



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS URUÇUÍ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

KÁSSIA DE SOUZA COELHO

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E O MODELO DE MALTHUS: UMA
TENTATIVA DE MELHORIA NAS PREDIÇÕES DE DINÂMICA POPULACIONAL**

**URUÇUÍ – PI
2020**

KÁSSIA DE SOUZA COELHO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E O MODELO DE MALTHUS: UMA
TENTATIVA DE MELHORIA NAS PREDIÇÕES DE DINÂMICA POPULACIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como exigência parcial para obtenção do
diploma do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí. Campus
Uruçuí.

Orientador: Prof. Me. César Marcos do
Nascimento Lucas
Coorientador: Prof. Me. Gabriel dos Santos
Pinto.

URUÇUÍ-PI
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Coelho, Kássia de Souza
C672e Equações diferenciais ordinárias e o modelo de Malthus : uma tentativa de
 melhoria nas predições de dinâmica populacional / Kássia de Souza Coelho. -
 2020.
 20 p. : il. color.
 Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto
 Federal do Piauí, Campus Uruçuí, 2020.
 Orientador : Prof. Me. César Marcos do Nascimento Lucas.
 Coorientador : Prof. Me. Gabriel dos Santos Pinto.
 1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Modelo de Malthus. 3. Dinâmica
 populacional. I. Título.

CDD - 510

Elaborado por Aldeide Costa dos Santos Sousa CRB 3/1423

KÁSSIA DE SOUZA COELHO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E O MODELO DE MALTHUS: UMA
TENTATIVA DE MELHORIA NAS PREDIÇÕES DE DINÂMICA POPULACIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como exigência parcial para obtenção do
diploma do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí. Campus
Uruçuí.

Aprovado em: 06/10/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. César Marcos do Nascimento Lucas
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Me. Gabriel dos Santos Pinto
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Me. Ernandes Guedes Moura
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E O MODELO DE MALTHUS: UMA TENTATIVA DE MELHORIA NAS PREDIÇÕES DE DINÂMICA POPULACIONAL

Kássia de Souza Coelho *

César Marcos do Nascimento Lucas**

RESUMO

Considerando a importância do modelo malthusiano no contexto da modelagem de populações e o erro que surge de sua aplicação quando se trata de populações humanas, pesquisa-se sobre a eficiência do modelo de Malthus a fim de investigar a possibilidade de uma combinação de P_0 e k na precisão do Modelo na dinâmica populacional de Uruçuí-PI para o ano de 2020 baseando na eficácia do modelo quando aplicados na dinâmica populacional de outras cidades do Sul do Piauí. Para tanto, realizamos uma descrição do Modelo de Malthus e uma aplicação deste na dinâmica populacional dos municípios de Bom Jesus, Canto do Buriti, São João, Corrente, Eliseu Martins, Bertolínia, Baixa Grande do Ribeiro e Marcos Parente, ambos pertencentes ao estado do Piauí. Considerando a eficácia apresentada pelo modelo, realizamos a aplicação do modelo na dinâmica populacional de Uruçuí. Presta-se, então, uma pesquisa bibliográfica sobre equações diferenciais e o modelo estudado bem como coleta dos dados populacionais requeridos. Diante disso, verifica-se que há uma distorção evidente entre os dados reais e preditos, nota-se uma redução no erro quando aplica-se à população inicial de 1991 e usando uma constante de proporcionalidade k_3 nas cidades de Bom Jesus, Canto do Buriti, São João, Corrente, Eliseu Martins, Bertolínia, Baixa Grande do Ribeiro e Marcos Parente, e que há uma aproximação significativa entre a predição e os dados reais da população de Uruçuí, o que impõe a constatação de que é possível, através do par $P(t_0) = 15661$ (população no ano de 1991) e k_3 (encontrada utilizando os censos de 1991 e 2010) aprimorar a descrição do crescimento populacional do supracitado município.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias. Modelo de Malthus. Dinâmica Populacional.

*Graduanda em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Piauí – Campus Uruçuí. E-mail: kkassia.coelho@hotmail.com.

**Docente Mestre do Curso Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Piauí – Campus Uruçuí. E-mail: cesar.lucas@ifpi.edu.br.

