



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS CORRENTE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

PAULO RICARDO DE SOUZA NOGUEIRA

**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA PROPOSTA DE
ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO**

**CORRENTE, PIAUÍ
2025**

PAULO RICARDO DE SOUZA NOGUEIRA

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM
NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para
obtenção do diploma do Curso de Licenciatura
em Matemática do Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí,
Campus Corrente.

Orientador: Prof. Me. Carlos Eduardo
Soares de Maria

CORRENTE, PIAUÍ
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Nogueira, Paulo Ricardo de Souza

N778c Cálculo Diferencial e Integral : uma proposta de abordagem no ensino médio / Paulo Ricardo de Souza Nogueira. - 2025.
47 p.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Corrente, 2025.

Orientador : Prof Me. Carlos Eduardo Soares de Maria.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Cálculo Diferencial . 3. Geogebra. 4. BNCC. I. Título.

CDD - 510

Elaborado por Tefischer Huanderson Soares e Sousa CRB 3/1251

Dedico este trabalho a todos que acreditaram que ele sairia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família. Não por entender os teoremas ou as ideias de ensinar cálculo no ensino médio, mas por aguentar as variações de humor, os surtos ocasionais e, principalmente, pela paciência diante do sono cronicamente ausente. Vocês viram o café virar refeição principal e presenciaram debates acalorados com o *Latex* às 3 horas da manhã. Vocês ouviram meus desabafos (uns sobre limites, outros sobre a vida), fizeram café quando eu mal sabia onde tava, e não desistiram de mim quando até eu já tava quase desistindo. Valeu por não me cobrar prazos, mesmo quando o calendário acadêmico gritava. Por fingirem que sabiam o que era GeoGebra. E por dizerem “só falta esse trabalho, né?” como se isso fosse pouco. Aos demais envolvidos... bom, vocês sabem quem são. Ou não. Mas tudo bem, saiu.

"Toda aquela ambição de aprender matemática avançada começa a desaparecer à medida que tomamos consciência da nossa própria imbecilidade."

Autor

RESUMO

O Cálculo Diferencial e Integral figura entre os pilares fundamentais da Matemática Pura e Aplicada. No entanto, no contexto brasileiro, essa disciplina costuma ser apresentada apenas no ensino superior, o que contribui para que grande parte da população desconheça seus conceitos essenciais. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os livros didáticos do ensino médio priorizam uma abordagem pautada em linguagem técnica e na memorização de fórmulas, deixando de lado conteúdos fundamentais como a Geometria e negligenciando, quase por completo, o Cálculo. Soma-se a isso a prática recorrente entre professores de alinhar seus conteúdos às exigências de vestibulares e do ENEM, o que resulta na omissão de tópicos relevantes, como matrizes. Este trabalho defende que, superados os entraves legais e promovida uma mudança de paradigma educacional, é possível inserir o estudo do Cálculo ainda no ensino médio. Para isso, propõe-se uma abordagem que relacione gráficos e funções, utilizando conceito de derivada, de modo a tornar o aprendizado mais acessível e intuitivo, evitando, sempre que possível, as definições formais e abstratas do conceito de limite. Este trabalho é voltado a professores do Ensino Médio e tem como objetivo apresentar metodologias para a abordagem do Cálculo Diferencial de uma variável já no primeiro ano dessa etapa de ensino. Parte-se do entendimento de que o domínio desse conteúdo proporcionará aos estudantes uma maior capacidade de interpretar o comportamento de funções, tanto algébricas quanto transcendentais, temas recorrentes na Matemática e em outras disciplinas ao longo desse ciclo formativo. Além disso, busca-se oferecer uma preparação mais consistente para o enfrentamento das disciplinas iniciais de cursos superiores, especialmente nas áreas de exatas, nas quais têm sido observados índices insatisfatórios de desempenho dos alunos em componentes como Cálculo Diferencial e Integral I e Física I.

Palavras-chaves: Ensino Médio; Matemática; Cálculo Diferencial; Física; Gráficos; GeoGebra.

ABSTRACT

Differential and Integral Calculus are among the fundamental pillars of Pure and Applied Mathematics. However, in the Brazilian context, this subject is usually only presented in higher education, which contributes to a large part of the population being unaware of its essential concepts. The National Common Curricular Base (BNCC) and high school textbooks prioritize an approach based on technical language and the memorization of formulas, leaving aside fundamental content such as Geometry and almost completely neglecting Calculus. Added to this is the recurring practice among teachers of aligning their content with the requirements of college entrance exams and ENEM, which results in the omission of relevant topics, such as matrices. This paper argues that, once legal obstacles are overcome and a change in educational paradigm is promoted, it is possible to include the study of Calculus in high school. To this end, we propose an approach that relates graphs and functions, using the concept of derivative, in order to make learning more accessible and intuitive, avoiding, whenever possible, formal and abstract definitions of the concept of limit. This work is aimed at high school teachers and aims to present methodologies for approaching the Differential Calculus of one variable in the first year of this stage of education. It is understood that mastering this content will provide students with a greater ability to interpret the behavior of functions, both algebraic and transcendental, recurring themes in Mathematics and other disciplines throughout this educational cycle. In addition, it seeks to offer a more consistent preparation for facing the initial disciplines of higher education courses, especially in the exact sciences areas, in which unsatisfactory student performance rates have been observed in components such as Differential and Integral Calculus I and Physics I.

