was used, through a concrete material made of wood whose construction (creation) obeyed (followed) the definition of the Cavalieri principle. The challenge was to calculate cylinder volumes and straight corner rectangle cobblestones using rulers, volume definition and postulate. With the manipulation of concrete material using the Cavalieri principle, it was found that the students had a positive result and were able to build an accessible bridge between theoretical (abstract) knowledge and concrete.

Keywords: Concrete material. Learning environments. Cavalieri principle.

1 INTRODUÇÃO

Nas suas observações de salas de aula inglesas, Cotton (1998) notou que a aula de matemática é dividida em duas partes: na primeira parte, o professor apresenta algumas definições e fórmulas matemáticas e, depois, os alunos trabalham com exercícios selecionados. Ele também observou que existem variações nesse mesmo padrão: há desde o tipo de aula em que o professor ocupa a maior parte do tempo com exposição até aquela em que o aluno fica a maior parte do tempo envolvido com resolução de exercícios. De acordo com essas e muitas outras observações, a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício.

Skovsmoze (2000) faz menção e difere três tipos de referência que um exercício ou atividade poderiam ter: atividade matemática que tem por início, meio e fim - matemática pura; atividade baseada numa realidade construída - semirrealidade; atividade baseada em situações da vida real - realidade. Levando em consideração essas três referências (matemática pura, semirrealidade e realidade), o teórico obteve seis tipos diferentes de ambientes de aprendizagem.

O ambiente de aprendizagem tipo(1) é aquele dominado por exercícios apresentados no contexto da matemática pura, o tipo (2) é caracterizado como um ambiente que envolve números e figuras geométricas, o ambiente tipo (3) é constituído por exercícios com referências a semirrealidade. O ambiente de aprendizagem tipo (4) também contém referências a uma semirrealidade, mas agora ela não é usada como um recurso para a produção de exercícios: é um convite para que os alunos façam explorações e explicações. Exercícios baseados na vida real oferecem um ambiente de aprendizagem do tipo (5)

.No ambiente de aprendizagem (6), as referências são reais, tornando possível aos alunos produzirem diferentes significados para as atividades (e não somente os conceitos). No ambiente (6) o pressuposto de que há uma, e somente uma, resposta correta não mais faz sentido. Livros didáticos podem descansar seguramente no canto da sala de aula à medida que um projeto desse tipo é desenvolvido. O professor tem o papel de orientar.

Geralmente, o livro didático representa as condições tradicionais da prática de sala de aula e os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula. Isso significa que a justificção da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si mesma. Além disso, a premissa central do paradigma do exercício é que existe uma, e somente uma resposta correta.

O paradigma do exercício pode ser contraposto a uma abordagem de investigação, que pode tomar muitas formas, como o trabalho de projeto nas escolas de ensino fundamental e médio. Correa (2012, p.68) afirma que o Ensino Médio desafia todos os professores a buscarem aportes teóricos para compreenderem suas práticas profissionais.

Na perspectiva de Skovsmo (2000), a educação matemática adequada encontra-se entre os diferentes ambientes, englobando paradigmas dos exercícios e cenários de investigação de maneira que os ambientes de aprendizagem sejam abordados pelos professores e alunos conforme o desenvolvimento dos alunos perante os conteúdos ensinados.

Partindo da perspectiva de facilitar a aprendizagem e trabalhar junto com o aluno na construção do conhecimento o princípio de Cavalieri proporcionou um cenário de investigação.

No Ensino Médio são apresentadas aos alunos as fórmulas para o cálculo de volumes de alguns sólidos. Os livros didáticos, no geral, apresentam as fórmulas em textos explicativos, fazendo com que o aluno não participe de forma ativa, na construção desse conhecimento, em seguida, apresentam listas de exercícios para que apliquem as fórmulas ali demonstradas.

