



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
SÃO RAIMUNDO NONATO
CURSO DE MATEMÁTICA**

SUENE DE ASSIS SOUSA

**FUNÇÕES CONVEXAS E CÔNCAVAS: APLICAÇÃO DO TRUQUE DA RETA
TANGENTE E DA DESIGUALDADE DE JENSEN EM PROBLEMAS DE
OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA**

**SÃO RAIMUNDO NONATO
2025**

SUENE DE ASSIS SOUSA

FUNÇÕES CONVEXAS E CÔNCAVAS: APLICAÇÃO DO TRUQUE DA RETA
TANGENTE E DA DESIGUALDADE DE JENSEN EM PROBLEMAS DE
OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, São Raimundo Nonato.

Orientador: Prof. Dr. José Márcio Machado de Brito

SÃO RAIMUNDO NONATO
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Sousa, Suene de Assis

S725f Funções convexas e côncavas : aplicação do truque da reta tangente e da desigualdade de Jensen em problemas de olimpíadas de matemática / Suene de Assis Sousa. - 2025.
52 p.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus São Raimundo Nonato, 2025.

Orientador : Prof Dr. José Márcio Machado de Brito.

1. função convexa. 2. função côncava. 3. olimpíada de matemática. 4. truque da reta tangente. I. Título.

CDD - 510

Elaborado por Uliscley Silva Gomes CRB 15/938

SUENE DE ASSIS SOUSA

FUNÇÕES CONVEXAS E CÔNCAVAS: APLICAÇÃO DO TRUQUE DA RETA
TANGENTE E DA DESIGUALDADE DE JENSEN EM PROBLEMAS DE
OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, São Raimundo Nonato.

Aprovada em 02/07/2025.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. José Márcio Machado de Brito (Orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Dr. Antonio Sousa Ribeiro
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Me. Valdeci Nunes Costa
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

SÃO RAIMUNDO NONATO
2025

Dedico este trabalho, com todo o meu amor à minha mãe, Maria Leide de Assis Oliveira. Esta conquista também é sua.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida, pela fé que me sustentou e pela sabedoria concedida ao longo desta caminhada.

Aos meus pais, Raimundo Ivo e Maria Leide, que são minha base e minha inspiração. Agradeço por todo o incentivo e apoio ao longo da minha vida.

Às minhas irmãs, Sulamita e Samara, e às minhas sobrinhas, Lunna, Isabela e Ayla, pela cumplicidade e carinho. O apoio de vocês foi fundamental para que eu pudesse chegar até aqui.

Aos familiares e amigos que estiveram presentes com gestos de incentivo e apoio.

Ao Instituto Federal do Piauí, pelos ensinamentos e contribuições em minha formação, especialmente ao meu orientador, José Márcio, pelo conhecimento compartilhado e pelas valiosas orientações ao longo deste trabalho.

E a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

*“A mente que se abre a uma nova ideia
jamais volta ao seu tamanho original.
O importante é nunca parar de ques-
tionar.”.*

Albert Einstein.

RESUMO

As competições matemáticas desempenham importantes funções educacionais e sociais, ao promoverem o interesse pela matemática, o desenvolvimento do raciocínio lógico e a identificação de talentos, independentemente da origem social dos participantes. Dentre os temas recorrentes nessas competições, destacam-se as desigualdades matemáticas, cujo domínio exige, muitas vezes, o uso de técnicas mais elaboradas. Este trabalho apresenta duas estratégias eficazes para a resolução de problemas desse tipo: a desigualdade de Jensen e o truque da reta tangente. Para isso, inicia-se com uma breve revisão sobre derivadas e prossegue-se com a introdução das principais propriedades das funções convexas e côncavas, que constituem a base teórica das técnicas abordadas. Além disso, são discutidas outras ferramentas úteis, como desigualdades homogêneas, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e as relações entre as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática. Os conceitos desenvolvidos são aplicados na resolução de problemas selecionados de olimpíadas matemáticas realizadas nos últimos anos, demonstrando a utilidade prática dos métodos estudados.

Palavras-chaves: função convexa; função côncava; desigualdade; olimpíada de matemática, truque da reta tangente.

ABSTRACT

Mathematical competitions serve important educational and social purposes by fostering interest in mathematics, developing logical reasoning, and identifying talented students regardless of their social background. Among the recurring topics in such competitions, mathematical inequalities stand out, often requiring more advanced techniques for their resolution. This work presents two effective strategies for tackling these problems: Jensen's inequality and the tangent line trick. We begin with a brief review of derivatives, followed by the introduction of key properties of convex and concave functions, which provide the theoretical foundation for the methods explored. Additional tools are also discussed, such as homogeneous inequalities, the Cauchy-Schwarz inequality, and the relationships among the harmonic, geometric, arithmetic, and quadratic means. These concepts are then applied to the resolution of selected problems from recent mathematical olympiads, illustrating the practical utility of the techniques studied.

Keywords: convex function; concave function; inequality; math olympiad, tangent line trick.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Função Convexa	18
Figura 2 – Funções Convexas	19
Figura 3 – Funções Não Convexas	19
Figura 4 – Função Côncava	21
Figura 5 – (a) Função Côncava	21
Figura 6 – (b) Função Não Côncava	21
Figura 7 – $f(x) = -x^{1/3}$	22
Figura 8 – $g(x) = x^2$	22
Figura 9 – $(g \circ f)(x) = x^{2/3}$	22
Figura 10 – $f(x) = 12\text{sen}(x) - 5\cos(x)$	38
Figura 11 – Reta Tangente	39
Figura 12 – $f(x) = \frac{(3 - 2x)^2}{(3 - x)^2 + x^2}$	42

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IMO	International Mathematical Olympiad
JBMO	Junior Balkan Mathematical Olympiad
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
EGMO	European Girls Mathematical Olympiad

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	DERIVADAS	14
2.1	Noções de Derivada	14
2.2	Regras de Derivação	16
3	FUNÇÕES CONVEXAS E CÔNCAVAS	18
3.1	Definição de função convexa	18
3.2	Definição de função côncava	21
3.3	Propriedades de uma função convexa	22
4	DESIGUALDADES CLÁSSICAS	28
4.1	Desigualdades Homogêneas	28
4.2	Desigualdades entre Médias	31
4.3	Desigualdade de Jensen	35
4.4	Desigualdade de Cauchy Schwarz	37
5	TRUQUE DA RETA TANGENTE	39
6	PROBLEMAS DE OLIMPIADAS	44
7	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO

As competições matemáticas possuem uma longa tradição. Segundo (BRITO, 2018), nos moldes atuais, elas remontam a 1894, ano em que foram iniciadas as primeiras competições na Hungria. Gradualmente foram se espalhando para outras regiões e finalmente em 1959 ocorreu a 1ª Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) na Romênia. Atualmente no Brasil, existem olimpíadas nacionais e regionais, algumas delas são: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

Este trabalho tem como finalidade apresentar aplicação de funções convexas e côncavas em problemas de desigualdade, com foco em questões de olimpíadas. O tema desigualdade é pouco trabalhado no ensino básico, por isso, quando os alunos se deparam com questões desse conteúdo tem dificuldade na resolução. Em olimpíadas é frequente ter problemas de desigualdade, alguns deles podem ser resolvidos utilizando ferramentas básicas, como o fato de que $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica (MA-MG). No entanto em problema de maior complexidade é necessário conhecimento mais aprofundado para que o aluno consiga resolver a questão.

Com o intuito de suprir essa lacuna, apresentamos algumas técnicas de resolução de questões, essas técnicas são pouco conhecidas entre os estudantes especialmente os do ensino básico. Isso se deve ao fato de que tais métodos exigem noções elementares de derivadas, conteúdo que geralmente não é abordado no currículo escolar. Essa ausência de fundamentos pode comprometer a preparação dos alunos para competições mais desafiadoras, como por exemplo, a OBM, a IMO e competições regionais. Dado o elevado número de problemas envolvendo desigualdades em olimpíadas de matemática, tanto nacionais quanto internacionais, abrangendo desde o ensino básico até o nível universitário, explorar essas técnicas torna-se fundamental para proporcionar aos alunos ferramentas eficazes na resolução desses problemas.