Keywords: High School; Mathematics; Differential calculation; Physics; Graphics; GeoGebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Retrato de Isaac Newton.	15
Figura 2 – Retrato de Gottfried Wilhelm Leibniz.....	16
Figura 3 – Livro usado na 3ª série do Ensino Secundário nos anos 60: Índice parcial.	19
Figura 4 – Provas das propriedades de limites trabalhadas na 3ª série do ensino secundário nos anos 60.	20
Figura 5 – Demonstrações de Integral Definida no Currículo da 3ª Série nos Anos 1960.....	21
Figura 6 – Aplicação de derivadas na Cinemática.....	36
Figura 7 – Exemplos de aplicação: velocidade instantânea e derivada.	37
Figura 8 – Análise geométrica da derivada.	38
Figura 9 – Solução visual da reta tangente com o uso do GeoGebra.....	40
Figura 10 – Estudo do sinal da derivada.	43
Figura 11 – Representação gráfica da função $f(x) = -x^2 + 7x - 10$	44

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
2	ASPECTOS HISTÓRICOS: A DISPUTA SOBRE O CÁLCULO	15
3	ENSINO DE CÁLCULO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM OLHAR SOBRE O PASSADO E O FUTURO	18
3.1	Breve narrativa sobre a trajetória do ensino de Cálculo Diferencial e Integral.....	18
3.2	Ensino de Cálculo sob a Perspectiva da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)	24
3.2.1	A BNCC e o Desenvolvimento de Competências	24
3.2.2	O Engajamento com a Educação Integral.....	26
3.2.3	A Matemática e suas habilidades particulares para o Ensino Médio .	28
4	CÁLCULO DIFERENCIAL: UM RECURSO POTENCIALIZADOR NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS	30
4.1	Analisando abordagens durante resolver um problema: sem e com o Cálculo	30
5	PROPOSTA PARA O ESTUDO DE DERIVADA NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO	34
5.0.1	Proposta direcionada ao primeiro ano do Ensino Médio – Física.....	35
5.0.2	Proposta direcionada ao primeiro ano do Ensino Médio - Matemática	39
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	47
	REFERÊNCIAS	49
	APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA DA ANIMAÇÃO SOBRE DEFINIÇÃO DE DERIVADA	52
A.1	Uso de recursos tecnológicos no ensino.....	52

1 INTRODUÇÃO

Há mais de duas décadas, o ensino da matemática no Brasil tem passado por transformações significativas, impulsionadas pela necessidade de atender às demandas contemporâneas de aprendizagem. Um marco importante nesse processo foi a publicação, em 2000, dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que estabeleceram novos objetivos e abordagens para o ensino da matemática. Esses documentos foram elaborados com base na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), a qual define o Ensino Médio como a etapa final da Educação Básica, voltada à formação integral do cidadão (BRASIL, 1996).

A matemática desempenha um papel fundamental na sociedade moderna, influenciando desde avanços científicos e tecnológicos até aspectos econômicos e sociais. Seu ensino, portanto, deve ser estruturado de maneira rigorosa e aprofundada, proporcionando aos estudantes não apenas a capacidade de resolver problemas cotidianos, mas também um entendimento crítico de suas aplicações. Dentro desse cenário, é essencial que conteúdos matemáticos mais avançados também encontrem espaço no processo formativo do aluno. Entre esses, destaca-se o Cálculo Diferencial e Integral, cujo estudo se mostra não apenas relevante, mas estratégico, dada sua ampla aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento e seu papel central no desenvolvimento científico e tecnológico.

Apesar de sua importância, o ensino de Cálculo no Ensino Médio ainda é motivo de debates e incertezas. Muitos educadores e pesquisadores questionam se é realmente viável introduzir esse conteúdo nessa etapa da educação básica, uma vez que, segundo Dias (2014), a retirada do Cálculo dos currículos ocorreu sem consenso pedagógico claro, e sua reintrodução exige planejamento e adequação às diretrizes educacionais brasileiras. Afinal, como equilibrar a complexidade dos conceitos com as limitações curriculares e a formação prévia dos alunos? Essas questões são essenciais para compreender os desafios e as possibilidades de implementar o ensino de Cálculo nas escolas brasileiras e constituem o ponto de partida desta investigação.