Com o objetivo de melhorar essa realidade e despertar o interesse dos alunos do 3º ano do ensino médio da escola João Clímaco D'Almeida, procurou-se realizar esse trabalho e decidimos trabalhar o Princípio de Cavalieri, haja vista que ele é intuitivo ao ser trabalhado como postulado, além de reduzir os argumentos necessários para a dedução do cálculo do volume de alguns sólidos, pode ser usado para criar um ambiente de investigação fazendo do aluno um pesquisador, participando diretamente da construção do conhecimento a ser apreendido. Muitos vão se deparar com situações em que há a necessidade de obter o volume de algum sólido, assim como existem

profissionais que precisam desse conhecimento para desenvolver suas tarefas, como nos afirma Lima (2003):

Por exemplo, o mestre de obras precisa saber o volume de concreto que será utilizado na construção das colunas, vigas e lajes de um edifício. A forma e as dimensões de cada um destes objetos estão na planta e o cálculo do volume deverá ser feito antes que o edifício exista. Alguns objetos são pequenos demais, ou grandes demais, ou são inacessíveis, ou simplesmente não existem concretamente. Sentimos então a necessidade de obter métodos para o cálculo de volumes, pelo menos de objetos simples, conhecendo sua forma e suas dimensões. (Lima et. Al., 2003).

Sob a definição intuitiva do princípio de Cavalieri construímos o processo para o cálculo do volume de cilindros e paralelepípedo reto-retângulo, tomados pela medição das dimensões e o cálculo de áreas, para tanto vamos conhecer o princípio e seu precursor. Como observa os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs(2002):

Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.(BRASIL, 2002, p.123).

Sob essa perspectiva, analisaremos os impactos da utilização do Princípio de Cavalieri e o uso de modelos matemáticos e moldes(material concreto) para a iniciativa de uma abordagem mais significativa e envolvente, tanto para alunos como para professores.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS: BONAVENTURA CAVALIERI E O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES.

Bonaventura Cavalieri nasceu no ano de 1598 em Milão, tornou-se jesuado e não jesuíta como muitos livros didáticos afirmam. Em 1616, viajou para Pisa, onde estudou Teologia e Filosofia. Conheceu o padre Benedito Castelli (1577 -1644) que o apresentou a Galileu (1564-1642), do qual veio a tornar-se discípulo, no ano de 1629 foi

indicado à cadeira de professor em Bolonha. Ocupou esse cargo até o ano de sua morte em 1647.

Segundo Boyer (2012), Cavalieri foi um grande intelectual da matemática, publicando vasto material tanto sobre matemática pura quanto aplicada, dentre as quais podemos citar: trigonometria, geometria, astronomia e óptica. Foi considerado o percussor dos logaritmos na Europa sendo o primeiro autor italiano a apreciar o valor dos logaritmos.

Figura 1: Bonaventura Cavalieri (1598-1647)



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Bonaventura_Cavalieri

Em seu *Directorium universal euranometricum*, de 1632, ele publicou tabelas de senos, tangentes, secantes e senos versos, junto com seus logaritmos, com oito casas; mas a obra que mais o projetou, sendo sua grande contribuição à matemática foi o tratado denominado *Geometria indivisibilibus*, publicado em 1635, na qual apresenta o método dos indivisíveis, que criou um método capaz de determinar áreas e volumes de sólidos com muita facilidade, denominado princípio de Cavalieri. Este princípio consiste em estabelecer que dois sólidos com a mesma altura têm volumes iguais se as secções planas de iguais altura possuírem a mesma área.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Frequentemente, os alunos e professores não contextualizam as fórmulas e os algoritmos apresentados, nem mesmo os livros didáticos nos trazem tal opção, o que os levam a terem um desempenho insatisfatório quando submetidos à resolução de

problemas ou diante de alguma avaliação. O ensino “transmissivo” dominou a sala de aula durante séculos, porém essa concepção tem sido transformada pela evolução das teorias cognitivas e o surgimento de novas metodologias de ensino que potencializam a contextualização do saber, a compreensão de regras e a articulação de representações matemáticas. O movimento da Educação Matemática é conduzido por pesquisadores e especialistas da área da Educação e da Matemática, que acreditam na importância de considerar a realidade do aluno, possibilitando-o compreender e construir seu conhecimento matemático (Texto extraído do Boletim da SBEM-SP, n. 7, de julho-agosto de 1990).

