

FOLHA DE APROVAÇÃO

TITULO: “PRINCÍPIO DE CAVALIERI COMO FERRAMENTA PARA CÁLCULOS DE VOLUMES NO ENSINO MÉDIO.”

ALUNO(A): Ediney Laurindo Alves - IFPI

DATA: 23 de março de 2018

Monografia defendida junto ao Departamento de Formação de Professores, Letras e Ciências, aprovada pela Banca Examinadora.

COMISSÃO EXAMINADORA

Assinado no original

Prof. MSc. Paulo Airtton Cordeiro de Souza

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí

Orientador e Presidente

Assinado no original

Prof. MSc. Francismar Holanda

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí

Avaliador

Assinado no original

Prof. MSc. Jonathan Lavor da Costa

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí

Avaliador

PRINCÍPIO DE CAVALIERI COMO FERRAMENTA PARA CÁLCULO DE VOLUMES NO ENSINO MÉDIO

Ediney Laurindo Alves¹
Paulo Aírton Cordeiro de Souza²

RESUMO

Este trabalho constitui-se de uma pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico que tem por objetivo geral discutir o princípio de Cavalieri como uma importante ferramenta na dedução das principais fórmulas do cálculo de volumes estudadas no ensino médio. Afinal, Todos os dias, nos deparamos com situações que envolvem a grandeza volume e o seu cálculo, por isso se faz necessário é importante que nos apropriemos de suas principais fórmulas geométricas, de modo a usarmos com mais segurança em situações do cotidiano. Como nosso foco será o Ensino Médio, o Princípio de Cavalieri se apresenta de forma satisfatória. Sendo abordado na maioria dos livros didáticos que tratam sobre o cálculo de volume. Apresentaremos nesse trabalho os aspectos históricos sobre Bonaventura Cavalieri, a importância do cálculo de volumes no ensino médio, além de sugerir forma alternativa de se trabalhar tal princípio com a utilização do Software computacional GeoGebra. Por fim, abordaremos a relação entre o princípio de Cavalieri e a estereologia, procurando dar mais significado prático e suporte para que os alunos se apropriem destes conhecimentos e os utilizem em situações cotidianas e/ou em outras áreas do conhecimento.

Palavra-chave: Princípio de Cavalieri. Volume. Ensino Médio.

¹ Graduando do curso de Matemática do IFPI - Instituto Federal de Educação do Piauí.

² Professor Mestre do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI (Orientador).

ABSTRACT

This work is a qualitative bibliographical research whose general objective is to discuss the Cavalieri principle as an important tool in the deduction of the main formulas of the calculation of volumes studied in high school. After all, every day, we are faced with situations involving volume and its calculation, so it is necessary that we appropriate its main geometric formulas, so that we use more safely in everyday situations. As our focus will be on High School, the Cavalieri Principle is presented in a satisfactory way. Being addressed in most of the textbooks that deal with volume calculation. We will present in this work the historical aspects about Bonaventura Cavalieri, the importance of the calculation of volumes in high school, besides suggesting an alternative way of working this principle with the use of GeoGebra Computational Software. Finally, we will discuss the relationship between the Cavalieri principle and stereology, seeking to give more practical meaning and support for students to appropriate this knowledge and use it in everyday situations and / or other areas of knowledge.

Keywords: Cavalieri Principle. Volume. Secondary School.

1 INTRODUÇÃO

Na vivência em sala de aula, observando a prática profissional docente, mais especificadamente em aulas de geometria espacial sobre o cálculo de volumes, deparamo-nos com situações em que o professor apenas apresentava as fórmulas dos principais sólidos prontas sem a devida demonstração.

A partir daí passamos a pesquisar sobre o referido tema, e decidimos produzir este artigo, afinal, o volume é uma das grandezas mais comuns e mais utilizadas no nosso cotidiano, e conhecermos suas principais fórmulas é de grande importância, pois, todos os dias, compramos, usamos ou medimos produtos que são vendidos de acordo com seu volume.

Existem alunos que não se identificam com a matemática, mas mesmo assim devem aprender no mínimo o básico para serem sujeitos ativos na construção de seus conhecimentos. Muitos vão se deparar com situações em que há a necessidade de obter o volume de algum sólido, assim como existem profissionais

que precisam desse conhecimento para desenvolver suas tarefas, como nos afirma Lima (2003):

Por exemplo, o mestre de obras precisa saber o volume de concreto que será utilizado na construção das colunas, vigas e lajes de um edifício. A forma e as dimensões de cada um destes objetos estão na planta e o cálculo do volume deverá ser feito antes que o edifício exista. Alguns objetos são pequenos demais, ou grandes demais, ou são inacessíveis, ou simplesmente não existem concretamente. Sentimos então a necessidade de obter métodos para o cálculo de volumes, pelo menos de objetos simples, conhecendo sua forma e suas dimensões. (LIMA ET. AL., 2003).