A escolha do tema teve como principal objetivo ampliar o conhecimento dos alunos e professores a respeito de funções convexas e côncavas, com ênfase naqueles que estão se preparando para participarem de competições matemáticas. A partir disso foi realizada revisão bibliográfica detalhada sobre esse tema, e suas aplicabilida-

des em olimpíadas matemáticas. Essa investigação visa compreender as estratégias utilizadas na resolução de problemas que envolvem esse tipo de relação matemática. Logo, esta pesquisa é de abordagem qualitativa, com caráter exploratório, baseada na análise de técnicas específicas e resolução de questões de olimpíadas de matemática. O referencial teórico e a pesquisa estão organizados da seguinte forma:

- 1- Noções de derivadas e algumas regras de derivação, que serão utilizadas, por exemplo, no estudo de funções convexas;
- 2- Definições e propriedades das funções convexas e côncavas que serão usadas na desigualdade de Jensen e truque da reta tangente;
- 3- Algumas desigualdades clássicas que são úteis na resolução de problemas de olimpíadas, que são as desigualdades homogêneas, desigualdades entre médias, desigualdade de Jensen e desigualdade de Cauchy Schwarz;
- 4- O truque da reta tangente, que é uma abordagem que facilita a solução de questões mais complexas através da estimativa de uma função f por uma reta tangente apropriada;
- 5- Problemas de olimpíadas que exigem conhecimentos de desigualdades, para colocar em prática o conteúdo presente neste trabalho.

Em cada tópico resolveremos alguns problemas relacionados ao objeto de estudo. Para consultar outras questões indicamos (ANDREESCU; ANDRICA, 2003).

2 DERIVADAS

Neste capítulo apresentaremos algumas noções e propriedades da derivada de uma função. Estes conceitos estão fundamentados em (GUIDORIZZI, 2012).

2.1 NOÇÕES DE DERIVADA

Sejam $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I e a um ponto de seu domínio. A derivada da função f no ponto a é o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

O limite acima pode existir ou não. Se existir diz-se que f é derivável ou diferenciável no ponto a . Algumas notações para a derivada de f no ponto a são

$$D(f) \text{ e } \frac{df}{dx}(a).$$

Exemplo 2.1: A derivada de uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ constante é identicamente nula.

Solução:

Como f é constante, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$ para todo $x \in I$. Assim,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Exemplo 2.2: A derivada da função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, isto é, a função identidade é sempre 1.

Solução:

Dado $x \in I$, tem-se

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Exemplo 2.3: Calcule a derivada da função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + x$ no ponto $a = 1$.

Solução:

Dado $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + (1+h) - (1^2 + 1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 + h - 2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 3h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+3)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (h+3) = 3.
 \end{aligned}$$

O resultado a seguir, que pode ser encontrado em (GUIDORIZZI, 2012), mostra a derivada de algumas funções elementares.

Teorema 2.1. *Seja $n \neq 0$ um natural. São válidas as seguintes fórmulas de derivação:*

- a) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$;
- b) $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}, x \neq 0$;
- c) $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$, em que $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for ímpar ($n \geq 2$);
- d) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$;
- e) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$.

Exemplo 2.4: Calcule $f'(x)$, onde $f(x) = x^4$.

Solução:

Pelo item (a), temos

$$f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3.$$

Exemplo 2.5: Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule $f'(x)$.

Solução:

Pelo item (c), temos

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

2.2 REGRAS DE DERIVAÇÃO

O resultado a seguir mostra algumas regras de derivação, como por exemplo, a regra do produto (item c) e a regra do quociente (item d).

Teorema 2.2. *Sejam f e g deriváveis no ponto a e seja k uma constante. As funções $f \pm g$, $k.f$, $f.g$ e f/g (caso $g(a) \neq 0$), são também deriváveis no ponto a , com:*

$$a) (f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a);$$

$$b) (kf)'(a) = kf'(a);$$

$$c) (f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$

$$d) \left[\frac{f(a)}{g(a)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Nos exemplos a seguir, aplicaremos as regras de derivação para calcular a derivada de algumas funções.

Exemplo 2.6: *Seja $f(x) = (2x + 5)(x^2 - 3)$. Calcule $f'(x)$ pela regra do produto.*

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 5)'(x^2 - 3) + (2x + 5)(x^2 - 3)' \\ &= 2(x^2 - 3) + (2x + 5)2x \\ &= 2x^2 - 6 + 4x^2 + 10x \\ &= 6x^2 + 10x - 6. \end{aligned}$$

Exemplo 2.7: *Seja $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 1}$. Calcule $f'(x)$ pela regra do quociente.*

Solução:

Note que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 3)'(x^2 + 1) - (2x + 3)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2(x^2 + 1) - (2x + 3)2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 6x + 2}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Sejam f uma função e I o conjunto dos pontos x em que $f'(x)$ existe. A função $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ denomina-se derivada de 1ª ordem. A derivada de f' denomina-se derivada de 2ª ordem e é indicada por $(f')' = f''$.

Exemplo 2.8: Seja $f(x) = 4x^2 - 5x$. Calcule f' e f'' .

Solução:

Note que

$$f'(x) = 8x - 5 \quad \text{e} \quad f''(x) = 8.$$

Teorema 2.3. Sejam $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, $b \in J$, $f(I) \subset J$ e $f(a) = b$. Se f é derivável no ponto a e g é derivável no ponto b , então $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a , com

$$(g \circ f)' = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Exemplo 2.9: Seja $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = (3x^2 + 1)^3$, calcule $h'(x)$.

Solução:

Seja $f(x) = 3x^2 + 1$ e $g(y) = y^3$, então $h(x) = (g \circ f)(x)$, assim

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= 3f(x)^2 \cdot 6x \\ &= 3(3x^2 + 1)^2 \cdot 6x \\ &= 18x(3x^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

3 FUNÇÕES CONVEXAS E CÔNCAVAS

Neste capítulo, vamos apresentar a definição de função convexa, função côncava e algumas de suas propriedades fundamentais para estudo da desigualdade de Jensen e truque da reta tangente. Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em (LIMA, 2004).

3.1 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO CONVEXA

Definição 3.1. *Seja I um intervalo. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa quando para quaisquer $x, y \in I$ e $t \in (0, 1)$ tem-se:*

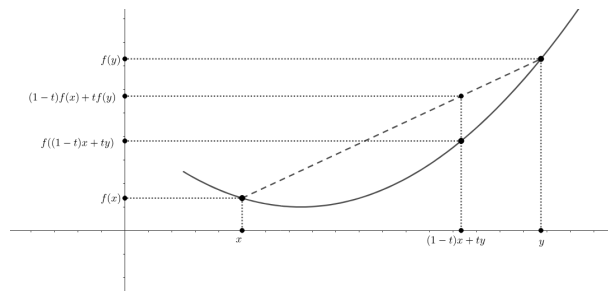
$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Quando,

$$f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y)$$

dizemos que f é *estritamente convexa*.

Figura 1 – Função Convexa



Fonte: Elaborado pela autora, (2025)

Geometricamente, uma função f é convexa quando para quaisquer $x, y \in I$ o gráfico de f no intervalo (x, y) está abaixo do segmento de reta que liga os pontos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$. A partir disso, quando conhecemos o gráfico da função, conseguimos ter uma ideia se a função é convexa ou não.

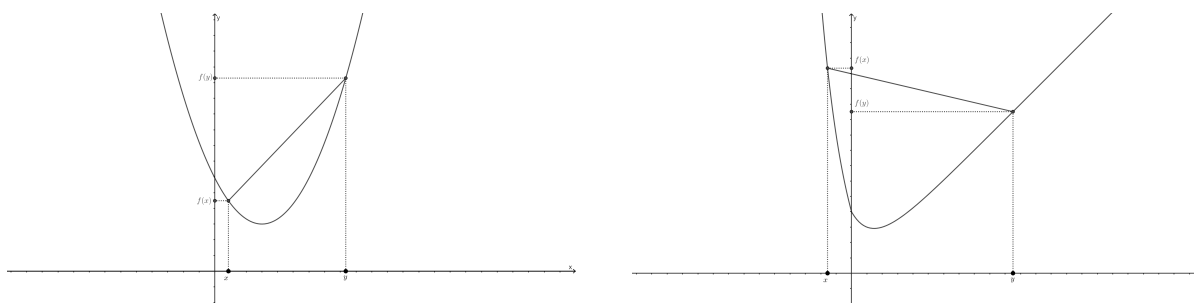
Outra caracterização importante de função convexa é dada pelo seu *epígrafe*. O epígrafe de uma função f , denotado por

$$\text{epi } f := \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\},$$

é o conjunto de todos os pontos que ficam acima do gráfico de f . É possível mostrar que f é convexa se, e somente se, o conjunto $\text{epi } f$ é *convexo* no plano. Essa caracterização permite interpretar a convexidade de forma mais geral, inclusive em contextos de funções de várias variáveis.

Exemplo 3.1: De acordo com as noções de funções convexas observe que as funções a seguir são convexas.