Segundo (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2012), os alunos que concluem o ensino médio ingressam no ensino superior sem ter noção de limite, derivada e integral, e apresentam sérias dificuldades nas disciplinas de Cálculo. As elevadas taxas de reprovação entre estudantes das áreas tecnológicas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral têm sido interpretadas como um indicativo da urgência em repensar a abordagem adotada no ensino dessa matéria. Rezende (2003) apresenta uma variedade de dados que evidenciam esse cenário e investiga as causas do que ele denomina de “fracasso no ensino de Cálculo”. Historicamente, o ensino médio no Brasil, bem como em outros países, já contemplou esses conteúdos em seu currículo. Contudo, após as reformas educacionais associadas à Matemática Moderna, nas décadas de 1960 e 1970, o Cálculo foi gradualmente retirado das diretrizes curriculares nacionais, influenciado por uma mudança no foco pedagógico que priorizava estruturas abstratas, como teoria dos conjuntos e lógica formal, em detrimento de conteúdos aplicados como o Cálculo (SILVA; SCHUBRING, 2016).

Rezende (2003) ressalta que as dificuldades enfrentadas no ensino de Cálculo não são exclusividade brasileira. Entre os aspectos destacados, ele menciona o movimento internacional conhecido como *Calculus Reform*, iniciado por Peter Lax na década de 1980. Esse movimento propõe, de maneira geral, a incorporação de tecnologias no ensino de Cálculo, a valorização das interpretações numéricas, geométricas e analíticas dos teoremas, o fortalecimento da aplicabilidade prática do conteúdo e uma redução da ênfase nas habilidades algébricas tradicionais, compensando essas competências por outras abordagens complementares.

Segundo (ÁVILA, 1991), o cálculo desempenha um papel crucial no desenvolvimento das ciências e da tecnologia. No módulo de matemática para o ensino médio, o autor enfatiza que a exclusão do cálculo do currículo é um erro grave. Essa omissão não apenas negligencia uma parte essencial da matemática, mas também compromete a formação dos alunos, privando-os de habilidades fundamentais que são altamente relevantes no contexto educacional contemporâneo. Ávila ressaltou a importância do cálculo como uma ferramenta indispensável para a compreensão e a aplicação de conceitos matemáticos avançados em diversas áreas do conhecimento.

Diante de justificativas como a falta de tempo para abordar o conteúdo e a percepção de que o tema é complexo demais para o ensino médio, muitos professores acabam por deixá-lo de lado em sala de aula. Embora o Cálculo tenha sido incluído em materiais didáticos, ele não está oficialmente presente no currículo do ensino médio, o que contribui para sua desvalorização e resulta em lacunas na aprendizagem que se refletem no desempenho dos estudantes no ensino superior.

De acordo com Machado (2016), os altos índices de reprovação em Cálculo I no Ensino Superior evidenciam uma lacuna significativa em relação ao conteúdo de matemática abordado no Ensino Médio. Essa disparidade contribui, segundo o autor, para elevados níveis de evasão em cursos como Física, Matemática e Engenharias. Nesse contexto, (PALIS, 1995, p.22) afirma que:

Os cursos de Cálculo, principalmente o primeiro da sequência, apresentam índices absurdamente elevados de abandono e in sucesso. Estes índices, por si só, já apontam a necessidade de se buscar alternativas de ação pedagógica que, aliadas a outras medidas, possam dar conta desse problema que, desde muitos anos, subsiste na Universidade.

Algumas universidades reformularam seus currículos, incorporando disciplinas como Introdução ao Cálculo e Tópicos de Funções, com o intuito de revisar e aprofundar os conteúdos abordados no ensino médio. Essas matérias introdutórias visam resgatar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o comportamento das funções, além de apresentar noções fundamentais como infinito, variabilidade e outros conceitos que são essenciais para a compreensão de limites, derivadas e integrais. Assim, investir na Educação Básica torna-se uma estratégia importante para reverter o cenário de dificuldades no ensino e na aprendizagem do Cálculo, ao permitir que os estudantes tenham contato precoce com ideias intuitivas indispensáveis a um bom desempenho. Nesse contexto, a inserção de conceitos de cálculo no ensino médio se revela necessária. Atividades que trabalhem com noções intuitivas de limites, variações por meio de problemas aplicados e cálculo de áreas delimitadas por gráficos de funções podem representar alternativas eficazes para um ensino mais significativo da matemática nesse nível de ensino.

A motivação para o desenvolvimento deste trabalho surgiu de uma dúvida que, como estudante de licenciatura em matemática, venho carregando desde os últimos anos do ensino médio: se alguns livros didáticos já apresentam conteúdos introdutórios sobre limites, derivadas e integrais, por que esses tópicos ainda não são explorados de forma efetiva em sala de aula? Essa inquietação se intensificou ao observar o impacto dessa ausência na transição para o ensino superior, onde o contato com o Cálculo se dá de forma abrupta e, muitas vezes, desafiadora para grande parte dos alunos. Assim, este estudo busca refletir sobre as possibilidades de introdução dessas ideias no contexto do ensino médio, de maneira acessível e significativa.