Diante desse contexto, o objetivo geral deste estudo é discutir o princípio de Cavalieri como uma importante ferramenta na dedução das principais fórmulas do cálculo de volume estudadas no ensino médio. Para atingir tal objetivo, traçamos os seguintes objetivos específicos: apresentar os aspectos históricos sobre Bonaventura Cavalieri e a importância do cálculo de volumes no ensino médio, bem como sugerir forma alternativa de se trabalhar tal princípio com a utilização do Software computacional GeoGebra.

Nessas discussões, abordaremos a relação entre o princípio de Cavalieri e a Estereologia, procurando dar mais significado prático e suporte para que os alunos se apropriem destes conhecimentos e os utilizem em situações cotidianas e/ou em outras áreas do conhecimento.

Esclarecemos, porém, que tal princípio na verdade é um teorema, e que sua demonstração utiliza integração, assunto este que não é abordado em muitas escolas no ensino médio. Porém, se virmos esse teorema como axioma, podemos chegar à dedução das principais fórmulas utilizadas nos livros didáticos do ensino médio, sem precisarmos recorrer ao cálculo integral.

Ressaltamos que esta pesquisa qualitativa constitui-se de um estudo bibliográfico fundamentado em autores tais como Boyer (2012), Dante (2016), Eves (2014) Gelson Iezzi (2016), entre outros.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS: BONAVENTURA CAVALIERI E O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES.

Figura 1: Bonaventura Cavalieri (1598-1647)



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Bonaventura_Cavalieri

Bonaventura Cavalieri nasceu no ano de 1598 em Milão, tornou-se jesuado e não jesuíta como muitos livros didáticos afirmam. Em 1616, viajou para Pisa, onde estudou Teologia e Filosofia. Conheceu o padre Benedito Castelli (1577 -1644) que o apresentou a Galileu (1564-1642), do qual veio a tornar-se discípulo, no ano de 1629 foi indicado à cadeira de professor em Bolonha. Ocupou esse cargo até o ano de sua morte em 1647.

Segundo (Boyer 2012), Cavalieri foi um grande intelectual da matemática, publicando vasto material tanto sobre matemática pura quanto aplicada, dentre as quais podemos citar: trigonometria, geometria, astronomia e óptica. Foi considerado o percussor dos logaritmos na Europa sendo o primeiro autor italiano a apreciar o valor dos logaritmos.

Em seu *Directorium universale uranometricum*, de 1632, ele publicou tabelas de senos, tangentes, secantes e senos versos, junto com seus logaritmos, com oito casas; mas a obra que mais o projetou, sendo sua grande contribuição à matemática foi o tratado denominado *Geometria indivisibilibus*, publicado em 1635, na qual apresenta o método dos indivisíveis.

Eves (2004), diz em seu livro de história da matemática, que o método dos indivisíveis de Cavalieri tem raízes que remontam a Demócrito e Arquimedes, mas cuja motivação direta, talvez, se encontre nas tentativas de Kepler de achar certas áreas e certos volumes.

Já Segundo Boyer (2012), na obra *Geometria dos indivisíveis de Cavalieri* o argumento em que se baseia o livro é essencialmente o sugerido por Oresme, Kepler e Galileu.

Em seu livro de História da matemática, Eves (2004) diz que é difícil até descobrir o que realmente Cavalieri entendia por “indivisível”:

Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de secções planas paralelas. Cavalieri afirmava: fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Processo análogo com os elementos do conjunto das secções planas paralelas de um sólido dado fornecerá outro sólido com o mesmo volume do original. (EVES, 2004, p. 425).

Desse modo, podemos pensar uma área como sendo formada de segmentos ou “indivisíveis” e que, de modo semelhante, volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase atômicos.

Segundo texto encontrado no Caderno do Professor do estado de São Paulo, para Cavalieri:

A linha era formada por pontos sem comprimento, a superfície por infinitas linhas sem largura, e os sólidos eram interpretados por uma reunião de superfícies sem profundidade. No seu entendimento, as figuras planas são como tecidos compostos por fios paralelos e os sólidos, como livros, pilhas de folhas paralelas. (SÃO PAULO, 2015, p. 69-70).