ABSTRACT

Considering the importance of the Malthusian model in the context of population modeling and the error that arises from its application when it comes to human populations, research is done on the efficiency of the Malthus model in order to investigate the possibility of a combination of P_0 and k in accuracy of the Model in the population dynamics of Uruçuí-PI for the year 2020 based on the effectiveness of the model when applied to the population dynamics of other cities in the South of Piauí. To this end, we performed a description of the Malthus Model and its application in the population dynamics of the municipalities of Bom Jesus, Canto do Buriti, São João, Corrente, Eliseu Martins, Bertolínia, Baixa Grande do Ribeiro and Marcos Parente, both belonging to the state of Piauí. Considering the effectiveness presented by the model, we applied the model to the population dynamics of Uruçuí. Then, a bibliographic research about differential equations and the studied model is provided, as well as the collection of the required population data. Given this, it appears that there is an evident distortion between the actual and predicted data, a reduction in error is noted when applied to the initial population of 1991 and using a constant proportionality k_3 in the cities of Bom Jesus, Canto do Buriti, São João, Corrente, Eliseu Martins, Bertolínia, Baixa Grande do Ribeiro and Marcos Parente, and that there is a significant approximation between the prediction and the real data of the population of Uruçuí, which imposes the observation that it is possible, through the pair $P(t_0) = 15661$ (population in the year 1991) and k_3 (found using the 1991 and 2010 censuses) to improve the description of population growth in the aforementioned municipality.

Keywords: Ordinary differential equations. Malthus model. Population Dynamics.

DATA DE SUBMISSÃO E APROVAÇÃO: 06/10/2020

IDENTIFICAÇÃO E DISPONIBILIDADE: TCC

1 INTRODUÇÃO

No curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), o modelo de Malthus (linear, dinâmico e determinístico) é apresentado como aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias lineares de Primeira Ordem. Tal modelo tem como ideia-base a hipótese de que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional à população total do país naquele instante (ZILL, 2016).

O modelo de Malthus é apresentado para modular o crescimento populacional. A ideia por trás do modelo malthusiano é que quanto mais pessoas houver em um instante t , mais pessoas existirão no futuro, isto é, um crescimento contínuo e exponencial e, ao longo do tempo, descontrolado. Em termos matemáticos, se $P(t)$ for a população no instante t , então essa hipótese pode ser expressa por

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &\propto P \text{ ou } \frac{dP}{dt} = kP \\ \frac{dP}{dt} &= kP \\ \frac{dP}{P} &= kdt \\ \int \frac{dP}{P} &= \int kdt \\ \ln |P| &= kt + C \\ e^{\ln |P|} &= e^{kt+C} \\ |P| &= e^{kt} e^C\end{aligned}$$

Considerando $e^C = C$, temos $|y| = Ce^{kt}$, e como y é positivo, podemos omitir as barras de valor absoluto, resultando assim

$$P(t) = Ce^{kt}$$

Como $P = P_0$ quando $t = 0$, obtemos $C = P_0$. Então, $P(t) = P_0 e^{kt}$. No entanto, apresenta pouca eficiência para modelar o crescimento de populações humanas em sua forma, pois, dependendo da utilização dos dados populacionais em t_0 e t_n podemos encontrar diferentes valores para a constante de proporcionalidade k , e consequentemente, as previsões também diferem.

Diante desta afirmação, surgiu o seguinte questionamento: qual a melhor combinação de P_0 e k no modelo malthusiano para estimar a população de Uruçuí-PI para 2020, baseando-se no P_0 e k encontrados na dinâmica populacional de cidades próximas a mesma?

Dessa forma, o presente trabalho teve por objetivo investigar, através de testes, a possibilidade de uma combinação de P_0 e k que estime com a máxima precisão a população que habita em Uruçuí-PI no ano de 2020, tendo como base de comprovação a eficácia de resultados encontrados em municípios vizinhos.

Com o intuito de atingir o objetivo geral realizamos uma descrição do Modelo de Malthus, que é uma equação diferencial ordinária; aplicamos o modelo de Malthus na dinâmica populacional dos municípios de Bom Jesus, Canto do Buriti, São João, Corrente, Eliseu Martins, Bertolândia, Baixa Grande do Ribeiro e Marcos Parente,

ambos pertencentes ao estado do Piauí, e verificamos sua eficácia e, por último, aplicamos o Modelo de Malthus da dinâmica populacional de Uruçuí considerando a eficácia apresentada pelo modelo.

Partiu-se da hipótese de que a observação do erro que surge da aplicação do modelo de Malthus na dinâmica populacional de algumas cidades do Sul do Piauí poderia contribuir para uma melhora na precisão do modelo ao ser aplicado na dinâmica populacional de Uruçuí, tendo em vista que o erro pode apresentar algum padrão possível de análise, pois estamos aplicando o modelo em populações que apresentam algumas características em comum, isto é, municípios do estado piauiense que compartilham do mesmo clima, porém, com divergências como maior ou menor migração por conta de melhores condições de sobrevivência.

Na construção deste trabalho foi essencial um estudo bibliográfico que agregasse um conhecimento mais aprofundado sobre os conceitos, definições e teoremas, para tanto utilizamos como fonte as publicações de Louis Leithold (1994); Bronson & Costa (2008), Bassanezi (2002), Stewart (2013), e Zill (2014). Para pesquisa das populações nos censos de 1991, 2000, 2010 e 2020 utilizamos as informações fornecidas nos sites do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) (BRASIL, 2020), e no Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil (BRASIL, 2020).