Nascimento (2024) defende que a melhor maneira de enfrentar esse desafio é iniciando no próprio ensino médio, onde os alunos poderiam ser introduzidos às principais ideias do cálculo por meio do estudo de funções simples, em especial as funções polinomiais. Esse tipo de função, com coeficientes reais e estrutura do tipo $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$, oferece um terreno acessível para explorar noções fundamentais.

Um estudante que compreende esses conceitos já estará apto a avançar para temas mais complexos, como funções logarítmicas, exponenciais, séries infinitas e até mesmo equações diferenciais básicas. Com a noção de derivada, por exemplo, ele passa a resolver problemas como encontrar o vértice de uma parábola de forma conceitual, bastando derivar a função $y = ax^2 + bx + c$ e igualar a zero e dispensando a memorização de fórmulas prontas.

Com ênfase no estudo das derivadas e suas aplicações, este trabalho está estruturado em quatro capítulos, além de uma seção dedicada às considerações finais. No segundo capítulo, ofereceremos uma breve análise dos eventos que marcaram a relação entre Isaac Newton e Gottfried Leibniz. A disputa entre esses dois matemáticos, conhecida como Guerra do Cálculo, foi um dos mais emblemáticos conflitos científicos da história, envolvendo questões de autoria e influência sobre o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

No terceiro capítulo, apresentaremos um panorama histórico sobre como o Cálculo tem sido abordado no Ensino Médio. Discutiremos a maneira como os conteúdos eram apresentados, além das principais mudanças curriculares que ocorreram até os dias de hoje e as tendências futuras, especialmente com a formalização da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No quarto capítulo, que serve como motivação, apresentamos o Cálculo como um elemento facilitador na resolução de problemas específicos de Matemática. Com isso, comparamos as soluções encontradas sem e com a aplicação dos conceitos de Cálculo Diferencial.

No quinto capítulo, propomos uma abordagem inicial para o ensino de Cálculo no primeiro ano do Ensino Médio, destacando a importância de uma integração mais efetiva entre Matemática e Física, tendo em vista as diversas aplicações do Cálculo em conceitos fundamentais desta última, o que pode tornar a aprendizagem mais contextualizada e significativa para os estudantes. Será realizada uma exploração do conceito de derivadas a partir de aplicações práticas. Essa abordagem visa tornar o conteúdo mais acessível e compreensível para os estudantes do Ensino Médio, promovendo um aprendizado mais significativo e alinhado às demandas interdisciplinares da formação escolar.

Concluímos o trabalho apresentando as considerações finais, nas quais ressaltamos a relevância da proposta e as expectativas referentes à sua aplicação.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS: A DISPUTA SOBRE O CÁLCULO

A presente seção foi construída com base na obra *A Guerra do Cálculo*, de (BARDI, 2007), a qual fornece uma narrativa abrangente e detalhada sobre os acontecimentos que envolveram a disputa pela autoria do cálculo diferencial e integral. O autor resgata aspectos científicos, filosóficos e pessoais dessa controvérsia, permitindo uma compreensão mais profunda das contribuições de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz para a consolidação dessa importante ferramenta da matemática moderna.

O cálculo consolidou-se ao longo dos séculos como uma das mais influentes ferramentas matemáticas, despertando o interesse de diversos filósofos e estudiosos. Entretanto, foi no século XVII que seus avanços tornaram-se decisivos, estabelecendo um marco na história do pensamento científico.

Atualmente, persistem debates acerca da origem do cálculo diferencial e integral.

Para evitar uma discussão prolongada sobre diferentes versões históricas, este estudo concentra-se no cerne da controvérsia: a chamada Guerra do Cálculo. Para compreender esse embate, é necessário retornar ao período mais produtivo de Isaac Newton (ilustrado na Figura 1), entre meados e o final do século XVII, quando ele se isolou em sua propriedade rural devido à peste bubônica. Durante aproximadamente dois anos, Newton dedicou-se a experimentos e reflexões sobre as leis que regem o universo. Nesse contexto de intensa produtividade, ele desenvolveu o cálculo, inicialmente denominado método de fluxões e fluentes. No entanto, apesar da relevância de suas descobertas, Newton optou por não publicá-las naquele momento, compartilhando apenas fragmentos e conceitos com um grupo restrito de colegas.

Figura 1: Retrato de Isaac Newton.



Fonte: Royal Society, [s.d.].