A confusa concepção de indivisível de Cavalieri, como uma espécie de parte atômica de uma figura, gerou muitas discussões e críticas sérias de alguns estudiosos do assunto, particularmente do ourives e matemático suíço Paul Guldin (1577-1642), por não apresentar o rigor matemático desejado. Cavalieri então em 1647 publicou a obra “*Exercitationes geometricae sex*” (Seis Exercícios Geométricos), na qual apresentou de maneira mais clara sua teoria. Tal livro transformou-se em fonte importante para os matemáticos do século XVII. Apesar das críticas, seu postulado permanece praticamente intacto até os dias de hoje.

3 O CÁLCULO DE VOLUMES NO ENSINO MÉDIO E SUA IMPORTÂNCIA.

Calcular volumes não é uma prática recente na história. Desde os Babilônios passando por Egípcios, Gregos e Romanos, até os dias atuais, o cálculo do volume originou-se da necessidade humana de transportar ou armazenar coisas, e foi evoluindo junto à sociedade.

Sendo uma das grandezas mais comuns e mais utilizadas no nosso cotidiano, é imprescindível que nos apropriemos de suas principais fórmulas geométricas, visto que medidas de volumes fazem parte do nosso dia-a-dia.

Para compreendermos como obtemos o cálculo do volume de um determinado sólido, devemos primeiramente saber que medir é comparar. Podemos imaginar uma determinada medida arbitrária e compará-la com o sólido que queremos medir, a fim de verificarmos quanto dessa unidade arbitrária caberá no sólido. Podemos dizer, então, que o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado.

Este processo remete-se a Eudoxo (408-355 a.c) e Arquimedes (287-212 a.c), que iniciaram as primeiras comparações acerca do cálculo de volume. No ensino médio, o professor geralmente apresenta o conteúdo sem justificativas, restringindo-se à memorização, desvinculando-se das ideias originais, o que compromete a compreensão dos alunos que geralmente restringe-se à fixação das principais fórmulas. O cálculo do volume nem sempre é uma tarefa fácil. No ensino médio, geralmente inicia-se pela comparação de um bloco retangular e o cubo unitário. Este processo consiste em comparar o volume de um bloco retangular pela quantidade de vezes que este comporta o cubo unitário. Nesta etapa da aprendizagem, este método é satisfatório para cálculos desta natureza. Porém nem sempre este processo será suficiente, uma vez que podemos nos deparar com o volume de sólidos como o do cone e o da esfera.

Diante de situações como estas e levando-se em consideração o nível de ensino em que estamos trabalhando, o ensino médio, o princípio de Cavalieri que utiliza a comparação de volumes constitui uma importante ferramenta na dedução das principais fórmulas do cálculo de volumes, como defende Boyer (2012):

O princípio de Cavalieri representa ferramenta poderosa para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno. Com a aceitação desse princípio como evidentes, intuitivamente, podem-se resolver muitos problemas de mensuração que normalmente requereriam técnicas avançadas de cálculo (BOYER, 2012, p. 426).

Ou seja, com a aceitação desse princípio como evidente podemos resolver de forma simples problemas considerados complexos, como por exemplo: ao deduzirmos a fórmula do tetraedro, onde volume é obtido multiplicando a base pela altura e dividindo-a por três, a parte desagradável consistia em provar que dois

tetraedros de bases equivalentes e alturas relativas a essas bases iguais têm volumes iguais.

Eves (2004) afirma que a dificuldade inerente à questão manifestou-se em todas as abordagens da geometria sólida, desde os Elementos de Euclides. Com o segundo princípio de Cavalieri, porém, a dificuldade simplesmente desaparece.

É importante que o professor ao abordar o cálculo de volumes, demonstre as principais fórmulas, para que os alunos possam entendê-las e aplicá-las com mais segurança, percebendo sua importância para a vida acadêmica, como observa os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs+ (2002):

Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. [...]

Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.

Também devemos deixar claro para os alunos que o método mais eficiente de se obter o volume dos sólidos é a integração de funções elementares, mas poderíamos gerar uma dificuldade de natureza didática se fossemos aplicar tal método, visto que o cálculo integral não é visto na maioria das escolas no ensino médio.

4 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI PARA CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES:

Nesta parte da pesquisa foram analisados os livros didáticos do ensino médio dos autores, Dante (2016), Gelson Iezzi (2016), Souza (2013), dentre outros.

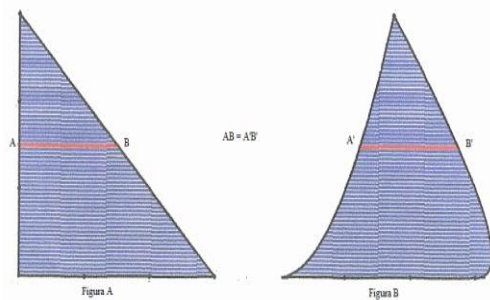
Também serviram de referencial o Caderno do Professor de Gelson Iezzi e os livros de história da matemática de Eves (2004) e Boyer (2004).