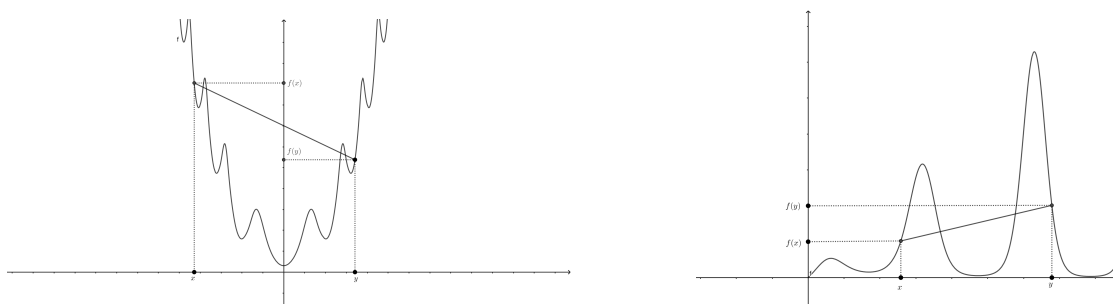
Figura 2 – Funções Convexas



Fonte: Elaborado pela autora, (2025)

Exemplo 3.2: De acordo com as noções geométricas de funções convexas, observe que as funções a seguir não são convexas.

Figura 3 – Funções Não Convexas



Fonte: Elaborado pela autora, (2025)

Exemplo 3.3: Mostre por definição que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é convexa.

Solução:

Dados $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in (0, 1)$, temos

$$\begin{aligned}
 f(tx + (1-t)y) &= (tx + (1-t)y)^2 \\
 &= t^2x^2 + 2tx(1-t)y + (1-t)^2y^2 \\
 &= t^2x^2 + t(1-t)(2xy) + (1-t)^2y^2 \\
 &\leq t^2x^2 + t(1-t)(x^2 + y^2) + (1-t)^2y^2 \\
 &= t^2x^2 + tx^2 - t^2x^2 + ty^2 - t^2y^2 + y^2 - 2ty^2 + t^2y^2 \\
 &= tx^2 + (1-t)y^2 \\
 &= tf(x) + (1-t)f(y).
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.4: Mostre por definição que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é convexa.

Solução:

Dados $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in (0, 1)$, pela desigualdade triângular, temos

$$\begin{aligned}
 f(tx + (1-t)y) &= |tx + (1-t)y| \\
 &\leq |tx| + |(1-t)y| \\
 &= t|x| + (1-t)|y| \\
 &= tf(x) + (1-t)f(y).
 \end{aligned}$$

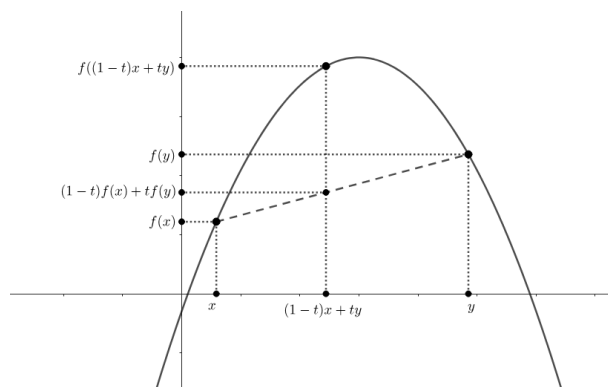
3.2 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO CÔNCAVA

Definição 3.2. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *côncava* quando $-f$ for convexa, ou seja, quando para quaisquer $x, y \in I$ e $t \in (0, 1)$ temos

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Quando ocorrer a desigualdade estrita, dizemos que f é *estritamente côncava*.

Figura 4 – Função Côncava

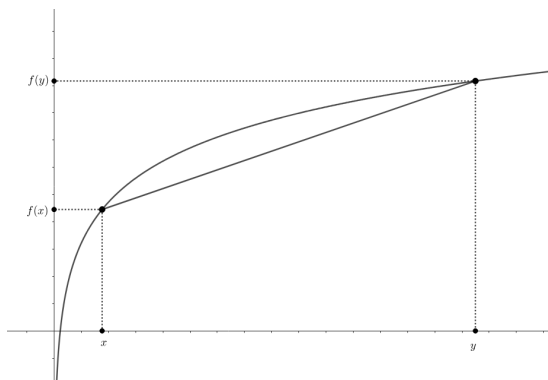


Fonte: Elaborado pela autora, (2025)

Geometricamente, f é côncava quando dados quaisquer dois pontos no gráfico de f o segmento que liga estes dois pontos está abaixo do gráfico de f .

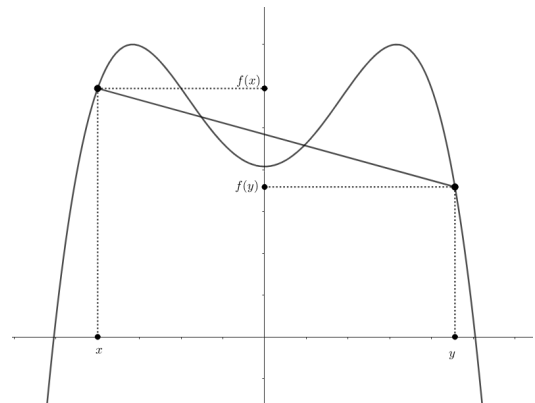
Exemplo 3.5: Analisando os gráficos, concluímos que (a) é uma função côncava e que (b) não é côncava.

Figura 5 – (a) Função Côncava



Fonte: Elaborado pela autora, (2025)

Figura 6 – (b) Função Não Côncava



Fonte: Elaborado pela autora, (2025)

3.3 PROPRIEDADES DE UMA FUNÇÃO CONVEXA

O resultado a seguir mostra que a soma de funções convexas é convexa.

Proposição 3.1. *Sejam $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções convexas definidas em um intervalo I . Então a função $(f + g) : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ também é convexa.*

Em geral, não é verdade que o produto de funções convexas é convexa, como também existem casos em que a composição de funções convexas não é convexa, como mostramos nos exemplos a seguir.

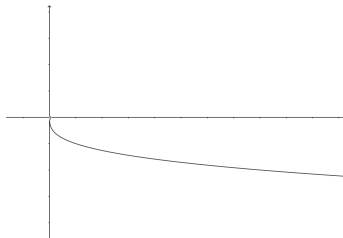
Exemplo 3.6: *Sejam $f : I \rightarrow J$ e $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. Note que*

$$(fg)(x) = x \cdot x^2 = x^3$$

não é convexa.

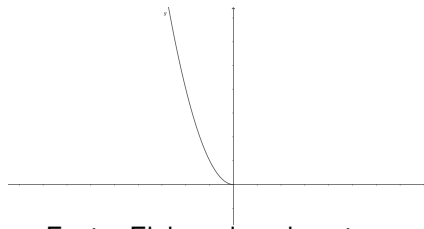
Exemplo 3.7: *Sejam $f : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0)$ e $g : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = -x^{1/3}$ e $g(x) = x^2$ são convexas, mas a composição $g \circ f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (-x^{1/3})^2 = x^{2/3}$ não é convexa.*

Figura 7 – $f(x) = -x^{1/3}$



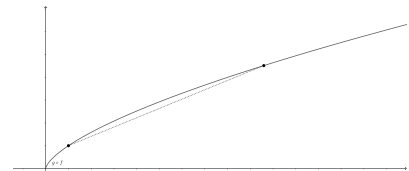
Fonte: Elaborado pela autora, (2025)

Figura 8 – $g(x) = x^2$



Fonte: Elaborado pela autora, (2025)

Figura 9 – $(g \circ f)(x) = x^{2/3}$



Fonte: Elaborado pela autora, (2025)

Note que no exemplo anterior $g(x) = x^2$ é decrescente em seu domínio. Na proposição a seguir, mostramos que sob certas condições, a composição de funções convexas é convexa.

Proposição 3.2. *Sejam $f : I \rightarrow J$ e $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ funções convexas, com g não decrescente. Então $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa.*

Quando $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, é mais simples verificar se f é convexa ou não. Na proposição a seguir e no Corolário 1 mostramos condições de primeira e segunda ordem equivalentes a definição de convexidade. Por ser também a proposição

que motiva o truque da reta tangente, que veremos no próximo capítulo, resolvemos demonstrar esta proposição.

Proposição 3.3. *Sejam I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em I . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) f é convexa;
- b) $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é não-decrescente;
- c) para quaisquer $x, a \in I$ tem-se $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Demonstração. $((a) \Rightarrow (b))$. Inicialmente, provaremos que (a) implica (b).