Paralelamente, Gottfried Wilhelm Leibniz, filósofo e matemático alemão (Figura 2), iniciou seus estudos sobre cálculo aproximadamente uma década após as primeiras investigações realizadas por Newton, ainda no século XVII. Durante uma estadia na França, ao longo de cerca de dez anos, Leibniz aprofundou suas pesquisas, desenvolvendo uma abordagem inovadora. Ele estruturou um sistema elegante, com símbolos específicos e representações gráficas inéditas.

Figura 2: Retrato de Gottfried Wilhelm Leibniz.



Fonte: Royal Society, [s.d.].

Diferentemente de Newton, Leibniz optou por publicar suas conclusões em artigos

datados de 1684 e 1686, o que lhe garantiu ampla visibilidade e reconhecimento como um dos principais matemáticos de sua época. No entanto, sua notoriedade também gerou controvérsias, especialmente após sua visita a Londres em 1673. Newton suspeitava que Leibniz tivesse tido acesso a seus manuscritos e, por isso, insinuou que o trabalho do alemão poderia ter sido influenciado por suas próprias descobertas. A acusação de plágio desencadeou um intenso conflito intelectual e pessoal entre os dois matemáticos, resultando na célebre Guerra do Cálculo. Esse embate não apenas dividiu a comunidade acadêmica da época, mas também influenciou profundamente os rumos da matemática moderna.

Por anos, acusações foram trocadas entre Isaac Newton e Gottfried Leibniz, tanto em círculos privados quanto em debates públicos. Ambos conquistaram o apoio de renomados pensadores da época, resultando na divisão da Europa em dois campos distintos: de um lado, os partidários de Newton; do outro, os defensores de Leibniz.

Essa acirrada disputa intelectual, conhecida como a Guerra do Cálculo, tomou proporções surpreendentes, com a publicação de artigos cada vez mais incisivos e carregados de acusações mútuas. O conflito atingiu tal intensidade que envolveu até mesmo o alto escalão do governo europeu, chegando ao conhecimento do próprio Rei da Inglaterra.

Em novembro de 1716, após permanecer cerca de quatro meses acamado devido a complicações de saúde, Gottfried Wilhelm Leibniz faleceu em sua terra natal, a Alemanha. No entanto, seu falecimento não encerrou a disputa, Isaac Newton continuou a publicar trabalhos em defesa de sua posição, consolidando progressivamente o reconhecimento de que havia descoberto o cálculo antes de Leibniz. Após a morte de Newton, em 1727, a Inglaterra passou a considerar essa versão como uma verdade incontestável, atribuindo exclusivamente a ele a criação do cálculo.

No entanto, embora Newton tenha estabelecido os fundamentos do cálculo pelo menos uma década antes de Leibniz, foi este último quem aprimorou e sistematizou os métodos, desenvolvendo uma notação mais clara e acessível, o que possibilitou uma aplicação mais prática da teoria. A abordagem proposta por Leibniz prevaleceu ao longo dos séculos e continua a ser amplamente utilizada na matemática moderna. A Guerra do Cálculo, uma das disputas mais notórias da história da matemática, colocou frente a frente dois gigantes: o britânico Isaac Newton e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz. Ambos, impulsionados por orgulho e ambição, lutaram pela primazia da descoberta do cálculo. Essa rivalidade, marcada por polêmicas e disputas de créditos, reflete as fraquezas humanas diante do gênio. Contudo, o verdadeiro legado de Newton e Leibniz transcende suas desavenças; suas descobertas são a base da matemática moderna, moldando áreas como física, engenharia e ciências computacionais, cujos efeitos positivos ecoam até os dias de atuais.

3 ENSINO DE CÁLCULO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM OLHAR SOBRE O PASSADO E O FUTURO

Neste capítulo, apresenta-se um resumo sobre a maneira como o Cálculo tem sido tratado na educação fundamental, incluindo análises críticas sobre os métodos e conteúdos ensinados, além de tópicos que compõem a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), seus objetivos e promessas, e de que modo esse documento ajudará, após sua implementação adequada, na abordagem do Cálculo Diferencial no Ensino Médio.

Segundo o matemático e educador Geraldo Ávila, o cálculo...

...fazia parte do programa da 3.^a série do chamado curso científico o ensino da derivada e aplicações a problemas de máximos e mínimos, além de outros tópicos como polinômio de Taylor. Isso desde 1943, quando foi instituída uma reforma do ensino secundário que ficou conhecida pelo nome do ministro da educação na época, o sr. Gustavo Capanema. Mas mesmo antes da Reforma Capanema, quando o que hoje chamamos de 5.^a à 8.^a série mais o 2.^o grau era o curso ginasial de 5 anos, seguido por dois anos de pré universitário, já o Cálculo fazia parte do programa no pré das escolas de engenharia. (ÁVILA, 1991)

O ensino de Cálculo começou a ser incluído nos currículos das escolas de educação média no Brasil no late do século XIX, especificamente em 1890, por meio da Reforma promovida por Benjamin Constant (BRASIL, Decreto nº 981, 1890). Desde então, foram feitas diversas mudanças na estrutura curricular da Matemática, com a adição e remoção de tópicos de Cálculo Diferencial e Integral, destinados ao nível secundário.