Dando prosseguimento apresentaremos o conceito do princípio de Cavalieri para o cálculo de áreas e volumes.

Segundo Eves (2004), os princípios de Cavalieri são assim enunciados:

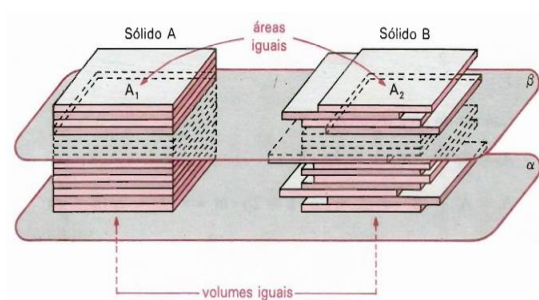
1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. (EVES, 2004, p. 426)

Figura 2: Teorema 1



Fonte: <http://slideplayer.com/slide/2455975>

Figura 3: Teorema 2



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar, p.164.

Como podemos observar, esse princípio reduz o cálculo de volumes ao de áreas, porém esses sólidos devem possuir mesma altura e devem ser considerados apoiados sobre o mesmo plano e em seguida devemos comparar as áreas das seções obtidas nos sólidos por planos paralelos aos planos de suas bases até sua altura. Se essa razão for constante, então a razão entre os volumes dos sólidos será essa mesma constante. Ou seja, se as áreas das seções correspondentes aos sólidos são iguais, os mesmos possuem volumes iguais.

Já Lima apresenta o princípio de Cavalieri para o cálculo de área e volume da seguinte forma:

1. Seja duas figuras planas A e B, de mesma altura. Pelo Princípio de Cavalieri, se seccionarmos essas figuras com uma linha paralela à base na mesma altura e nessas secções as linhas tiverem o mesmo comprimento, podemos afirmar que essas regiões planas possuem a mesma superfície, ou seja, a mesma área.
2. Sejam dois sólidos A e B, de mesma altura e seja um plano paralelo às bases que os secciona na mesma altura em relação à base, se as áreas dessas regiões seccionadas forem às mesmas em todo o sólido, então eles possuem o mesmo volume. (LIMA, 2002, p.256).

O princípio de Cavalieri afirma que devemos descobrir um plano paralelo a base, onde determinem nos dois sólidos secções de áreas iguais, então estes dois sólidos terão volumes iguais. Devemos ter em mente que não é qualquer plano que obedece ao princípio de Cavalieri e também não podemos afirmar que sólidos de volumes iguais têm que obedecer ao princípio de Cavalieri, ou seja, ele tem ida, mas não tem volta, se obedece ao princípio de Cavalieri podemos garantir que os sólidos possuem volumes iguais.

4.1 Resolução da situação problema: cálculo do volume da esfera.

O professor, durante a abordagem do cálculo do volume de sólidos geométricos, pode se deparar com situações em que o aluno procure saber como, se chegar às deduções de algumas fórmulas que podem ser difíceis de serem demonstradas. Como por exemplo, a dedução da fórmula da esfera. Diante disto mostraremos a sua dedução utilizando o Princípio de Cavalieri.

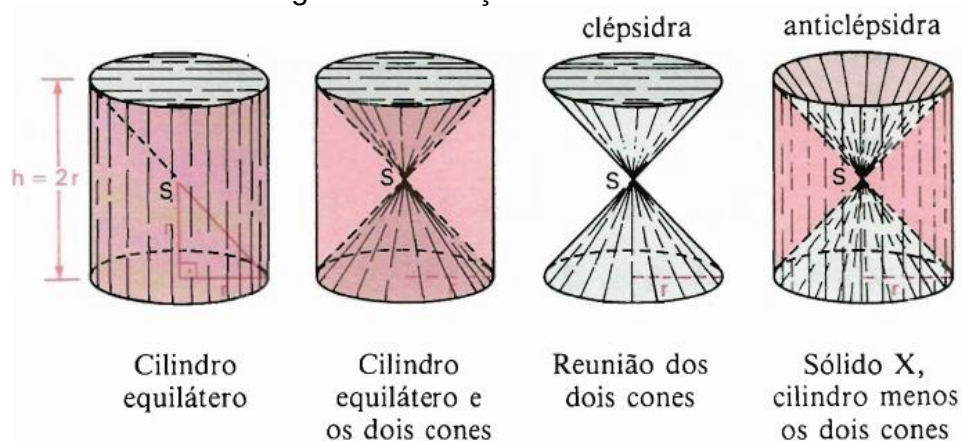
Primeiramente vamos definir uma esfera como sendo o conjunto de pontos que estão a uma distância menor ou igual ao seu raio.