Mesmo assim, a matemática tem sido abordada de forma abstrata, com poucas demonstrações concretas e problematização dos conceitos com a realidade, fato esse que dificulta o entendimento dos discentes e como consequência muitos não sabem usar o conhecimento adquirido por não participarem da construção do mesmo.

E é nesse contexto, que os materiais concretos se configuram em uma possibilidade de recurso para ser inserido no currículo, criando o elo entre teoria e prática diminuindo as rupturas da articulação do cotidiano para o saber escolar. De acordo com PAIS (2006):

Estudos mostram que o material concreto tem possibilitado que os estudantes estabeleçam relações entre as situações experienciadas na manipulação de tais materiais e a abstração dos conceitos estudados. O uso de material concreto propicia aulas mais dinâmicas e amplia o pensamento abstrato por um processo de retificações sucessivas que possibilita a construção de diferentes níveis de elaboração do conceito.

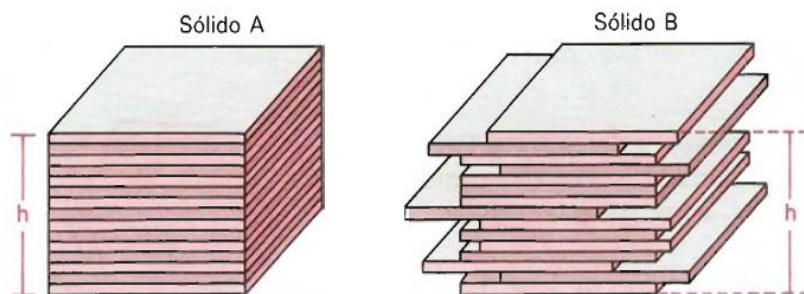
É fundamental, que o professor desenvolva uma proposta pedagógica que integre o material concreto definindo antecipadamente os objetivos a serem cumpridos e metas a alcançar, estabelecendo vínculos com o contexto social dos alunos. Trata-se de criar condições de aprendizagem que permitam a inserção dos conceitos em situações nas quais os alunos tenham maiores condições de compreender o sentido do saber.

4 O PRINCÍPIO OU POSTULADO DE CAVALIERI

Como introdução intuitiva, suponhamos a existência de uma coleção finita de

chapas retangulares (paralelepípedos retângulos) de mesmas dimensões e, conseqüentemente, de mesmo volume. Imaginemos ainda a formação de dois sólidos com essa coleção de chapas, como indica a figura 2 abaixo.

Figura 2: Pilhas de livros ou de folhas

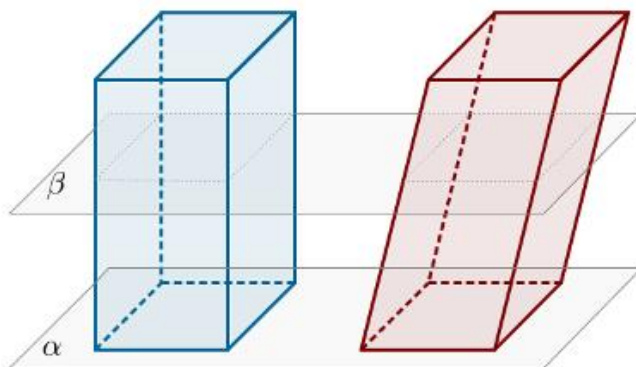


Fonte: DOLCE, Osvaldo. Fundamentos da Matemática elementar, 10: geometria espacial. 6. Ed. São Paulo: Atual, 2005.