Em 1931, a reforma estabelecida por Francisco Campos foi introduzida (DEPUTADOS, 1931). Os decretos dessa modificação determinavam que o Ensino Secundário, que ganhava reconhecimento oficial, seria oferecido no Colégio Pedro II no Rio de Janeiro e em instituições que estivessem sob supervisão oficial. Com essa reforma, o Cálculo, que não fazia parte dos currículos desde 1901, voltou a ser incluído no Ensino Secundário (BRASIL, 1932). Entre as obras de Matemática destinadas ao Ensino Secundário que foram criadas de acordo com a reforma de 1931, podemos destacar as escritas por Quintella (1959), um renomado autor de livros didáticos na área matemática, que teve suas obras publicadas entre as décadas de 1940 e 1960. Os temas de Cálculo Diferencial e Integral eram tratados na 3.^a série do Ensino Secundário, abrangendo o aprendizado sobre funções, limites e continuidade, derivadas, esboço de gráficos, a fórmula de Taylor aplicada a polinômios e integrais definidas. As demonstrações dos principais teoremas relacionados a esses assuntos eram geralmente apresentadas com precisão na linguagem matemática.

Conforme Valente (2008), a trajetória profissional de Ary Quintella possibilitou que ele integrasse a equipe da Companhia Editora Nacional, e os livros de matemática que escreveu tornaram-se grandes sucessos no setor educacional. Em relação às obras escritas por Ary Quintella, a Figura 3 mostra a tabela que detalha os tópicos de Cálculo tratados no terceiro ano do Ensino Secundário.

Figura 3: Livro usado na 3.^a série do Ensino Secundário nos anos 60: Índice parcial.

ÍNDICE GERAL		8 Matemática — 3.º Ano Colegial	
Índice dos Exercícios	10	3.6 — Retas que passam num ponto	67
Programa de Matemática do 3.º ano Colegial	11	3.7 — Retas que passam por dois pontos	68
1) FUNÇÕES. GRÁFICOS		3.8 — Intersecção de duas retas	70
1.1 — Intervalo	13	3.9 — Distância de um ponto a uma reta	71
1.2 — Variável. Constante	14	4) EQUAÇÃO DO 2.º GRAU. CIRCUNFERÊNCIA DE CÍRCULO	
1.3 — Variável progressiva	15	4.1 — Distância entre dois pontos. Fórmula	83
1.4 — Representação gráfica duma variável real contínua	15	4.2 — Equação da circunferência de círculo em coordenadas cartesianas ortogonais	84
1.5 — Função	16	5) DERIVADAS	
1.6 — Função real de variável real	17	5.1 — Acréscimos	91
1.7 — Notação funcional	17	5.2 — Derivada em um ponto	92
1.8 — Função definida em um ponto	18	5.3 — Regra geral de derivação	93
2) LIMITES. CONTINUIDADE		5.4 — Interpretação geométrica. Regras de derivação	95
2.1 — Limite de uma variável	33	5.5 — Interpretação cinemática. Segundo grupo: funções algébricas	98
2.2 — Tendência da variável para seu limite	34	6) VARIAÇÃO DAS FUNÇÕES. MÁXIMOS E MÍNIMOS	
2.3 — Limite infinito	35	6.1 — Funções crescentes e decrescentes	116
2.4 — Infinitésimos	35	6.2 — Sinal da derivada	117
2.5 — Propriedades dos limites	36	6.3 — Máximos e mínimos	118
2.6 — Operações com limites	36	6.4 — Cálculo dos máximos e mínimos	119
2.7 — Limite de uma função	41	7) FUNÇÕES PRIMITIVAS. INTEGRAL	
2.8 — Limites fundamentais	42	7.1 — Funções primitivas	128
3) FUNÇÃO LINEAR. LINHA RETA		7.2 — Constante de integração. Integral indefinida	129
3.1 — Equação da linha reta	59	7.3 — Propriedades elementares da integral	130
3.2 — Casos particulares	62	7.4 — Integral de monómios e polinómios	132
3.3 — Perímetro angular e linear	63	7.5 — Integral definida. Cálculo de áreas	133
3.4 — Diversas formas da equação da reta	64		
3.5 — Representação paramétrica. Problemas	67		
3.6 — Retas que passam num ponto	67	3.10 — Ângulo de duas retas	72
3.7 — Retas que passam por dois pontos	68	3.11 — Paralelismo	75
3.8 — Intersecção de duas retas	70	3.12 — Perpendicularismo	76
3.9 — Distância de um ponto a uma reta	71	3.13 — Área do triângulo	78
		3.14 — Resumo	79
		4.3 — Equação geral do segundo grau a duas variáveis e a circunferência de círculo	85
		4.4 — Intersecções de retas e circunferências	87
		5.8 — Terceiro grupo: funções transcendentes	104
		5.9 — Derivadas sucessivas	110
		5.10 — Diferencial	110
		5.11 — Interpretações geométricas	111
		5.12 — Resumo Formulário	112
		6.5 — Interpretação geométrica	122
		6.6 — Pontos de inflexão	122
		6.7 — Estado da variação de uma função	124

Fonte: Quintella, 1965 (p. 6 e 7).