Dado um ponto $x \in (a, b)$, sejam $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$ e $(x, f(x))$, Mostremos que o coeficiente angular do segmento $\overline{AX}$ é menor ou igual ao do segmento $\overline{AB}$, que por sua vez é menor ou igual ao do segmento $\overline{XB}$, o que nos permitirá concluir que $f'(a) \leq f'(b)$. De fato, dado $x \in (a, b)$, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} x &= (1 - \lambda)a + \lambda b \Leftrightarrow \\ x &= a - \lambda a + \lambda b \Leftrightarrow \\ x &= a + \lambda(b - a) \Leftrightarrow \\ \lambda &= \frac{x - a}{b - a}. \end{aligned}$$

Pela convexidade de f , temos

$$\begin{aligned} f(x) &= f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b) \\ &= f(a) - \lambda f(a) + \lambda f(b) \\ &= f(a) + \lambda(f(b) - f(a)) \\ &= f(a) + \frac{x - a}{b - a}(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(a) + \frac{x - a}{b - a}(f(b) - f(a)) \Leftrightarrow \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &\leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

De forma análoga, dado $y \in (a, b)$, existe $\lambda \in (0, 1)$ taç que

$$y = (1 - \lambda)b + \lambda a \Leftrightarrow$$

$$y = b - \lambda b + \lambda a \Leftrightarrow$$

$$y = b + \lambda(a - b) \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{y - b}{a - b}.$$

Note que $y - b \leq 0$. Pela convexidade de f , temos

$$\begin{aligned} f(y) = f((1 - \lambda)b + \lambda a) &\leq (1 - \lambda)f(b) + \lambda f(a) \\ &= f(b) - \lambda f(b) + \lambda f(a) \\ &= f(b) + \lambda(f(a) - f(b)) \\ &= f(b) + \frac{y - b}{a - b}(f(a) - f(b)). \end{aligned}$$

Assim,

$$f(y) \leq f(b) + \frac{y - b}{a - b}(f(a) - f(b)).$$

Como $y - b \leq 0$, então

$$\frac{f(y) - f(b)}{y - b} \geq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Logo,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(y) - f(b)}{y - b}. \quad (3.1)$$

Fazendo $x \rightarrow a$ e $y \rightarrow b$ em (3.1), temos

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

Portanto f' é não-decrescente.

Provaremos agora que (b) implica (c). Dado um ponto $x \in (a, b)$ com $x > a$, pelo Teorema do Valor Médio (GUIDORIZZI, 2012) existe $c \in (a, x)$ tal que

$$\begin{aligned} f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &\Leftrightarrow f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) \\ &\Leftrightarrow f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a) \\ &\Leftrightarrow f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a). \end{aligned}$$

Como a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto a é dada por $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, concluímos pela afirmação em (c) que o gráfico de f está acima de qualquer reta tangente.

Finalmente, provaremos que (c) implica (a). Sejam $x, y \in I$ e $\lambda \in (0, 1)$ fixados. Defina

$$z := (1 - \lambda)x + \lambda y.$$

Pela hipótese, como $z \in (x, y)$, temos:

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z), \quad (3.2)$$

$$f(y) \geq f(z) + f'(z)(y - z). \quad (3.3)$$

Multiplicando a desigualdade (3.2) por $(1 - \lambda)$ e a (3.3) por λ , obtemos:

$$(1 - \lambda)f(x) \geq (1 - \lambda)f(z) + (1 - \lambda)f'(z)(x - z),$$

$$\lambda f(y) \geq \lambda f(z) + \lambda f'(z)(y - z).$$

Somando as duas desigualdades, temos:

$$(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \geq f(z) + f'(z) [(1 - \lambda)(x - z) + \lambda(y - z)].$$

Note que:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(x - z) + \lambda(y - z) &= (1 - \lambda)x + \lambda y - (1 - \lambda)z - \lambda z \\ &= (1 - \lambda)x + \lambda y - z \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \geq f(z),$$

ou seja,

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

o que prova que f é convexa. □

Corolário 1. *Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável no intervalo I , é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*

Exemplo 3.8: *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$, verifique se f é convexa.*

Solução:

Note que

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x \\f''(x) &= e^x.\end{aligned}$$

Portanto, $f''(x) > 0$ para todo número real x , logo f é convexa.

Exemplo 3.9: Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, verifique se f é convexa.

Solução:

Observe que,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 \\f''(x) &= 6x.\end{aligned}$$

Assim, a segunda derivada só é maior que 0 para x positivo. Portanto f não é convexa em $\mathbb{R}$, mas é convexa no intervalo $[0, \infty)$.

Como as funções côncavas são o oposto das convexas, com ajustes simples das propriedades das funções convexas obtemos resultados equivalentes para funções côncavas.

Proposição 3.4. Sejam I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em I . As seguintes afirmações são equivalentes:

- a) f é côncava;
- b) $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é não-crescente;
- c) para quaisquer $x, a \in I$ tem-se $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Concluimos pela afirmação em (c) que qualquer equação da reta tangente é maior que f , ou seja, o gráfico de f está abaixo das suas tangentes.

Corolário 2. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável no intervalo I , é côncava se, e somente se, $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

Exemplo 3.10: *Mostre que a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln x$ é côncava.*

Solução:

Observe que

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{x} \\f''(x) &= -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \forall x \in (0, \infty).\end{aligned}$$

Logo f é côncava.

4 DESIGUALDADES CLÁSSICAS

Os principais resultados a respeito de desigualdades estão apresentados neste capítulo, para estudo mais aprofundado dessas desigualdades consulte (BRITO, 2018) e (FILHO, 2021).

4.1 DESIGUALDADES HOMOGÊNEAS

Muitos problemas que resolveremos utilizando a desigualdade de Jensen e o truque da reta tangente exigem restrições sobre as variáveis, e as desigualdades homogêneas possibilitam lidar com essas condições. De acordo com a definição, quando todas as variáveis forem multiplicadas por uma constante t , o valor da expressão é multiplicado por uma potência de base t , e o expoente de t determina o grau de homogeneidade. Com isso, podemos supor sem perda de generalidade, por exemplo, que a soma das variáveis de f é 1 e que o produto das variáveis de f é 1.

Definição 4.1. Dizemos que uma função real de n variáveis f é homogênea de grau $k \geq 0$, quando

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

para todo número real t .

Exemplo 4.1: Determine se a função $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ é homogênea.

Solução:

Dado $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{tx + ty} \\ &= \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{t(x + y)} \\ &= \frac{t^2(x^2 + y^2)}{t(x + y)} \\ &= \frac{t(x^2 + y^2)}{(x + y)} \\ &= tf(x, y). \end{aligned}$$

Portanto, f é homogênea de grau 1.

Exemplo 4.2: Determine se a função $f(x, y, z) = \frac{xyz + x^2y + z^3}{x + y}$ é homogênea.

Solução:

$$\begin{aligned} f(tx, ty, tz) &= \frac{txtytz + (tx)^2ty + (tz)^3}{tx + ty} \\ &= \frac{t^3(xyz) + t^3x^2y + t^3z^3}{t(x + y)} \\ &= \frac{t^3(xyz + x^2y + z^3)}{t(x + y)} \\ &= \frac{t^2(xyz + x^2y + z^3)}{x + y} \\ &= t^2 f(x, y, z). \end{aligned}$$

Portanto, f é homogênea de grau 2.

Exemplo 4.3: A função $f(x, y) = x^2 + y$ não é homogênea, pois

$$f(tx, ty) \neq t^k f(x, y), \quad \forall k \geq 0.$$

Definição 4.2. Uma desigualdade $f(x_1, \dots, x_n) \geq g(x_1, \dots, x_n)$ é dita homogênea, se a função

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n)$$

for homogênea.

Exemplo 4.4: Considere $x^2 + y^2 \geq 2xy$, com $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = 2xy$. Mostre que h dada por $h(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$ é homogênea.

Solução:

Note que

$$h(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy.$$

Agora mostraremos que h é homogênea.

$$\begin{aligned} h(tx, ty) &= (tx)^2 + (ty)^2 - 2(tx)(ty) \\ &= t^2x^2 + t^2y^2 - 2t^2xy \\ &= t^2(x^2 + y^2 - 2xy) \\ &= t^2h(x, y). \end{aligned}$$

Portanto, h é homogênea de grau 2. Pela Definição 4.2 a desigualdade $x^2 + y^2 \geq 2xy$ também é homogênea.

Exemplo 4.5: Considere a seguinte desigualdade

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Mostre que essa desigualdade é homogênea.

Solução:

Sejam $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ e $g(x, y, z) = 3xyz$, mostraremos que h definida por $h(x, y, z) = f(x, y, z) - g(x, y, z)$ é homogênea. Note que

$$h(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Verificando a homogeneidade de h .

$$\begin{aligned} h(tx, ty, tz) &= (tx)^3 + (ty)^3 + (tz)^3 - 3(tx)(ty)(tz) \\ &= t^3x^3 + t^3y^3 + t^3z^3 - 3t^3xyz \\ &= t^3(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \\ &= t^3h(x, y, z). \end{aligned}$$

Isso mostra que h é homogênea de grau 3. Portanto, a desigualdade $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ é homogênea.