A parte de espaço ocupada (o “volume ocupado”) pela coleção de chapas é o mesmo, isto é os sólidos A e B têm o mesmo volume.

O Princípio de Cavalieri é tido como postulado, é utilizado para estabelecer fórmulas para o cálculo de volume de sólidos geométricos. Com o uso do postulado é possível determinar o volume de qualquer prisma utilizando o volume de um paralelepípedo reto retângulo(prisma reto) conhecido, desde que o segundo possua a mesma altura que o primeiro e que os dois possuam áreas da base congruentes, como mostra a figura 2. O princípio parte da seguinte premissa: mesmo que o formato de um sólido geométrico seja modificado, com exceção dos casos em que o sólido perde ou ganha massa, seu volume permanecerá o mesmo. Esse é o embasamento que fundamenta o princípio, que será definido adiante. Cavalieri observou que, deformando um dos dois prismas sem modificar o formato de suas bases ou sua altura, eles permanecem com volumes iguais.

Figura 3: Paralelepípedo reto x paralelepípedo oblíquo



Fonte: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm>

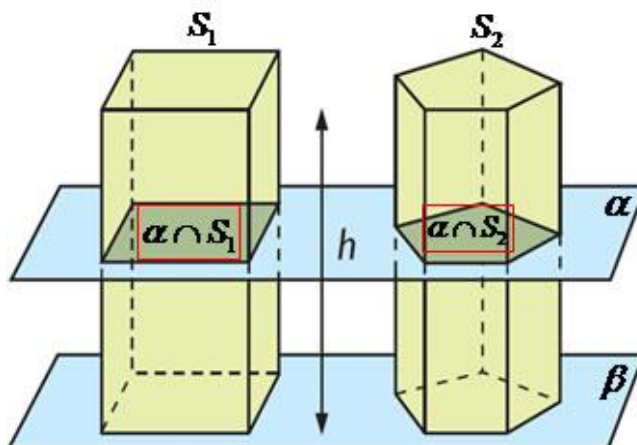
Daí segue que o volume de um prisma (reto ou oblíquo) é o produto da área da base (A_b) pela altura (h):

$$V = A_b \cdot h$$

Dados dois sólidos geométricos A e B de mesma altura e áreas das bases, que, por sua vez, estão contidas no mesmo plano α . Os sólidos A e B têm o mesmo volume se qualquer plano β , paralelo a α , determinar duas secções transversais com áreas iguais. Dessa maneira, o princípio de Cavalieri pode ser usado também para sólidos completamente diferentes, mas que possuem mesma altura, bases com áreas iguais e que qualquer corte realizado nos dois por um mesmo plano resulte em figuras com áreas iguais.

Consideremos dois planos horizontais α e β paralelos, sendo que α seccionará dois sólidos S_1 e S_2 . O plano α determinará nos sólidos duas seções planas indicadas por $\alpha \cap S_1$ e $\alpha \cap S_2$.

Figura 4: Paralelepípedo reto x prisma pentagonal



<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm>

Se para qualquer plano horizontal α , ocorrer que a área de $\alpha \cap S_1$ é igual a área de $\alpha \cap S_2$, os volumes dos sólidos S_1 e S_2 serão iguais, constituindo o princípio de Cavalieri.

Segue, portanto, o princípio ou postulado de Cavalieri (Francesco Bonaventura Cavalieri, 1598-1647):

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).

O princípio de Cavalieri deve ser abordado de forma intuitiva, pois com isso possibilita a facilitação de conteúdos intitulados complexos, como cita BOYER:

O princípio de Cavalieri representa ferramenta poderosa para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno. Com a aceitação desse princípio como evidentes, intuitivamente, podem-se resolver muitos problemas de mensuração que normalmente requereriam técnicas avançadas de cálculo (BOYER, 2012, p. 426).