Consideremos um cilindro equilátero de raio da base r e de altura $2r$, e seja S o ponto médio do eixo do cilindro.

Tomemos dois cones tendo como bases as do cilindro e S como vértice comum (sendo a reunião desses dois cones é um sólido chamado clepsidra).

Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones vamos chamar de sólido X (este sólido X é chamado de anticlépsidra).

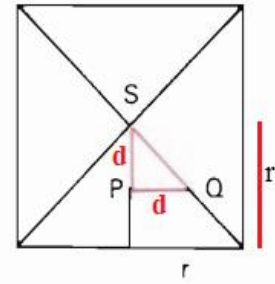
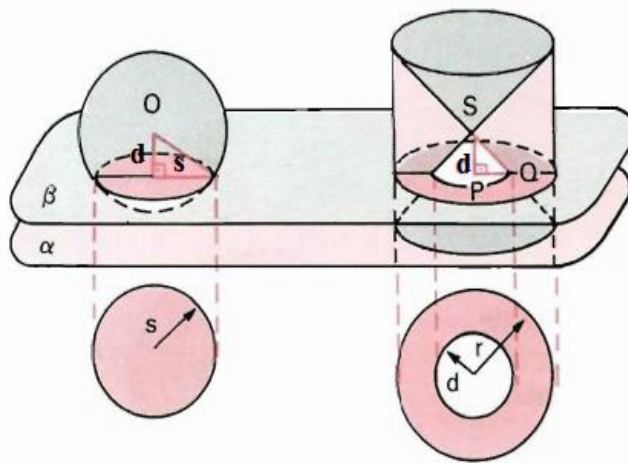
Figura 4: Dedução volume da esfera.



Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar, Gelson Iezzi, p.253.

Consideremos agora uma esfera de raio r e o sólido X descrito na imagem acima.

Figura 5: Dedução volume da esfera.



$\triangle SPQ$ é isósceles:
 $SP = d \Rightarrow PQ = d$.

Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar, Gelson Iezzi, p.253.

Suponhamos que a esfera seja tangente a um plano α , que o cilindro que originou o sólido X, tenha base em α e que os dois sólidos, esfera e sólido X, estejam num mesmo semi-espaco dos determinados por α .

Qualquer plano secante β , paralelo a α , distando d do centro da esfera, e do vértice do sólido X, também secciona o sólido X, temos:

A área da secção na esfera = $\pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$, no círculo.

A área da secção no sólido X = $\pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$, a coroa circular.

As áreas das secções na esfera e no sólido X são iguais; então, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido X têm volumes iguais.

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{sólido X}}$$

Mas:

$$V_{\text{sólido X}} = V_{\text{cilindro}} - 2 \cdot V_{\text{cone}} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot r \right) =$$

$$= \pi r^2 \cdot 2r - \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{Ou seja: } V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Logo concluímos que o volume da esfera é $\frac{4}{3} \pi r^3$.

Não podemos negar a importância das demonstrações no ensino de matemática e é importante que o professor procure fundamentar o que está ensinando de modo a dar subsídios aos alunos, pois é praticamente impossível lembrarmos todas as fórmulas matemáticas.

5 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI COM USO DO SOFTWARE COMPUTACIONAL GEOGEBRA

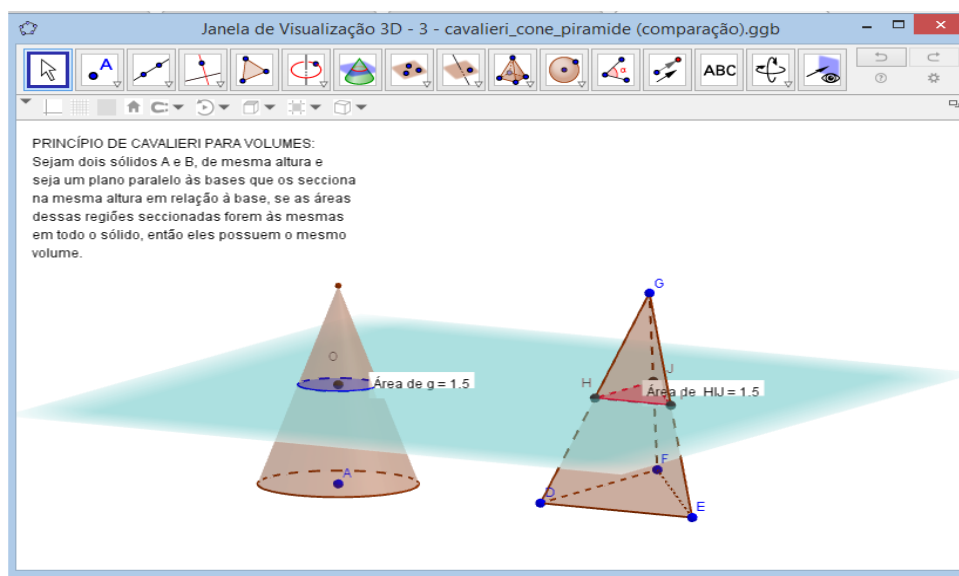
O GeoGebra é um software computacional com finalidades didáticas para ser utilizado em situações de ensino e aprendizagem de matemática. Com ele é possível realizar cálculos aritméticos, algébricos e utilizar múltiplas representações gráficas de objetos matemáticos.