Quando uma desigualdade $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é homogênea podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = c$, onde c é uma constante real qualquer.

Exemplo 4.6: Dados $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais positivos e um desigualdade homogênea $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Mostre que podemos supor sem perda de generalidade que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = c$.

Solução:

Seja $t = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ e $a_1 = \frac{cx_1}{t}, a_2 = \frac{cx_2}{t}, \dots, a_n = \frac{cx_n}{t}$. Temos,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)c}{t} = c.$$

Como $h(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n)$ é homogênea, então

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \dots, x_n) &\iff h(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \\
 &\iff h(ta_1, ta_2, \dots, ta_n) \geq 0 \\
 &\iff t^k h(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0 \\
 &\iff h(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0 \\
 &\iff f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq g(a_1, a_2, \dots, a_n).
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq g(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = c. \end{array} \right.$$

Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = c$.

4.2 DESIGUALDADES ENTRE MÉDIAS

As desigualdades apresentadas a seguir são umas das mais clássicas (MA-MG), que possibilitam resolução de problemas que vão dos elementares até os mais difíceis. Além disso, essas desigualdades servem de apoio em questões que aplicando apenas uma única desigualdade não é suficiente para concluir a resolução do problema, funcionando como suporte para a desigualdade de Jensen e truque da reta tangente.

Definição 4.3. Dados números reais $x_1, x_2, \dots, x_n$, definimos:

(a) *Média Harmônica (MH) de $x_1, x_2, \dots, x_n$ por*

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

(b) *Média Aritmética (MA) de $x_1, x_2, \dots, x_n$ por*

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

(c) *Média Geométrica (MG) de $x_1, x_2, \dots, x_n$ por*

$$MG = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

(d) *Média Quadrática (MQ) de $x_1, x_2, \dots, x_n$ por*

$$MQ = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

A proposição a seguir, conhecida como desigualdade entre as médias aritmética e geométrica (MA-MG), é muito frequente em problemas de olimpíadas.

Proposição 4.1. (MA-MG). *Se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números reais positivos, então*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Proposição 4.2. (MH-MG). *Se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números reais positivos, então*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Proposição 4.3. (MA-MQ). *Se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números reais positivos, então*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

A partir das proposições 4.1, 4.2, 4.3, concluímos que $MH \leq MG \leq MA \leq MQ$.

Exemplo 4.7: *Prove que $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$, tais que a e b são números reais não negativos e $a + b \geq 1$.*

Solução:

Aplicando a desigualdade MA-MQ nos termos a^2 e b^2 , temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(a^2)^2 + (b^2)^2}{2}} &\geq \frac{a^2 + b^2}{2} \iff \frac{a^4 + b^4}{2} \geq \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 \\ &\iff a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2} (a^2 + b^2)^2. \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + (a^2 + b^2) + b^2 \\ &= 2(a^2 + b^2).\end{aligned}$$

Logo,

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Então,

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{8}.$$

Exemplo 4.8: Sejam a, b, c números reais positivos satisfazendo $abc = 1$. Mostre que

$$\frac{a}{a^2b+2} + \frac{b}{b^2c+2} + \frac{c}{c^2a+2} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Solução:

Aplicando a desigualdade MA-MH, temos

$$\begin{aligned}\frac{a}{a^2b+2} + \frac{b}{b^2c+2} + \frac{c}{c^2a+2} &= \frac{1}{ab+\frac{2}{a}} + \frac{1}{bc+\frac{2}{b}} + \frac{1}{ca+\frac{2}{c}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}} + \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}} + \frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}} \right) \\ &\leq \frac{1}{3} \left(\frac{c+a+a}{3} + \frac{a+b+b}{3} + \frac{b+c+c}{3} \right) \\ &= \frac{a+b+c}{3}.\end{aligned}$$

Exemplo 4.9: Seja $n \geq 3$ um inteiro e sejam $a_2, a_3, \dots, a_n$ números reais positivos tais que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Provar que

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \geq n^n. \quad (4.1)$$

Solução:

Aplicando $MA \geq MG$ no primeiro fator de multiplicação $(1+a_2)$, então

$$\frac{(1+a_2)}{2} \geq \sqrt{1a_2}.$$

Assim,

$$(1 + a_2)^2 \geq 2^2 a_2.$$

Para o segundo fator de multiplicação,

$$\frac{1 + a_3}{3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a_3}.$$

Logo

$$(1 + a_3)^3 \geq 3^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a_3.$$

Em geral, para o k -ésimo termo ($2 \leq k \leq n$), temos

$$(1 + a_k) = \left(\underbrace{\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-1}}_{k-1 \text{ parcelas}} + a_k \right).$$

Aplicando a desigualdade entre médias

$$\begin{aligned} \frac{(k-1) \left(\frac{1}{k-1}\right) + a_k}{k} &\geq \sqrt[k]{\left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}} \cdot a_k \\ (1 + a_k)^k &\geq k^k \cdot \left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \cdot a_k. \end{aligned}$$

Como k varia de 2 até n temos:

$$\prod_{k=2}^n (1 + a_k)^k \geq \prod_{k=2}^n k^k \cdot \left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \cdot a_k.$$

Note que $\prod_{k=2}^n k^k \cdot \left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}$ é um produtorio telescópico,

$$\prod_{k=2}^n k^k \cdot \left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} = 2^2 \left(\frac{1}{1}\right)^1 3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdots (n-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n-2}\right)^{n-2} n^n \left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = n^n,$$

logo,

$$\prod_{k=2}^n (1 + a_k)^k \geq n^n \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n.$$

Pelo enunciado $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$, então

$$\prod_{k=2}^n (1 + a_k)^k \geq n^n.$$

Portanto,

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \geq n^n.$$

4.3 DESIGUALDADE DE JENSEN

A seguir, apresentamos a desigualdade de Jensen e algumas consequências, que serão utilizadas no próximo capítulo, para resolver alguns problemas olímpicos. As demonstrações serão omitidas, mas podem ser encontradas em (BRITO, 2018).

Proposição 4.4. *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa no intervalo (a, b) . Dados $n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_n \in (0, 1)$ com $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, tem-se:*

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \dots + t_nf(x_n).$$

Além disso, se f for estritamente convexa, então a igualdade ocorre se, e somente, se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Corolário 3. *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa no intervalo (a, b) . Dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ têm-se:*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Corolário 4. *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava no intervalo (a, b) . Dados $n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_n \in (0, 1)$ com $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, têm se:*

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n) \geq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \dots + t_nf(x_n).$$

Corolário 5. *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava no intervalo (a, b) . Dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ têm-se:*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Exemplo 4.10: (Nesbit). *Se a, b, c são reais positivos, então*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \quad (4.2)$$

Solução:

Note que a desigualdade é homogênea, então podemos supor que $a + b + c = 1$. Então, $b + c = 1 - a, a + c = 1 - b, a + b = 1 - c$. Assim, a desigualdade (4.2) é equivalente à

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3}{2}.$$

Defina $f : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ por $f(x) = \frac{x}{1-x}$, derivando f duas vezes obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \geq 0, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Como f é convexa, podemos aplicar a Desigualdade de Jensen.

$$\frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Assim, $f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{3}{2}$.

Exemplo 4.11: Dados a, b, c números reais positivos, prove que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Solução:

Como a desigualdade é homogênea podemos supor que $a + b + c = 1$. Defina $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, note que

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = (x^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} \quad \text{e} \quad f''(x) = -\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{x^5}} \geq 0.$$

Como f é convexa, temos

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} &= a \cdot f(a^2 + 8bc) + b \cdot f(b^2 + 8ac) + c \cdot f(c^2 + 8ab) \\ &\geq f(a(a^2 + 8bc) + b(b^2 + 8ac) + c(c^2 + 8ab)) \\ &= f(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}}. \end{aligned}$$

Mostraremos agora que

$$\frac{1}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}} \geq 1,$$

isto é, que

$$1 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc.$$

De fato, aplicando MA-MG, temos

$$\begin{aligned} 1 = (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c) \\ &\geq a^3 + b^3 + c^3 + 3 \cdot (2\sqrt{ab}) \cdot (2\sqrt{ac}) \cdot (2\sqrt{bc}) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 24abc. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}} \geq 1.$$

4.4 DESIGUALDADE DE CAUCHY SCHWARZ

A desigualdade de Cauchy-Schwarz é uma das ferramentas mais poderosas e versáteis na resolução de problemas de desigualdades em olimpíadas de matemática. Ela permite comparar somas e produtos de termos de maneira estratégica, sendo especialmente útil quando lidamos com expressões simétricas ou com frações que envolvem somatórios. Seu uso adequado muitas vezes transforma uma desigualdade complicada em uma mais simples e direta.