5 METODOLOGIA

Como aluno do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), o desenvolvimento de projetos com o objetivo de intensificar a educação matemática, era a realidade do dia a dia, assim na escola campo, João Clímaco D'Almeida, surgiu a demanda em geometria espacial, aonde os alunos não conseguiam visualizar as fórmulas dos volumes dos sólidos geométricos espaciais, portanto havia a necessidade de uma abordagem diferenciada, foi quando a utilização do princípio de Cavalieri para a criação de ambientes de aprendizagem surgiu, partindo daí iniciou-se os trabalhos.

Utilizando o material concreto presente no laboratório de matemática do Instituto Federal do Piauí, campus Teresina central, que é composto por duas tábuas planas que representam os planos α e β e quatro sólidos geométricos iguais dois a dois para a comparação das alturas e bases com o objetivo de aplicar o princípio de Cavalieri.

Figura 5: Material concreto: Princípio de Cavalieri



Fonte: Primeiro autor

O material do laboratório foi levado para a escola João Clímaco D'Almeida, para a atividade que aconteceu em sala de aula, iniciou-se apresentando para a turma do 3º ano do ensino médio, o material concreto e sob qual postulado ele havia sido criado, com isso os vinte e cinco alunos que participaram do experimento, dos quais dez meninos e quinze meninas, foram divididos em grupos de cinco, fazendo a divisão foi explicado que no primeiro momento, eles teriam trinta minutos para calcular o volume de dois sólidos geométricos. Foi posto o material concreto do laboratório em cima de uma mesa, apenas um foi usado para todos, e depois cada grupo escolheu um líder que os representassem, o líder através de uma régua obteve as medidas (altura, raio, comprimento, largura) dos sólidos (cilindro reto, e prisma retangular) para calcular a área do polígono (retângulo e um círculo) formado pela secção e o volume dos sólidos entre

as secções. O grupo tendo as medidas obtidas pelo líder e a dedução da formula área da base vezes altura, calcularam o volume dos sólidos com uma precisão muito similar entre os grupos.

Em um segundo momento, os sólidos seccionados do material concreto foram deformados, sem que houvesse alteração de massa, e um desafio foi lançado, calcular o volume dos sólidos deformados os alunos mostraram-se desafiados, e começaram suas tentativas para calcular o volume dos sólidos deformados, sem obter sucesso com seus métodos, 'partimos para a utilização do principio de cavalieri, com isso cada grupo ficou com um prisma reto de base quadrangular e um prisma formado por secções planas empilhadas e não alinhadas, gerando um prisma deformado e desconhecido aos olhos dos discentes e também com um cilindro regular e um cilindro formado por secções planas empilhadas, mas não alinhadas criando um formato desconhecido aos alunos.

Os sólidos tinham mesma altura e mesma área da base, porem eles encontraram volumes diferentes, mas muito aproximados um do outro, com esse resultado definimos o princípio e mostramos na prática através do material concreto a aplicação do princípio de Cavalieri de forma intuitiva para calcular através de um sólido conhecido o volume de qualquer sólido desconhecido que possua mesma área da base e mesma altura.

Os alunos utilizando o princípio de Cavalieri calcularam os respectivos volumes dos sólidos que compõem o material supracitado, e com isso criamos uma ponte entre o teórico e o concreto. Calculamos o volume do prisma retangular e do cilindro reto, utilizando o princípio de Cavalieri e o material concreto do laboratório.

6 RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados dos cálculos atingiram uma precisão bem aproximada entre os alunos, mostrando que apenas por causa de aproximações os resultados foram distintos. Sabendo que o volume dos dois sólidos era de $2260,8 \text{ cm}^3$.