Este trabalho apresenta no tópico 2 o referencial teórico sobre Equações Diferenciais, o modelo de Malthus e as dificuldades na prática; no tópico 3 apresenta o Modelo de Malthus aplicado na dinâmica populacional de Bom Jesus, Canto do Buriti, São João, Corrente, Eliseu Martins, Bertolândia, Baixa Grande do Ribeiro e Marcos Parente; no tópico 4, o modelo de Malthus aplicado na dinâmica populacional de Uruçuí, e no tópico 5 as considerações finais.

Diante do que nos propomos a resolver, foi possível, através de uma análise quantitativa das populações estudadas, encontrar uma combinação de P_0 e k que aprimorasse os resultados de previsão, aproximando-os dos reais, encontrados em cada cidade estudada. Consequentemente, foi possível estabelecer cálculos que regredissem em até 6,19% o erro relativo encontrado quando a técnica é aplicada para a predição da população de Uruçuí para 2020.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Equações Diferenciais

Uma equação contendo derivadas é chamada de equação diferencial. Alguns exemplos simples de equações diferenciais são

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{3y^3} \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 3 \quad (3)$$

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. Logo, (1) e (2) são equações de primeira ordem e (3) é de segunda ordem. O tipo mais simples de equação diferencial é a equação de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Da qual (1) é um exemplo. Escrevendo-a com diferenciais, temos:

$$dy = f(x)dx \quad (4)$$

Outro tipo de equação diferencial de primeira ordem é da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

A equação (2) é um exemplo desse tipo. Se essa equação for escrita com diferenciais, temos

$$h(y)dy = g(x)dx \quad (5)$$

em ambos (4) e (5), o primeiro membro envolve somente a variável, enquanto que o segundo membro, somente a variável x . Assim, as variáveis estão separadas e dizemos que elas são equações diferenciais com variáveis separáveis. Considere a equação (4), que é

$$dy = f(x)dx \quad (4)$$

Para resolver essa equação, precisamos encontrar todas as funções G para as quais $y = G(x)$, tais que a equação esteja satisfeita. Assim, se F for uma antiderivada de f , todas as funções G serão definidas por $G(x) = F(x) + C$, em que C é uma constante arbitrária. Isto é, se

$$\begin{aligned} d(G(x)) &= d(F(x) + C) \\ &= f(x)dx \end{aligned}$$

então, o que chamamos de solução completa de (4) é dada por

$$y = F(x) + C$$

Essa equação representa uma família de funções dependendo de uma constante arbitrária C , sendo chamadas de **família dependente de um parâmetro**.

Exemplo: Queremos encontrar uma solução completa da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (6)$$

Separamos as variáveis, escrevendo a equação com diferenciais como

$$dy = 2x dx$$

Antidiferenciamos ambos os lados da equação e obtemos

$$\int dy = \int 2x dx$$

$$y + c_1 = x^2 + c_2$$

Como $c_2 - c_1$ é uma constante arbitrária se c_1 e c_2 forem arbitrárias, podemos substituir $c_2 - c_1$ por C , e obtendo então

$$y = x^2 + C$$

que é a solução completa da equação diferencial (6).

2.2 Modelo de Malthus

Modelos matemáticos envolvendo potências de e ocorrem em muitos campos, tais como Química, Física, Biologia, Psicologia, Sociologia, Administração e Economia. Mas o foco do nosso trabalho é o modelo que envolve as leis de crescimento e decaimento, porém, nosso foco será na primeira. Essas leis surgem quando a taxa de variação de uma quantidade em relação ao tempo é proporcional à quantidade existente num dado momento. Por exemplo, é possível que a taxa de crescimento da população de uma comunidade seja proporcional à população existente num dado instante. Em Biologia, sob certas circunstâncias, a taxa de crescimento de uma cultura de bactérias é proporcional à quantidade de bactérias presentes em qualquer instante dado. Na Administração ocorre quando os juros são compostos continuamente.

Em tais casos, se o tempo for representado por t unidades e se y unidades representar o total da quantidade presente em qualquer instante, então

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Em que k é uma constante e $y > 0$ para todo $t \geq 0$. Se y cresce com o aumento de t , então $k > 0$ e temos a lei de crescimento natural. Se y decresce quando t

aumenta então $k < 0$ e temos a lei de decaimento natural.

Se por definição y for um intervalo positivo (por exemplo, se y for a população de certa comunidade), vamos supor que y possa ser um número real qualquer para que y seja uma função contínua de t .