Proposição 4.5. *Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ duas n -uplas de números reais, então*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A igualdade ocorre quando existe uma constante real k satisfazendo $a_i = kb_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ou seja, quando $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ são proporcionais.

Como consequência direta da desigualdade de Cauchy-Schwarz, apresentamos o Lema de Titu, também conhecido como Desigualdade de Engel. Trata-se de uma ferramenta poderosa e frequentemente utilizada na resolução de problemas de desigualdades em olimpíadas de matemática.

Corolário 6. *(Lema de Titu). Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ reais positivos. Então,*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

A igualdade ocorre quando existe uma constante real k satisfazendo $a_i = kb_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ou seja, quando $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ são proporcionais.

Exemplo 4.12: *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 = 1$, determine o máximo de $a + b$.*

Solução:

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se

$$(1 \cdot a + 1 \cdot b) \leq (1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \iff$$

$$(a + b)^2 \leq 2 \cdot (a^2 + b^2) \iff$$

$$(a + b)^2 \leq 2 \cdot 1 \iff$$

$$a + b \leq \sqrt{2}.$$

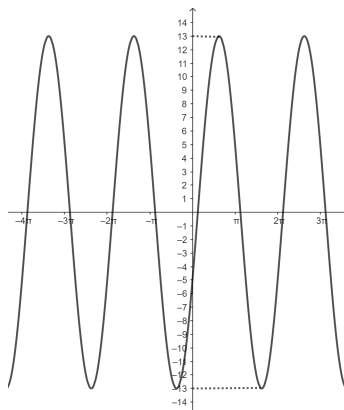
Portanto, o máximo de $a + b$ é $\sqrt{2}$.

Exemplo 4.13: Determine o máximo e mínimo de $f(x) = 12\text{sen}(x) - 5\text{cos}(x)$.

Solução:

A seguir, ilustramos o gráfico dessa função.

Figura 10 – $f(x) = 12\text{sen}(x) - 5\text{cos}(x)$



Fonte: Elaborado pela autora, (2025)

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se

$$(12\text{sen}(x) - 5\text{cos}(x))^2 \leq (12^2 + (-5)^2)(\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x)) \iff$$

$$(f(x)^2) \leq (12^2 + (-5)^2)(\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x)) \iff$$

$$(f(x)^2) \leq (144 + 25) \cdot 1 \iff$$

$$(f(x)^2) \leq 169.$$

Logo,

$$-13 \leq f(x) \leq 13.$$

Analisando o gráfico de f , notamos que de fato os pontos de máximo e mínimo desta função são 13 e -13 .

Através dos exemplos é possível notar a utilização da desigualdade de Cauchy Schwarz em diversas aplicações.

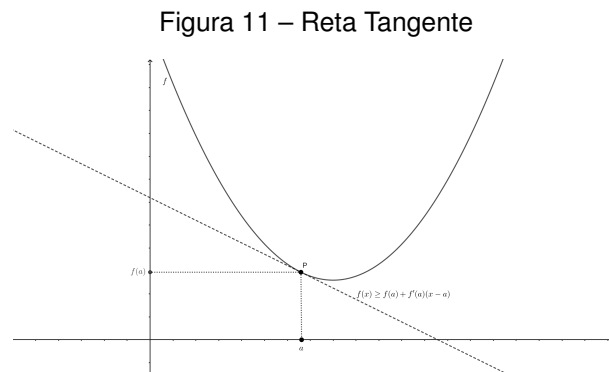
5 TRUQUE DA RETA TANGENTE

Neste capítulo apresentaremos o truque da reta tangente, para consultar propriedades da reta tangente, consulte (IEZZI, 2013). No capítulo 3, apresentamos as seguintes proposições.

Proposição 5.1. *Sejam I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em I . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) f é convexa;
- b) $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é não-decrescente;
- c) para quaisquer $x, a \in I$ tem-se $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Em particular se f' é convexa, então $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$, isto é, a reta tangente ao gráfico de f no ponto a está abaixo do gráfico de f , como pode ser observado na figura abaixo



Fonte: Elaborado pela autora, (2025)

Quando f é côncava, tem-se um resultado semelhante.

Proposição 5.2. *Sejam I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em I . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) f é côncava;
- b) $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é não-crescente;
- c) para quaisquer $x, a \in I$ tem-se $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Estas proposições são aplicadas em problemas difíceis envolvendo desigualdades, e o item (c) é conhecido como truque da reta tangente.

Exemplo 5.1: Sejam $a, b, c, d > 0$ e $a + b + c + d = 1$. Prove que

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}.$$

Solução:

Podemos reescrever a desigualdade como

$$(6a^3 - a^2) + (6b^3 - b^2) + (6c^3 - c^2) + (6d^3 - d^2) \geq \frac{1}{8}.$$

Defina $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = 6x^3 - x^2$. Devemos provar que:

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{1}{8}.$$

Note que f não é convexa em $[0, 1]$, pois

$$f'(x) = 18x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 36x - 2 \geq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{18}, 1\right].$$

Assim, para usar o truque da reta tangente, será preciso verificar se de fato o gráfico da função está abaixo da reta tangente. Note que a igualdade ocorre quando

$$a = b = c = d = \frac{1}{4},$$

portanto, uma escolha apropriada é aplicar a reta tangente em $\frac{1}{4}$. Devemos mostrar que

$$f'(x) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) + f'\left(\frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right).$$

Como,

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{32}, f'(x) = 18x^2 - 2x, f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}.$$

Temos,

$$\begin{aligned} f(x) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) + f'\left(\frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) &\iff 6x^3 - x^2 \geq \frac{1}{32} + \frac{5}{8}\left(x - \frac{1}{4}\right) \\ &\iff 6x^3 - x^2 \geq \frac{5x - 1}{8} \\ &\iff 48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

A reta $f(a) + f'(a)(x - a)$ é tangente a f no ponto a , então $x = a$ é raiz dupla da equação $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = 0$, assim $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ é divisível por $(x - a)^2$. Desse modo,

$$48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 = 16x^2 - 8x + 1 = (4x - 1)^2(3x + 1).$$

Portanto, $48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \geq 0, \forall x > 0$, ou seja, $6x^3 - x^2 \geq \frac{5x - 1}{8}$. Finalmente,

$$\begin{aligned} (6a^3 - a^2) + (6b^3 - b^2) + (6c^3 - c^2) + (6d^3 - d^2) &\geq \frac{5a - 1}{8} + \frac{5b - 1}{8} + \frac{5c - 1}{8} + \frac{5d - 1}{8} \\ &= \frac{5(a + b + c + d) - 4}{8} \\ &= \frac{5 \cdot 1 - 4}{8} \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Em certos casos, como no exemplo acima, a função f não é convexa ou côncava em todo o intervalo analisado. Mas pode ser que ainda assim consigamos mostrar que existe alguma reta tangente acima ou abaixo do gráfico em um certo ponto. Nos casos em que a igualdade ocorre quando todas as variáveis são iguais não é difícil saber qual ponto usar. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 5.2: Sejam a, b, c reais positivos. Prove que

$$\frac{(b + c - a)^2}{(b + c)^2 + a^2} + \frac{(c + a - b)^2}{(c + a)^2 + b^2} + \frac{(a + b - c)^2}{(a + b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Solução:

Note que a desigualdade é homogênea e podemos supor sem perda de generalidade que $a + b + c = 3$. Então, a desigualdade é equivalente à

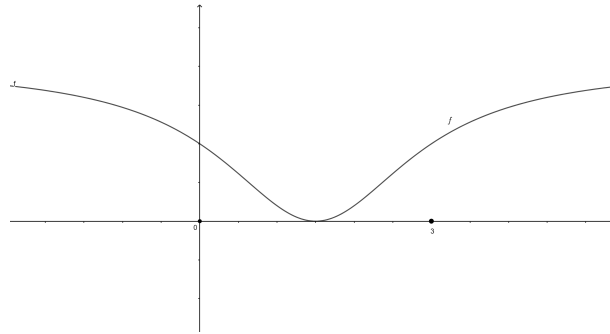
$$\frac{(3 - 2a)^2}{(3 - a)^2 + a^2} + \frac{(3 - 2b)^2}{(3 - b)^2 + b^2} + \frac{(3 - 2c)^2}{(3 - c)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Defina a função $f(x) = \frac{(3 - 2x)^2}{(3 - x)^2 + x^2}$, note que f não é convexa e nem côncava em $(0, 3)$.