A versão GeoGebra 5.0 conhecida como GeoGebra 3D, permite também a construção, visualização e exploração de objetos tridimensionais. Pode ser baixado do site oficial (www.geogebra.org) e instalado em computadores, tablets e celulares, há também uma versão online sem necessidade de instalação. Sendo esta versão a recomendada para se trabalhar conteúdos de geometria espacial.

O professor pode utiliza-lo em sala de aula, visando proporcionar estratégias para compreensão do cálculo de volumes dos sólidos geométricos utilizando o Princípio de Cavalieri e o software de geometria dinâmica GeoGebra, procurando facilitar o entendimento das fórmulas utilizadas para tais cálculos.

Como no exemplo abaixo, onde o Princípio de Cavalieri afirma que se dois sólidos que tiverem a mesma altura e, sempre que seccionados por um mesmo plano gerarem áreas iguais, terão o mesmo volume. Podemos afirmar então que o volume da pirâmide será igual ao volume do cone.

Figura 6: Princípio de Cavalieri no GeoGebra



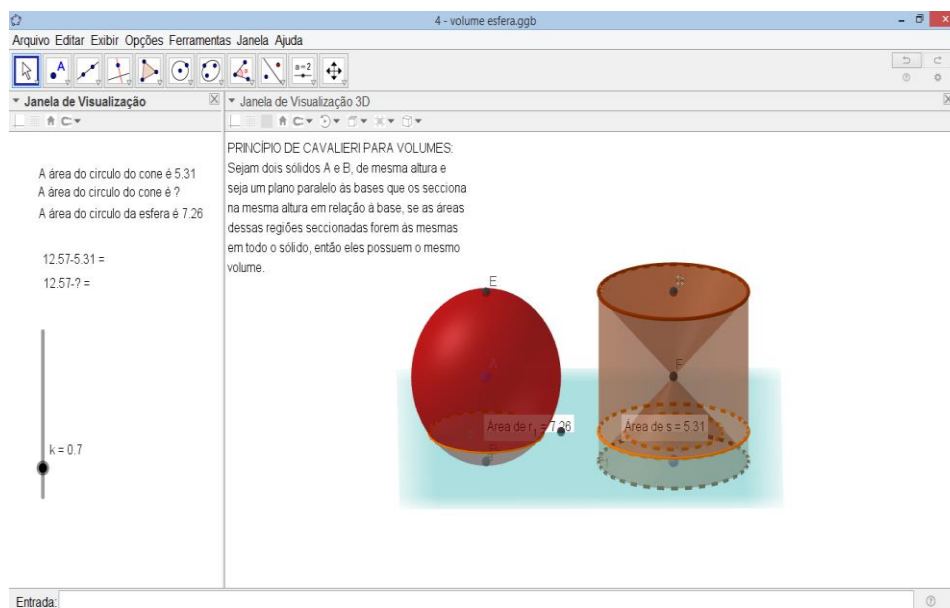
Fonte: Próprio autor

Sendo assim, a utilização de um software que permite trabalhar com essa perspectiva é de fundamental importância nas aulas de geometria espacial,

tornando-se um recurso pedagógico de muito valor, podendo levar a uma melhor compreensão e visualização dos sólidos geométricos, enriquecendo ainda mais o aprendizado.

Sendo útil até na resolução de problemas tidos como complexo como é o caso da dedução da fórmula do volume da esfera, como mostra a figura abaixo.

Figura 7: Dedução do volume da esfera no GeoGebra.