Umas das primeiras tentativas de modelagem do crescimento populacional humano por meio da matemática foi feita pelo economista inglês Thomas Malthus, em 1798. Esse modelo simples, embora não leve em conta muitos fatores que podem influenciar a população humana tanto em seu crescimento quanto em seu declínio (imigração e emigração, por exemplo), não obstante mostrou-se razoavelmente preciso na previsão da população dos Estados Unidos entre os anos de 1790 e 1860. As populações que crescem à taxa descrita são raras; entretanto, é ainda usada para modelar o crescimento de pequenas populações em um curto intervalo de tempo.

O modelo não leva em conta a mortalidade; a taxa de crescimento é igual à taxa de natalidade. Considera-se que a população depende somente de si própria para crescer, ou seja, desconsidera fatores bióticos (todos os efeitos causados pelos organismos em um ecossistema, que condicionam as populações responsáveis por sua formação) ou abióticos (todas as influências que os seres vivos possam receber em um ecossistema, derivadas de aspectos físicos, químicos ou físico-químicos do meio ambiente, tais como a luz, a temperatura etc.).

Basicamente, a ideia por trás do modelo malthusiano é a hipótese de que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional à população total do país naquele instante. Em outras palavras, quanto mais pessoas houver em um instante t , mais pessoas existirão no futuro. Em termos matemáticos, se $P(t)$ for a população no instante t , então essa hipótese pode ser expressa por

$$\frac{dP}{dt} \propto P \text{ ou } \frac{dP}{dt} = kP \quad (1)$$

Assim, a população no decorrer do tempo é dada por:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Separando as variáveis, obtemos

$$\frac{dP}{P} = kdt$$

Integrando, teremos

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt$$

$$\ln |P| = kt + C$$

$$e^{\ln|P|} = e^{kt+C}$$

$$|P| = e^{kt}e^C$$

Tomando $e^C = C$ temos $|P| = Ce^{kt}$, e como P é positivo, podemos omitir as barras de valor absoluto, resultando assim

$$y = Ce^{kt}$$

Como $y = P_0$ quando $t = 0$, obtemos $C = P_0$. Então,

$$P(t) = P_0e^{kt}$$

2.3 Dificuldades na prática

A busca por modelos que descrevam o crescimento e o decaimento populacional é o mais antigo ramo da ecologia matemática (Ceconello, 2006). Nesse percurso, tais modelos sofrem alterações que mudam completamente a forma contribuindo assim com o aprimoramento de resultados.

As mudanças desses modelos dinâmicos populacional, desenvolvidas ao decorrer da história, deve-se em parte às equações diferenciais. O primeiro grande avanço na modelagem de populações foi de Thomas Robert Malthus (1766 - 1834) publicou anonimamente no livro “An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society”, um artigo sobre o estudo do crescimento populacional humano que atualmente é conhecido como primeira proposta de utilização da matemática na tentativa de avaliar a dinâmica populacional (Cecconello, 2006, p. 6), e também foi a primeira teoria populacional a relacionar o crescimento da população com a fome, afirmando a tendência do crescimento populacional em progressão geométrica, e do crescimento da oferta de alimentos em progressão aritmética. (Alitolef, 2011, p. 24). Tal modelo serviu como ponta pé inicial para outros pesquisadores afirma Teixeira (2012, p. 19), ainda Magalhães (2013, p. 351) ressalta, que o modelo não é confiável quando prever crescimento populacional humano dado um prazo consideravelmente longo, haja vista que serviu de base para muitos outros.

Malthus fez a proposição de que as pessoas deveriam ter filhos apenas quando estas tivessem terras cultiváveis para sustentá-los. E segundo no mundo de hoje suas teorias não se concretizaram, a população não dobra a cada 50 anos, e a produção de alimentos é mais que suficiente para alimentar essa população. Thomas afirma, o que leva as pessoas passarem fome é má distribuição de recursos, não é a falta de

terras, pois hoje tem alimentos mais que suficiente em tempo suficientemente rápido em pequeno espaço de terra (Thomas, 2013).

Para a revisão do modelo de Malthus foi usado como material de apoio o trabalho de Cecconello (2006). Embora Malthus não tenha formulado matematicamente, o atualmente conhecido como modelo de Malthus, em termo de equações diferenciais, é dado por

$$\frac{dP}{dt} \propto P \text{ ou } \frac{dP}{dt} = kP \quad (1)$$

onde $P = P(t)$, população no instante t em anos. E a taxa de crescimento ou decrescimento é dada por $(\alpha - \beta) = k$, onde α é taxa de natalidade e β é taxa de mortalidade. Integrando, temos

$$\ln |P| = kt + C$$

como população $p \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e considerando população inicial ($P(0) = P_0$) é $P_0 \neq 0$, então a solução do problema de valor inicial é $P(t) = P_0 e^{kt}$. No modelo de Malthus contínuo, assumiremos que o tempo é uma variável contínua, isto é, $t \geq 0$. Admitimos que as taxas de natalidade α e mortalidade β sejam constantes, que a proporção de indivíduos reprodutores é constante durante o crescimento da população e que essa população viva em condições ideais, ou seja, não há fatores limitantes (a população cresce sem que haja interação com outras espécies, os recursos são ilimitados, e há sempre espaço físico). Note que a constante $k > 0$ crescimento exponencial e $k < 0$ declínio exponencial da população.