Dos três livros de Ary Quintella voltados para o Ensino Secundário, somente o da 3ª série aborda o estudo das funções, tanto algébricas quanto transcendentais. Esse conteúdo é apresentado com um propósito bem definido: oferecer suporte para a compreensão de limites e continuidade, além de introduzir o tratamento de gráficos de funções diversas com base no conhecimento sobre derivadas. À medida que nos aprofundamos nas páginas deste livro, encontramos algumas formalidades em tópicos que exigem desenvolvimento adicional dos alunos, como as demonstrações de propriedades de limite utilizando a definições formal de limite, conforme mostrado na Figura 4.

Figura 4: Provas das propriedades de limites trabalhadas na 3ª série do ensino secundário nos anos 60.

36 Matemática — 3.º Ano Colegial	Limites. Continuidade 37
2.5 — Propriedades dos limites. 1.ª) O limite de uma constante é a própria constante. Pela definição, tem-se: $\lim a = a$. 2.ª) Uma mesma variável não pode ter dois limites distintos. Suponhamos que tivéssemos: $\lim x = a \quad x - a < \epsilon \quad (1)$ ou $\lim x = b \quad x - b < \epsilon \quad e \quad a \neq b$ Consideremos, então, a igualdade: $a - b = (x - b) - (x - a)$ Como o módulo da diferença é, no máximo, igual à soma dos módulos do minuendo e do subtraendo: $ a - b \leq x - b + x - a $ e viria, de acordo com as igualdades (1): $ a - b \leq \epsilon$ Assim, concluiríamos: $\lim a = b$, o que é absurdo. 2.6 — Operações com limites. 1.ª) O limite de uma soma algébrica de variáveis é igual à soma algébrica dos limites das variáveis, desde que o número de parcelas seja limitado. Tese: $\lim (x+y+z) = \lim x + \lim y + \lim z$. Demonstração. Sejam: $\lim x = a, \lim y = b, \lim z = c \quad (1) (*)$ Isto é, podemos escolher um certo ϵ para o qual se tenha: $-\frac{\epsilon}{3} < x - a < \frac{\epsilon}{3}$ $-\frac{\epsilon}{3} < y - b < \frac{\epsilon}{3}$ $-\frac{\epsilon}{3} < z - c < \frac{\epsilon}{3}$	Somando, membro a membro: $-\epsilon < (x+y+z) - (a+b+c) < \epsilon$ donde resulta: $\lim (x+y+z) = a+b+c$ ou, em virtude de (1): $\lim (x+y+z) = \lim x + \lim y + \lim z$ CASOS PARTICULARES. a) A variável x tem limite infinito e y tem limite finito, isto é, mantém o valor absoluto inferior a uma constante k. Se x variar por valores positivos, podemos escrever por maior que seja M, em virtude da hipótese: $x > M + k$ $-k < y < k$ Somando: $x + y > M \quad \therefore \lim (x+y) = +\infty$ Simbolicamente escreve-se: $k + \infty$ ou $+\infty + k = +\infty$. Se x variar por valores negativos, temos, análogamente: $x < -M - k$ $-k < y < k$ Somando: $x + y < -M \quad \therefore \lim (x+y) = -\infty$ Simbolicamente escreve-se: $k - \infty$ ou $-\infty + k = -\infty$. b) Se as variáveis x e y tendem ambas para $+\infty$, ou ambas para $-\infty$, a soma tende para o mesmo limite. De acordo com a hipótese temos, por maior que seja M, x e y variando por valores positivos: $x > \frac{M}{2}$ $y > \frac{M}{2}$ donde $x + y > M \quad \therefore \lim (x+y) = +\infty$ Simbolicamente, escreve-se: $+\infty + \infty = +\infty$.

Fonte: Quintella, 1965 (p. 36 e 37).