Como consideramos $a = b = c = 1$, vamos usar a reta tangente em $x = 1$, pois a igualdade ocorre em $a = b = c = 1$. Portanto iremos verificar a desigualdade

$$f(x) \geq f(1) + f'(1)(x - 1).$$

Figura 12 – $f(x) = \frac{(3-2x)^2}{(3-x)^2 + x^2}$



Fonte: Elaborado pela autora, (2025)

Temos que,

$$f(1) = \frac{1}{5}, f'(x) = \frac{36x - 54}{(2x^2 - 6x + 9)^2}, f'(1) = -\frac{18}{25}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(1) + f'(1)(x-1) \\ \frac{(3-2x)^2}{(3-x)^2 + x^2} &\geq \frac{1}{5} - \frac{18}{25}(x-1) \\ \frac{4x^2 - 12x + 9}{2x^2 - 6x + 9} &\geq \frac{23 - 18x}{25} \\ 25(4x^2 - 12x + 9) &\geq (2x^2 - 6x + 9)(2x^2 - 6x + 9) \\ 36x^3 - 54x^2 + 18 &\geq 0. \end{aligned}$$

Note que 1 é raiz dupla da equação $f(x) - (f(1) + f'(1)(x-1))$, então o polinômio $36x^3 - 54x^2 + 18$ é divisível por $(x-1)^2$. Desse modo,

$$36x^3 - 54x^2 + 18 = (x-1)^2(36x + 18).$$

Assim,

$$f(x) \geq f(1) + f'(1)(x-1) \Leftrightarrow (x-1)^2(36x + 18) \geq 0.$$

Portanto a desigualdade $f(x) \geq f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{23 - 18x}{25}$ é válida para todo $x \geq 0$.

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) + f(c) &\geq \frac{23 - 18a}{25} + \frac{23 - 18b}{25} + \frac{23 - 18c}{25} \\ &= \frac{69 - 18(a + b + c)}{25} \\ &= \frac{69 - 18 \cdot 3}{25} \\ &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

6 PROBLEMAS DE OLIMPIADAS

Problema 1: (Áustria 2024 Adaptada (OSTERREICHISCHE MATHEMATIK,)) Sejam a, b e c números reais maiores que 1, tal que $abc = 8$. Prove a desigualdade

$$\frac{ab}{c-1} + \frac{bc}{a-1} + \frac{ca}{b-1} \geq 12.$$

Solução:

Sendo $abc = 8$, podemos reescrever as parcelas do lado esquerdo da desigualdade de tal forma que cada parcela esteja em relação a somente uma variável,

$$\frac{8}{c^2 - c} + \frac{8}{a^2 - a} + \frac{8}{b^2 - b} \geq 12.$$

Defina $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, por $f(x) = \frac{8}{x^2 - x}$. Assim, devemos mostrar que

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq 12.$$

Note que

$$f'(x) = \frac{-12x + 6}{x^4 - 2x^3 + x^2}, \quad f''(x) = \frac{36x^2 - 36x + 12}{x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3} > 0,$$

logo f é convexa. Como $abc = 8$, um ponto apropriado para aplicar o truque da reta tangente é quando $a = b = c = 2$. Sendo f é convexa, sabemos que

$$f(x) \geq f(2) + f'(2)(x - 2).$$

Note que $f'(2) = 4$ e $f''(2) = -\frac{18}{4}$, assim

$$f(x) \geq 4 - \frac{18}{4}(x - 2) = 16 - 6x.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) + f(c) &\geq 16 - 6a + 16 - 6b + 16 - 6c \\ &= 48 - 6(a + b + c) \\ &= 48 - 36 = 12. \end{aligned}$$

Problema 2: (Áustria 2024 (OSTERREICHISCHE MATHEMATIK,)) Seja x e y números reais positivos com $x + y = 1$. Prove que

$$\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} \geq 6.$$

Solução:

Sendo $x + y = 1$, podemos reescrever as parcelas do lado esquerdo em função de apenas uma variável,

$$\frac{x+1}{1-x} + \frac{y+1}{1-y} \geq 6.$$

Defina a função $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$., assim, devemos mostrar que

$$f(a) + f(b) \geq 6.$$

Note que

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{-4}{(x-1)^3} > 0,$$

logo f é convexa. Como $x + y = 1$, um ponto apropriado para aplicar o truque da reta tangente é $x = y = \frac{1}{2}$. Note que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \quad \text{e} \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 8.$$

Então,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 3 + 8\left(x - \frac{1}{2}\right) \iff \\ f(x) &\geq 3 + 8x - 4 \iff \\ f(x) &\geq 8x - 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &\geq 8a - 1 + 8b - 1 \\ &\geq 8(a + b) - 2 \\ &= 8 \cdot 1 - 2 = 6. \end{aligned}$$

Problema 3: (JBMO 2023 (JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD,)) Prove que para todos os números reais não negativos x, y, z , com algum deles diferente de 0, a seguinte desigualdade é válida

$$\frac{2x^2 - x + y + z}{x + y^2 + z^2} + \frac{2y^2 + x - y + z}{x^2 + y + z^2} + \frac{2z^2 + x + y - z}{x^2 + y^2 + z} \geq 3. \quad (6.1)$$

Solução:

Fazendo $a = 2x^2 - x + y + z$, $b = 2y^2 + x - y + z$, $c = 2z^2 + x + y - z$, tentaremos reescrever a desigualdade (6.1) em função de a, b, c . Note que

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x + y + z}{x + y^2 + z^2} + \frac{2y^2 + x - y + z}{x^2 + y + z^2} + \frac{2z^2 + x + y - z}{x^2 + y^2 + z} &\geq 3 \iff \\ \frac{1}{2} \left(\frac{2x^2 - x + y + z}{x + y^2 + z^2} + \frac{2y^2 + x - y + z}{x^2 + y + z^2} + \frac{2z^2 + x + y - z}{x^2 + y^2 + z} \right) &\geq 3 \cdot \frac{1}{2} \iff \\ \frac{2x^2 - x + y + z}{2x + 2y^2 + 2z^2} + \frac{2y^2 + x - y + z}{2x^2 + 2y + 2z^2} + \frac{2z^2 + x + y - z}{2x^2 + 2y^2 + 2z} &\geq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Observe que,

$$2x + 2y^2 + 2z^2 = (2y^2 + x - y + z) + (2z^2 + x + y - z) = b + c,$$

$$2x^2 + 2y + 2z^2 = (2x^2 - x + y + z) + (2z^2 + x + y - z) = a + c,$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z = (2x^2 - x + y + z) + (2y^2 + x - y + z) = a + b.$$

Portanto,

$$\frac{2x^2 - x + y + z}{2x + 2y^2 + 2z^2} + \frac{2y^2 + x - y + z}{2x^2 + 2y + 2z^2} + \frac{2z^2 + x + y - z}{2x^2 + 2y^2 + 2z} = \frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b},$$

Assim, a desigualdade (6.1) é equivalente à

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}.$$

No Exemplo 4.10, a validade da desigualdade foi estabelecida por meio da aplicação da desigualdade de Jensen, o que comprova a veracidade da desigualdade original.

A próxima questão foi utilizada em um processo seletivo voltado à escolha de alunas para compor a equipe brasileira na XII edição da European Girls Mathematical Olympiad (EGMO) (EUROPEAN GIRLS' MATHEMATICAL OLYMPIAD,).

Problema 4: (Brasil 2023 (TORNEIO MENINAS NA MATEMÁTICA,)) Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais positivos tais que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Prove que

$$\frac{a_1}{\sqrt{1 - a_1}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{1 - a_n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n - 1}} (\sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_n}).$$

Solução:

Defina $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x}}$. Note que f é convexa, pois

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x}} + \frac{x}{2(1 - x)^{3/2}} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{1}{2(1 - x)^{3/2}} + \frac{1}{2(1 - x)^{3/2}} + \frac{3x}{4(1 - x)^{5/2}} > 0$$

para todo $x \in (0, 1)$.