Fonte: Próprio autor

Nas escolas que possuem sala de informática ou projetor, esse material pode servir de apoio aos professores na abordagem do tema enriquecendo ainda mais suas aulas, pois como afirma Borba (1996):

Os computadores, além de afetarem profundamente a dinâmica da sala de aula, estão trazendo mudanças significativas para a Matemática, colocando em discussão o que deve ser ensinado e aprendido na Matemática. Com a presença de tecnologias, a aula de Matemática pode ser repensada, o conteúdo pode ser abordado de formas diferentes, e o aluno pode ter uma visão mais ampla de como aplicar um novo conhecimento que está aprendendo no momento. (BORBA, 1996, 123).

Como podemos observar as novas tecnologias têm um grande potencial didático e que estão trazendo mudanças significativas para o processo de ensino e aprendizagem, porém, para isso faz-se necessário os professores repensarem suas práticas pedagógicas, e procurarem diversificar suas aulas, de modo a tornarem as aulas mais atrativas, e as tecnologias podem proporcionar isso, desde que sejam bem planejadas, e a ferramenta computacional GeoGebra permite trabalhar vários conteúdos matemáticos, onde o aluno poderá criar situações e chegar a suas próprias conclusões.

6 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI E A ESTEREOLOGIA.

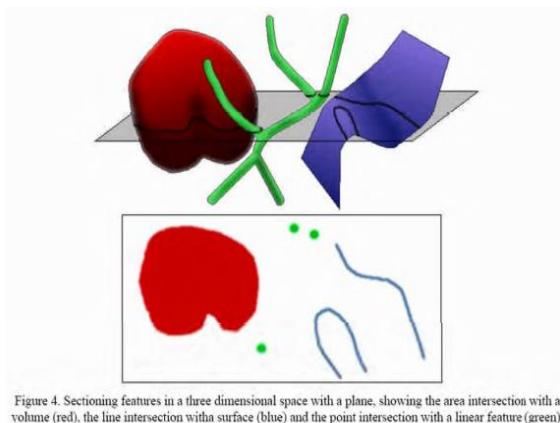
De modo a dar um significado prático ao Princípio de Cavalieri abordaremos neste tópico a estereologia ciência que possibilita medir células por meio de cálculos matemáticos, onde é possível gerar medidas de volume a partir de aferições relacionadas à área de uma determinada estrutura.

A estereologia é o estudo das partes sólidas em um corpo vivo, sendo um método em amplo desenvolvimento e que estuda estruturas em três dimensões a partir de imagens obtidas em duas dimensões, onde podemos obter estimativas precisas de parâmetros como volume, densidade, comprimento, número total de células em órgãos ou tecidos por exemplo. E o Princípio de Cavalieri constitui uma importante ferramenta matemática presente na estereologia, como afirma Brolezzi e Druck (2002):

O Princípio de Cavalieri é uma ferramenta matemática que possui diversas aplicações práticas. Uma delas é na estereologia. Usada nas pesquisas biomédicas, a estereologia consiste em um método estatístico para determinar propriedades morfológicas de estruturas tridimensionais, a partir de imagens bidimensionais ou de seções finas de sólidos, com base no Princípio de Cavalieri e na utilização de recursos computacionais. (BROLEZZI e DRUCK, 2002, p. 44).

A partir de imagens computadorizadas podemos fazer a análise de imagens de órgãos como pulmão, rim, encéfalo, pâncreas, intestino, entre outros. Sendo o Laboratório de Estereologia Estocástica e Anatomia Química (LSSCA), da USP, referência no Brasil e no exterior no uso e desenvolvimento da estereologia aplicada na quantificação de partículas de interesse médico e biológico.

Figura 8: Relação entre área e volume



Fonte: www.feis.unesp.br/ula8_cmm.pdf

Figura 9: Princípio de Cavalieri e a Estereologia

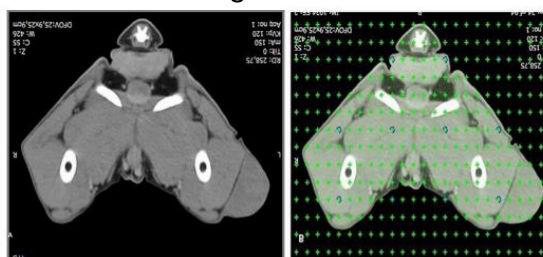


Fig.3. (A) Imagem de tomografia computadorizada, em corte transversal, janelamento para partes moles, de um cão apresentando mastocitoma grau II na face lateral do fêmur esquerdo. (B) A mesma imagem aplicada ao programa que estima o volume pelo Princípio de Cavalieri. O número de cruzes contidas na área da lesão foi contado em cada corte para o cálculo do volume global da lesão.