É importante observar que neste modelo contínuo, assim como no discreto:

1) Se a taxa de natalidade é maior que taxa de mortalidade, temos: $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \infty$;

2) Se a taxa de mortalidade é maior que taxa de natalidade, temos: $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$;

3) Se a taxa de natalidade e mortalidade iguais, temos: $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P_0$.

Se $k = \alpha - \beta > 0$, a natalidade é maior que mortalidade, população cresce;

Se $k = \alpha - \beta = 0$, temos que a população não altera, se mantém;

Se $k = \alpha - \beta < 0$, a mortalidade é maior que a natalidade, a população decresce.

Há também outro fator que desqualifica o modelo, pois ao tentarmos aplicar o modelo de Malthus ($P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$) em uma população real, precisamos encontrar um k (constante de proporcionalidade), e usamos uma população para ser P_0 (população

inicial). No entanto, por conta da quantidade de dados, podemos adquirir diferentes valores para k , e usarmos diferentes populações iniciais, gerando, assim, distorções variadas nos resultados finais, sendo assim, desejamos nesse estudo investigar a aplicação do modelo de crescimento natural com diferentes utilizações de k e P_0 em diferentes municípios do sul piauiense, com a finalidade de verificarmos se há alguma dessas combinações que apresentam uma taxa de erro aceitável e, assim, servir como sugestão para aplicações futuras.

3 MODELO DE MALTHUS APLICADO NA DINÂMICA POPULACIONAL DE BOM JESUS, CANTO DO BURITI, SÃO JOÃO, CORRENTE, ELISEU MARTINS, BERTOLÍNIA, BAIXA GRANDE DO RIBEIRO E MARCOS PARENTE

Com intuito de compreender melhor a precisão do modelo de Malthus aplicaremos este modelo na dinâmica populacional para analisar a sua eficácia, assim, aplicamos este modelo na dinâmica populacional dos municípios de Bom Jesus, Canto do Buriti, São João, Corrente, Eliseu Martins, Bertolândia, Baixa Grande do Ribeiro e Marcos Parente.

Faremos os cálculos tendo por base os dados da população de Bom Jesus. Para o cálculo consideraremos que $t_0 = 13912$ e $t_9 = 15924$ estes dados referem-se respectivamente aos anos de 1991 e 2000. Utilizando a equação do modelo de Malthus, encontraremos o valor de k , que é a constante de proporcionalidade.

$$P(t) = P(0) \cdot e^{k \cdot t}$$

$$P(9) = 13912e^{k \cdot 9} \quad (2)$$

$$15.924 = 13912e^{9 \cdot k}$$

$$e^{9k} = \frac{15924}{13912}$$

$$e^{9k} = 1,1446233468$$

$$\ln|e^{9k}| = \ln |1,1446233468|$$

$$9k = 0,1350756281$$

$$k = 0,0150084031$$

Logo,

$$P(t) = 13912e^{0,0150084031t}$$

Assim, teremos

$$P(9) = 13912e^{0,0150084031.9} = 15924,$$

$$P(19) = 13912e^{0,0150084031.19} = 18503,$$

$$P(29) = 13912e^{0,0150084031.29} = 21499.$$

Os dados foram coletados no site do IBGE e site do Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil e com base em ambos, foi possível encontrar a função exponencial que prediz a população em qualquer instante t . É importante explicitar que os dados referentes ao ano de 2020 do IBGE são apenas estimativas, pois devido à pandemia do novo Corona vírus os censos foram postergados.

No quadro 1, apresentamos a população de Bom Jesus utilizando o modelo malthusiano considerando P_0 em 1991, 2000 e 2010. Em cada escolha por P_0 adquirimos uma constante k . Para $k_1 = 1991/2000$, para $k_2 = 2000/2010$, para $k_3 = 1991/2010$, para $k_4 = (1991/2000 + 2000/2010)/2$, isto é, a média aritmética de k_1 e k_2 ; $k_5 = (1991/2000 + 1991/2010)/2$, isto é, a média aritmética de k_1 e k_3 , e $k_6 = (2000/2010 + 1991/2010)/2$, isto é, a média aritmética de k_2 e k_3 . Em seguida, cada uma das predições é feita considerando diferentes populações iniciais ($P(t_0)$) e utilizando as variadas constantes encontradas, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 e k_6 . Assim, pudemos notar que ao utilizarmos a população inicial de 1991 e a constante k_5 , obtemos um erro relativo de 1,25 % em relação a população estimada para 2020.