Grupos	Volume do Cilindro	Volume Prisma
1	2257,2 cm ³	2257 cm ³
2	2259,6 cm ³	2258,6 cm ³
3	2260,1 cm ³	2259,3 cm ³
4	2258,3 cm ³	2257,8 cm ³
5	2258,7 cm ³	2259,5 cm ³

Fonte: Primeiro autor

No segundo momento da atividade a precisão dos cálculos foi ainda maior, embora os sólidos estivessem deformados, mas com a aplicação do princípio foi possível perceber que se não houver percas e apenas a deformação o sólido permanece com o mesmo volume, portanto de forma mais precisa os resultados se mostraram da seguinte maneira:

Quadro dois: resultados obtidos

Grupos	Volume do Cilindro	Volume Prisma
1	2260 cm ³	2260,5 cm ³
2	2260,2 cm ³	2260,3 cm ³
3	2260,5 cm ³	2260,5 cm ³
4	2260,8 cm ³	2260,4 cm ³
5	2260,4 cm ³	2260,8 cm ³

Fonte: Primeiro autor

A análise dos resultados obtidos mostra que a aplicação desse experimento é de caráter qualitativo, pois a modificação na abordagem do modelo matemático promoveu um ambiente dinâmico de investigação, possibilitando a existência de ambientes de aprendizagem que traduzem mais a realidade e menos a abstração.

Contudo os resultados obtidos pela prática dos alunos foi positiva no que diz

respeito a aprendizagem, ao nível de comprometimento dos alunos e a aproximação dos alunos com o conteúdo ensinado e demonstrado. Uma análise mais criteriosa mostraria os impactos de forma quantificada, sendo estes bem próximos uns dos outros, pois de forma unânime os resultados dos volumes foram bem aproximados, mostrando o impacto positivo na aprendizagem.

7CONCLUSÃO

Concluimos que o uso de materiais concretos é uma estratégia didática muito aceita pelos alunos a eles submetidos, com isso conseguimos construir uma ponte acessível entre o conhecimento teórico (abstrato) e o concreto (através da ilustração do princípio de Cavalieri usando peças de madeira), foi possível quebrar paradigmas sobre formas geométricas irregulares que fugiam de definições antes concebidas, o trabalho prático também solucionou algumas dúvidas sobre volumes e ratificou a ideia de dimensões.

Os resultados na prática da manipulação do material concreto utilizando o princípio de Cavalieri possibilitaram criar uma ponte entre o teórico e o concreto.

A pesquisa mostrou que a aplicação do princípio de Cavalieri como postulado, sendo o mesmo unido a um molde(material concreto), consegue extrair resultados positivos na compreensão das fórmulas(modelos matemáticos) possibilitando a aplicação das definições e a resolução de situações problema de um grau de dificuldade relevante, no mais a pesquisa se limitou apenas ao prisma retangular e ao cilindro, sendo portanto possível expandir seu alcance para uma quantidade bem maior de sólidos.

Portanto, a utilização do material concreto em sala de aula facilita o saber escolar e cria ambientes de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; tradução de Helena Castro. São Paulo. Blucher, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília, MEC/SEF, 1997. p. 82. Disponível em: <http://www.portaleducacaopi.com.br/wp-content/uploads/2014/10/volume03-matematica.pdf>. Acesso em: 14/01/2020.

CORREA, A.A. **Saberes docentes e educação estatística: composições analíticas no ensino médio**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.14, n.1, pp.67-83, 2012.

COTTON, T. (1998). **Towards a mathematics education for social justice**. [s.i.] (thesis, Ph.D). Disponível em: http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/metodologia/Skovsmose_Cenarios_Invest.pdf. Acesso em 14/01/2020.

DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos da Matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica**. 6. Ed. São Paulo. Atual, 2005.

LIMA, Elon L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática – Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

MIORIM, M. A.; FIORENTINI, D. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. *Boletim da SBEM-SP*, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

PAIS, Luis Carlos. **Ensinar e Aprender Matemática**. São Paulo: Autêntica, 1º. Ed. 2006.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para Investigação**. *Bolema*, Rio Claro – SP, v. 13, n. 14, 2000. Disponível em: http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/metodologia/Skovsmose_Cenarios_Invest.pdf. Acesso em 14/01/2020.