Fonte: www.scielo.br/scielo.php?script

Existem alunos que não se identificam com a matemática, mas que com a apropriação de conceitos matemáticos bem definidos, poderão utiliza-los em outras áreas do conhecimento, como é o caso do Princípio de Cavalieri que possui diversas aplicações práticas,

Brolezzi e Druck (2002) afirmam que a estereologia é utilizadas em pesquisas biomédicas para verificar alterações no organismo como, por exemplo, a estimação da diminuição da quantidade de neurônios em nosso cérebro, auxiliando no diagnóstico da doença de Alzheimer, e que também podem ser utilizadas em outras áreas do conhecimento, como na Geologia.

A estereologia também é utilizada na Geologia, para o estudo de cristais e rochas, através de cortes finos. A estereologia utiliza resultados da Geometria, da Estatísticas e recursos computacionais, e tem como metodologia central a ideia de tirar conclusões sobre objetos espaciais a partir da análise de suas secções planas, ideia essa presente no Princípio de Cavalieri. Essa ciência mostra que ideias matemáticas podem encontrar aplicações séculos depois de seu surgimento e podem contribuir para os avanços científico e tecnológico em diversas áreas do conhecimento. (BROLEZZI, DRUCK, 2002, p.44)

Como podemos observar o Princípio de Cavalieri constitui uma importante ferramenta com diversas aplicações práticas. Por isso é necessário que o professor a utilize como complementação no cálculo de volumes, onde os alunos terão mais segurança em sua aplicação, como também possam utilizar esse Princípio em outras áreas do conhecimento.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como podemos observar, ideias aparentemente simples podem ser extremamente poderosas na solução de diversos problemas, inclusive de problemas complicados. Por isso reforçamos a importância da utilização do princípio de Cavalieri na complementação da abordagem no cálculo de volumes vista no ensino médio.

Devemos verificar também a significância de se trabalhar com formas alternativas de ensino em sala de aula, o que pode tornar as aulas mais atrativas e desafiadoras, uma vez que, durante as fases do processo, poderão surgir questionamentos e discussões, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais efetivos.

Desse modo, após encerrarmos o que nos propomos neste trabalho, acreditamos mais ainda que a aplicação do Princípio de Cavalieri constitui-se ferramenta eficaz na dedução das principais fórmulas do cálculo de volume, vistas no ensino médio. Assim, esperamos que este estudo contribua de alguma forma para a ampliação da utilização dessa ferramenta tão poderosa e muitas vezes tão subutilizada neste nível de ensino.

Salientamos que a presente pesquisa não pode ser considerada pronta e nem se dar por encerrada, pois devemos constantemente nos questionar e refletir sobre a nossa prática como docente. Por fim, o próximo passo desta pesquisa será a sua aplicação em sala de aula, fazendo uso do Software GeoGebra, de modo a dar um significado prático e subsídios para que os alunos com a apropriação desses conhecimentos possam aplicá-los com mais segurança e/ou utilizá-los em outras áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo. SERRAZINA, Lurdes. OLIVEIRA, Isolina. A Matemática na educação básica. Lisboa, 1999.

AMAZONAS, Andréa Maria Mano. O Princípio de Cavalieri e Aplicações com o uso de Material Manipulável, PROFMAT – 2013. Retirado de <http://www.profmatsbm.org.br/dissertacoes>.

BOYER, C. B. História da matemática. Revista por Uta C. Merzbach; tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BORBA, M. C, Informática trará mudanças na educação Brasileira, Zetetiké, Campinas, CEMPEM, volume 4, 2006.

BROLEZZI, A. C.; DRUCK, Iole de Freitas. Áreas, semelhanças, volumes e o método da exaustão. In: Cristina Cerri. (Org.). matemática. São Paulo: Fundação Vanzolini, 2002.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações: ensino médio 3ª ed. São Paulo: Ática, 2016.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução de Hygino H Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

GELSON IEZZI. Matemática: ciência e aplicação: ensino médio, volume 2, 9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LIMA, Elon Lages [et al.]. A Matemática do Ensino Médio. Vol 2. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2002.

LIMA. et al. Temas e Problemas. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+ Ensino Médio.

OSVALDO DULCE – fundamentos da matemática elementar, volume 10, 2010.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo. Matemática e suas tecnologias. Coordenação Geral, Maria Inês Fini; Coordenação de Área, Nilson José Machado. São Paulo, 2010.

SOUZA, Joamir Roberto de. Novo olhar matemática: 2. Ed. São Paulo: FTD, 2013.

SOUZA, Patrícia Barreto Santos. O Software GeoGebra Atrelado ao Princípio de Cavalieri como Mediador no Estudo do Cálculo de Volume dos Sólidos Geométricos, PROFMAT – 2015. Retirado de <http://www.profmatt-sbm.org.br/dissertacoes>