Quadro 1 - Dados populacionais de Bom Jesus

	Valor de K	P:	P: 1991	P: 2000	P: 2010	P: 2020	Taxa de Erro	M. da Taxa	Soma das Taxas
CIDADE									
Bom Jesus			13912	15924	22629	25387			
K1	0,015008	Po: 1991			18227	21499	15,32%	15,32%	
K2	0,03514	Po: 1991				38545	-51,83%	51,83%	
K3	0,025604	Po: 1991				29232	-15,15%	15,15%	
K4	0,025074	Po: 1991				28787	-13,39%	13,39%	
K5	0,020306	Po: 1991				25069	1,25%	1,25%	
K6	0,030372	Po: 1991				33567	-32,22%	32,22%	129,16%
K1	0,015008	Po: 2000				24608	3,07%	3,07%	
K2	0,03514	Po: 2000				44119	-73,79%	73,79%	
K3	0,025604	Po: 2000				33460	-31,80%	31,80%	
K4	0,025074	Po: 2000				32950	-29,79%	29,79%	
K5	0,020306	Po: 2000				28695	-13,03%	13,03%	
K6	0,030372	Po: 2000				38422	-51,34%	51,34%	202,82%
K1	0,015008	Po: 2010				30551	-20,34%	20,34%	
K2	0,03514	Po: 2010				45697	-80,00%	80,00%	
K3	0,025604	Po: 2010				37763	-48,75%	48,75%	
K4	0,025074	Po: 2010				37365	-47,18%	47,18%	
K5	0,020306	Po: 2010				33966	-33,79%	33,79%	
K6	0,030372	Po: 2010				41541	-63,63%	63,63%	293,70%

Fonte: Autores 2020.

A seguir mostramos os dados populacionais de Bom Jesus, Canto do Buriti, São João, Corrente, Eliseu Martins, Bertolândia, Baixa Grande do Ribeiro e Marcos Parente, utilizando os mesmos mecanismos usados nos dados do quadro anterior. Como é possível notar, usando a população inicial (P_0) como sendo a de 1991 e k_3 nos oito municípios analisados, é notório que os erros relativos são pequenos comparados aos demais. Calculamos também o desvio padrão (indica o quanto um conjunto de dados é uniforme. Quanto mais próximo de 0 for o desvio padrão, mais homogêneo são os dados) que é igual a 0,074 e média aritmética dos erros relativos que é igual a 8,07%. É possível verificar também que em $P_0 = 1991$ e k_4 o desvio padrão e a média aritmética são bem próximos do outro conjunto de dados, respectivamente, 0,074 e 8,21%, tornando-se também uma alternativa de uso. O que queremos mostrar com estes resultados é que a soma dos erros relativos dos 8 municípios (destacada em laranja e cinza) é 23,62% e 22,5% menor que a soma dos erros relativos da segunda melhor predição, ou seja, 64,53% e 65,65% comparados 88,15%.

Quadro 2 - Dados populacionais de Bom Jesus, Canto do Buriti, São João, Corrente, Eliseu Martins, Bertolândia, Baixa Grande do Ribeiro e Marcos Parente