Como $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ e todos os $a_i \in (0, 1)$, podemos aplicar a desigualdade de Jensen à função f , obtendo:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{1-a_i}} = \sum_{i=1}^n f(a_i) \geq n \cdot f\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) = n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Como

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{\sqrt{1-1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}},$$

segue que:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{1-a_i}} \geq \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy Schwarz temos

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1 \cdot 1} + \sqrt{a_2 \cdot 1} + \cdots + \sqrt{a_n \cdot 1} &\leq \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2} \\ &= \sqrt{n} \cdot \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}}(\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n}).$$

Problema 5: (IMO 2020 (INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD,)) Dados os números reais a, b, c, d tais que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ com $a + b + c + d = 1$. Prove que

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

Solução:

Defina a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \ln x$. Note que f é côncava, pois

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Inicialmente, vamos mostrar que

$$a^a b^b c^c d^d \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \quad (6.2)$$

De fato, aplicando a desigualdade de Jensen temos

$$a \ln(a) + b \ln(b) + c \ln(c) + d \ln(d) \leq \ln(aa + bb + cc + dd)$$

$$\ln(a^a) + \ln(b^b) + \ln(c^c) + \ln(d^d) \leq \ln(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

$$\ln(a^a b^b c^c d^d) \leq \ln(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

$$a^a b^b c^c d^d \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Mostraremos agora que

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1 = (a + b + c + d)^3.$$

Desenvolvendo os dois lados da desigualdade, temos

$$\begin{array}{ccccccc}
 a^3 & +b^2a & +c^2a & +d^2a & & a^3 & +3b^2a & +3c^2a & +3d^2a \\
 +2a^2b & +2b^3 & +2bc^2 & +2d^2b & & +3a^2b & +b^3 & +3bc^2 & +3d^2b \\
 +3a^2c & +3b^2c & +3c^3 & +3d^2c & < & +3a^2c & +3b^2c & +c^3 & +3d^2c \\
 +4a^2d & +4b^2d & +4c^2d & +4d^3 & & +3a^2d & +3b^2d & +3c^2d & +d^3 \\
 & & & & & +6abc & +6bcd & +6cda & +6dab
 \end{array}$$

Cancelando alguns termos,

$$\begin{array}{l}
 b^3 + 2c^3 + a^2d + b^2d + c^2d + 3d^3 < \\
 \begin{array}{l}
 2b^2a + 2c^2a + 2d^2a + a^2b + bc^2 + d^2b \\
 +6abc + 6bcd + 6cda + 6dab.
 \end{array}
 \end{array}$$

Por hipótese, $a \geq b \geq c \geq d > 0$, assim, o lado esquerdo da desigualdade acima de fato é menor que o direito, pois

$$2b^2a \geq b^3 + b^2d,$$

$$2c^2a \geq 2c^3,$$

$$2d^2a \geq 2d^3,$$

$$a^2b \geq a^2d,$$

$$bc^2 \geq c^2d,$$

$$d^2b \geq d^3,$$

$$6(abc + bcd + cda + dab) > 0.$$

Portanto,

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < (a + b + c + d)^3 = 1.$$

Segue de (6.2) que $(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$.

Problema 6: (*Pensilvânia 2019 (ART OF PROBLEM SOLVING,)*) Sejam a, b, c reais positivos tais que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Mostre que

$$a^a bc + b^b ca + c^c ab \geq 27bc + 27ca + 27ab. \quad (6.3)$$

Solução:

Como $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, temos que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = 1 \iff bc + ac + ab = abc.$$

Note que,

$$a^a bc + b^b ca + c^c ab \geq 27bc + 27ca + 27ab \iff$$

$$a^a bc + b^b ca + c^c ab \geq 27(bc + ca + ab) \iff$$

$$a^a bc + b^b ca + c^c ab \geq 27(abc) \iff$$

$$\frac{1}{a}a^a + \frac{1}{b}b^b + \frac{1}{c}c^c \geq 27.$$

Defina $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = x^x$, dessa forma, a desigualdade (6.3) é equivalente à

$$\frac{1}{a}f(a) + \frac{1}{b}f(b) + \frac{1}{c}f(c) \geq 27.$$

Calculando a primeira e a segunda derivada de f , obtemos

$$f'(x) = x^x \ln x + x^x \quad \text{e} \quad f''(x) = x^x \left[(\ln(x) + 1)^2 + \frac{1}{x} \right] > 0, \quad \forall x > 0.$$

Logo f é convexa. Utilizando a desigualdade de Jensen, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}f(a) + \frac{1}{b}f(b) + \frac{1}{c}f(c) &\geq f\left(\frac{1}{a}a + \frac{1}{b}b + \frac{1}{c}c\right) \\ &\geq f(3) \\ &\geq 3^3 = 27. \end{aligned}$$

Problema 7: (Romênia 2018 (ART OF PROBLEM SOLVING,)) Sejam $a, b, c \geq 0$ tais que $a + b + c = 3$, prove que

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} \geq \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+a}. \quad (6.4)$$

Solução:

A desigualdade (6.4) é equivalente à

$$\frac{a-1}{1+b} + \frac{b-1}{1+c} + \frac{c-1}{1+a} \geq 0.$$

Considere a função $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Note que a desigualdade (6.4) é equivalente à:

$$(a-1)f(b) + (b-1)f(c) + (c-1)f(a) \geq 0$$

Além disso, derivando f , obtemos:

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \geq 0.$$

Assim, f é convexa. Aplicando o truque da reta tangente, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(1) + f'(1)(x-1) \\ &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) \\ &\geq \frac{3-x}{4}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} (a-1)f(b) + (b-1)f(c) + (c-1)f(a) &\geq (a-1) \cdot \frac{3-b}{4} \\ &\quad + (b-1) \cdot \frac{3-c}{4} \\ &\quad + (c-1) \cdot \frac{3-a}{4} \\ &= \frac{4(a+b+c) - 9 - (ab+bc+ac)}{4}. \end{aligned}$$

Por MA-MG, temos $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, $ac \leq \frac{a^2+c^2}{2}$, $bc \leq \frac{b^2+c^2}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} ab + ac + bc &\leq a^2 + b^2 + c^2 \iff \\ 3(ab + ac + bc) &\leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \iff \\ 3(ab + ac + bc) &\leq (a+b+c)^2 \iff \\ (ab + ac + bc) &\leq \frac{(a+b+c)^2}{3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) + f(c) &\geq \frac{4(a+b+c) - 9 - \frac{(a+b+c)^2}{3}}{4} \\ &= \frac{4 \cdot 3 - 9 - 3}{4} = 0. \end{aligned}$$

7 CONCLUSÃO

Concluimos que as funções convexas e côncavas desempenham um papel significativo na resolução de problemas matemáticos, especialmente em contextos competitivos como as olimpíadas. Sua presença recorrente nessas competições evidencia a relevância dos conteúdos abordados neste trabalho, os quais, embora fundamentais, são pouco explorados no ensino básico.

Ao longo do estudo, procuramos enfrentar e superar as principais dificuldades associadas ao tema, por meio da resolução de diversos problemas cuidadosamente selecionados. Tal abordagem não apenas reforçou a compreensão teórica, mas também evidenciou a importância da prática sistemática para o desenvolvimento da habilidade de resolução em nível olímpico.

Destacamos, ainda, que o domínio de ferramentas como o truque da reta tangente e a desigualdade de Jensen representa um diferencial importante, oferecendo ao estudante meios mais diretos e eficientes de abordar e resolver questões desafiadoras. Esperamos, com isso, despertar o interesse de professores e alunos para o estudo aprofundado do tema, bem como incentivá-los à participação em competições matemáticas como espaço de aprendizado e superação.

REFERÊNCIAS

- ANDREESCU, T.; ANDRICA, D. **360 problems for mathematical contests**. Zalău: Gil Publishing House, 2003. 13
- ART OF PROBLEM SOLVING. **Art of Problem Solving**. Acesso em: 17 de janeiro de 2025. Disponível em: <<https://artofproblemsolving.com>>. 48, 49
- BRITO, J. M. M. **Funções convexas e desigualdades em problemas de olimpíadas de matemática**. 2018. 60 f. Monografia (Graduação em Matemática) Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2018. 12, 28, 35
- EUROPEAN GIRLS' MATHEMATICAL OLYMPIAD. **European Girls Mathematical Olympiad**. Acesso em: 16 jan. 2025. Disponível em: <<https://www.egmo.org/countries>>. 46
- FILHO, J. F. M. **A importância do ensino de algumas desigualdades clássicas no ensino médio**. 2021. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021. 28
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo vol. 1**. LTC, Rio de Janeiro, 2012. 14, 15, 24
- IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria**. Atual, 2013. 39
- INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. **International Mathematical Olympiad**. Acesso em: 13 de janeiro de 2025. Disponível em: <<https://www.imo-official.org>>. 47
- JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD. **Junior Balkan Mathematical Olympiad**. Acesso em: 16 de janeiro de 2025. Disponível em: <<https://jbmo2024.tubitak.gov.tr>>. 45
- LIMA, E. L. **Análise real**. IMPA, Rio de Janeiro, v. 1, 2004. 18
- OSTERREICHISCHE MATHEMATIK. **Osterreichische Mathematik**. Acesso em: 22 de janeiro de 2025. Disponível em: <<https://www.math.aau.at/OeMO>>. 44
- TORNEIO MENINAS NA MATEMÁTICA. **Torneio Meninas na Matemática**. Acesso em: 10 de janeiro de 2025. Disponível em: <https://www.tm2.org.br/content/uploads/2023/03/TST1_EGMO_2023.pdf>. 46