		Erro relativo								Total	Desvio Padrão	Media
		Bom. Jes	Canto.B	São. J	Corrente	Mar. Pare	Bertoli	Eliseu	Baixa.Gra			
K1	Po: 1991	15,32%	10,79%	33,34%	23,17%	12,30%	14,24%	19,77%	16,44%	145,36%	0,073	18,17%
K2	Po: 1991	51,83%	16,91%	2,62%	3,55%	9,51%	7,78%	19,17%	24,30%	135,67%	0,160	16,96%
K3	Po: 1991	15,15%	2,85%	13,01%	8,30%	0,24%	3,28%	1,19%	20,51%	64,53%	0,074	8,07%
K4	Po: 1991	13,39%	2,12%	13,95%	9,00%	0,81%	3,86%	2,22%	20,31%	65,65%	0,071	8,21%
K5	Po: 1991	1,25%	4,21%	22,75%	15,50%	6,10%	8,93%	10,96%	18,46%	88,15%	0,074	11,02%
K6	Po: 1991	32,22%	9,66%	4,90%	2,20%	4,76%	2,10%	8,51%	22,39%	86,75%	0,108	10,84%
K1	Po: 2000	3,07%	7,60%	64,71%	44,06%	18,72%	17,28%	21,80%	49,66%	226,90%	0,219	28,36%
K2	Po: 2000	73,79%	21,09%	20,29%	12,81%	4,34%	3,96%	16,15%	59,77%	212,20%	0,259	26,52%
K3	Po: 2000	31,80%	6,53%	39,60%	26,67%	5,96%	6,71%	3,70%	54,90%	175,87%	0,192	21,98%
K4	Po: 2000	29,79%	5,78%	40,76%	27,48%	6,57%	7,27%	4,70%	54,64%	176,98%	0,190	22,12%
K5	Po: 2000	13,03%	0,78%	51,63%	35,08%	12,16%	12,15%	13,22%	52,26%	190,32%	0,198	23,79%
K6	Po: 2000	51,34%	13,58%	29,58%	19,54%	0,68%	1,52%	5,76%	57,32%	179,32%	0,220	22,42%
K1	Po: 2010	20,34%	1,83%	51,30%	34,74%	10,88%	10,86%	10,63%	57,41%	197,98%	0,207	24,75%
K2	Po: 2010	80,00%	22,70%	21,82%	13,83%	4,46%	4,36%	17,41%	64,66%	229,25%	0,281	28,66%
K3	Po: 2010	48,75%	12,33%	34,99%	23,30%	2,52%	3,15%	3,17%	61,18%	189,39%	0,226	23,67%
K4	Po: 2010	47,18%	11,78%	35,76%	23,84%	2,93%	3,55%	2,44%	60,99%	188,47%	0,224	23,56%
K5	Po: 2010	33,79%	6,95%	42,91%	28,89%	6,62%	7,08%	3,97%	59,28%	189,51%	0,207	23,69%
K6	Po: 2010	63,63%	17,40%	28,24%	18,47%	1,03%	0,54%	10,06%	62,91%	202,28%	0,252	25,29%

Fonte: Autores 2020.

Diante dos resultados expostos, foi possível encontrar uma combinação de P_0 e k que tornassem mais precisos os resultados encontrados, tornando a utilização do modelo malthusiano mais concreto e conciso, isto é, uma combinação de $P_0 = 1991$ e k_3 que é encontrada utilizando os censos de 1991 e 2010. Embora no quadro 1 os resultados apontem para a eficácia de $P_0 = 1991$ e k_5 (a média aritmética de k_1 e k_3),

levamos em consideração a combinação que apresentasse maior eficiência nos 8 municípios para assim utilizá-lo para a predição da população de Uruçuí-PI para 2020.

4 MODELO DE MALTHUS APLICADO NA DINÂMICA POPULACIONAL DE URUÇUÍ

No tópico anterior, pudemos notar que os erros relativos entre os dados reais e os dados previstos utilizando o modelo malthusiano apresentam grandes distorções, assim como visto em uma das predições (Bom Jesus), o erro relativo chega aos 80%.

Baseando-nos nos dados encontrados e comparados, e vendo a eficácia comprovada do modelo quando a população inicial é a de 1991 e a constante k_4 é a taxa de crescimento populacional, sugerimos aqui uma tentativa de como obter uma estimativa ao máximo fiel para o cálculo populacional utilizando o modelo de crescimento natural para a população de Uruçuí-PI para o ano de 2020.

Realizando os cálculos, $k_3 = 0,0132621638887016$ e considerando $P(t_0) = 15661$ (população de 1991), a função exponencial que descreve a população através do modelo ajustado é $P(t) = 15661e^{0,0132621638887016.t}$. É possível notar que o erro relativo para a quantificação da população para 2020 é de apenas 6,19%.

Quadro 3 - Dados populacionais de Uruçuí-PI

	1991	2000	2010	2020
Dados do IBGE	15661	17011	20149	21665
Resultados com Modelo de Malthus usando $P(t_0)$ e k_3	****	17646	****	23006
Erro relativo	****	3,73%		6,19%

Fonte: Autores 2020.

Assim, é nítido que o método utilizado nos demais municípios piauienses e notada a precisão nas quantidades, também descreve com eficácia a dinâmica de crescimento de Uruçuí-PI para o ano de 2020. Isto nos leva a dizer que foi possível obter, através de testes com populações iniciais e constantes de crescimento variadas encontrar uma combinação de P_0 e k que melhora a descrição da população requerida.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho empenhou-se em verificar a possibilidade de uma combinação de P_0 e k que melhorasse os resultados da predição por meio do modelo de Malthus da

população de Uruçuí-PI no censo de 2020 e o estudo das equações diferenciais juntamente com a modelagem foram as bases para a realização deste trabalho.

Conforme nos propomos, o objetivo geral do trabalho foi atendido, pois a partir de investigações foi possível adquirir uma combinação que aprimorasse a precisão do modelo de Malthus na dinâmica populacional de Uruçuí-PI baseando-se na eficácia do modelo quando aplicado na dinâmica populacional de outras cidades do Sul do Piauí.

Assim, realizamos uma descrição do Modelo de Malthus, que é uma equação diferencial ordinária; aplicamos o modelo de Malthus real na dinâmica populacional das cidades de Bom Jesus, Canto do Buriti, São João, Corrente, Eliseu Martins, Bertolínia, Baixa Grande do Ribeiro e Marcos Parente, e verificamos sua eficácia, considerando suas limitações e, por último, aplicamos o Modelo de Malthus da dinâmica populacional de Uruçuí considerando a eficácia apresentada pelo método mais preciso.

A hipótese levantada foi que a partir das observações dos resultados encontrados nas predições das cidades vizinhas de Uruçuí pudéssemos encontrar algum padrão no erro (variação entre real e predito). Encontrados valores populacionais diferentes quando testadas usando os censos de 1991 e 2000, 1991 e 2010, e 2000 e 2010 para descrever o crescimento populacional de 8 municípios piauienses, convencionamos encontrar k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , k_5 e k_6 , em que k_4 , k_5 e k_6 são as médias aritméticas de k_1 e k_2 , k_1 e k_3 , e k_2 e k_3 respectivamente. Após diversos testes com populações iniciais como 1991, 2000 e 2010, notou-se que utilizando $P(t_0)$ como 1991 e k_3 (1991/2010) os resultados se mostraram bastante eficientes, apresentando erros relativos relativamente pequenos. Assim, recorreremos ao método para prever a população de Uruçuí-PI para o ano de 2020.

Para a realização deste trabalho foi necessária uma vasta pesquisa bibliográfica sobre as equações diferenciais ordinárias e sua relação com o modelo malthusiano. Foi de suma importância coletar dados genuínos e seguros sobre as populações das cidades analisadas, logo, recorreremos ao site do IBGE e ao Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil para a obtenção de tais informações. Acreditamos que a utilização da análise quantitativa do *Excel* foi uma ferramenta que nos deu uma melhor visão do trabalho, pois através da organização fornecida pelo software foi possível ver conversão dos resultados para um mesmo caminho.

No início do trabalho, a maior dificuldade foi a de ter acesso aos dados

populacionais das cidades analisadas, visto que há uma gama muito grandes informações na *web*. Em seguida, tentar explicar por que nossa estratégia de melhoria deu certo, foi o nosso desafio, o que foi sanado através da análise no *Excel*.

Para próximos estudos, cremos que a disposição de dados de mais censos populacionais seja um caminho para aprimorar ainda mais os resultados, pois com uma maior quantidade de amostras o leque de comparações se expande, o que enriquece muito a pesquisa.

REFERÊNCIAS

ALITOLEF, Sérgio dos Santos, **Algumas Aplicações das equações diferenciais**, TCC, UNIR, Ji-Paraná, 2011.

BASSANEZI, R. C. (2002). **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo, Contexto.

BRASIL. PROGRAMA DAS NAÇÕES UNIDAS PARA O DESENVOLVIMENTO. . **Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil**. Disponível em: http://atlasbrasil.org.br/2013/pt/perfil_m/urucui_pi. Acesso em: 02 set. 2020.

BRASIL. PROGRAMA DAS NAÇÕES UNIDAS PARA O DESENVOLVIMENTO. . **Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil**. Disponível em: http://atlasbrasil.org.br/2013/pt/perfil_m/teresina_pi. Acesso em: 02 set. 2020.

BRASIL. INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. . **Uruçuí**. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pi/urucui/panorama>. Acesso em: 02 set. 2020.

BRASIL. INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. . **Uruçuí**. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pi/teresina/panorama>. Acesso em: 02 set. 2020.

BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel. **Equações diferenciais**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008. Tradução de: Fernando Henrique Silveira. Coleção Schaum.

CECCONELLO, Moiseis dos Santos. et al. **Modelagem alternativa para dinâmica populacional**: Sistemas dinâmicos fuzzy, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 2006.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Harbra Ltda., 1994. Tradução de: Cyro de Carvalho Patarra. Revisão técnica de: Wilson Castro Ferreira; Jr. Silvio Pregnotatto.

MAGALHÃES, Maycon Luiz A.; LEITE, Neila M. Gualberto. Equações Diferenciais Aplicada Dinâmica Populacional, In: **Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional**, CMAC Nordeste, IFNMG-Campus Januária. 2012.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. E22 Translate.

TEIXEIRA, Fernanda Luiz. **Modelos descritos por equações diferenciais ordinárias**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

ZILL, Dennis G.. **Equações diferenciais**: com aplicações em modelagem. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. Tradução de: Heitor Honda Federico.