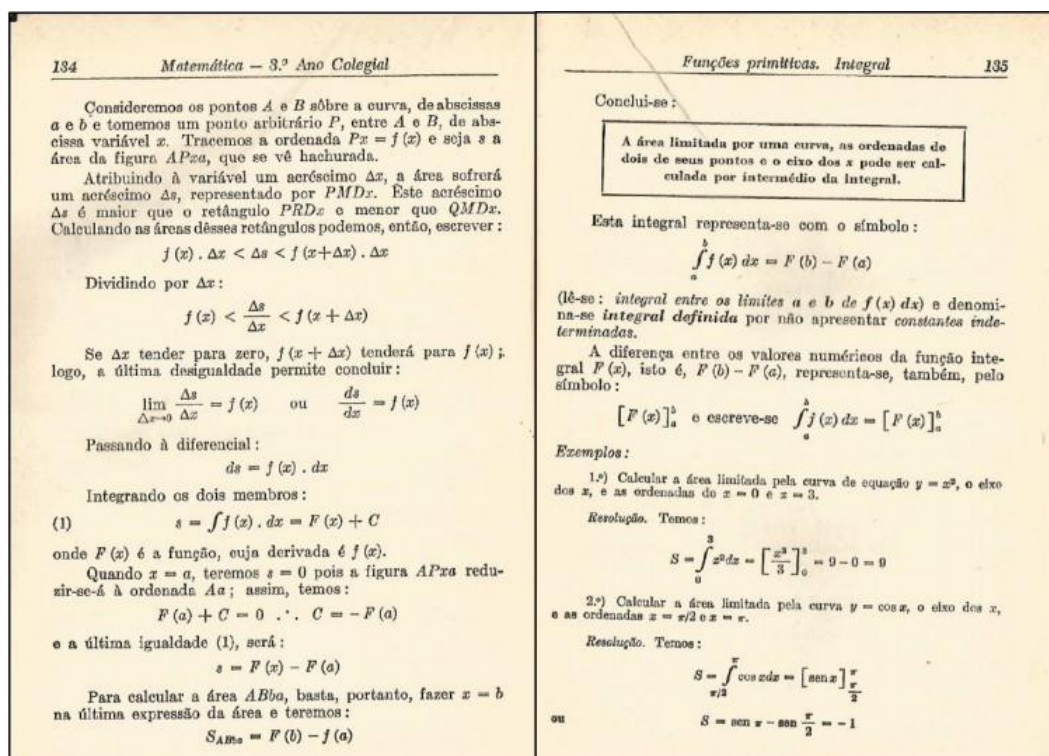
As demonstrações de praticamente todos os teoremas apresentados nas obras de autoria de Ary Quintella são uma característica marcante dos livros de Ensino

Secundário, refletindo um compromisso com a pedagogia fundamental. No contexto do Cálculo, esse enfoque se repete, destacando a importância da compreensão profunda dos conceitos. Para resultados mais elementares, que não dependem do Cálculo, os alunos tendem a absorver as demonstrações de maneira mais sólida, uma vez que utilizam conhecimentos pré-existentes que já foram consolidados anteriormente. Essa conexão entre o aprendizado prévio e as novas aplicações é essencial para um entendimento eficaz da matemática.

Por exemplo, ao abordar a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, a teoria oferece algumas contribuições, mas relativamente limitadas. Em contrapartida, para aprofundar-se em tópicos mais complexos, como limites, derivadas e integrais, é imprescindível entender novos conceitos fundamentais, como a definição de limite de uma função, o que implica compreender os comportamentos das funções em pontos críticos. Além disso, conceitos como diferencial de uma função e infinitesimais são cruciais para a análise de variações. Este processo de assimilação exige dedicação e tempo, pois os fundamentos matemáticos se entrelaçam de forma intrincada e interdependente.

Quintella (1959), como evidenciado pelas imagens de seu livro destinado ao terceiro ano, revela uma abordagem inovadora ao introduzir conteúdos que antecipam tópicos do Ensino Secundário. Ele utiliza conceitos fundamentais de cursos universitários, garantindo uma apresentação rigorosa e clara. Um exemplo notável é a Figura 5, que ilustra o Teorema Fundamental do Cálculo, aproveitando a ideia de diferencial de uma função. Este tópico, que não recebe ampla cobertura nas seções anteriores, demonstra o esforço de Quintella em aprofundar a compreensão dos alunos, preparando-os para desafios acadêmicos futuros e fomentando um aprendizado mais robusto na matemática.

Figura 5: Demonstrações de Integral Definida no Currículo da 3ª Série nos Anos 1960.



Fonte: Quintella, 1965 (p. 134 e 135).

Sem realizar uma análise aprofundada dos resultados obtidos naquele período, e baseando-se nos ensinamentos do professor Ary Quintella, observa-se que o trata-

mento do Cálculo apresenta uma concentração excessiva de diversos tópicos em uma única série. Essa abordagem, em nossa opinião, deveria ser revista. Acreditamos que a distribuição desses conteúdos ao longo dos três anos do Ensino Secundário permitiria um melhor aproveitamento dos estudantes, uma vez que o amadurecimento acadêmico e psicológico dos alunos ao longo desse período é crucial para a compreensão adequada de conceitos matemáticos mais complexos.

Apesar da predominância do ensino tradicional da Matemática, surgiram iniciativas voltadas à sua modernização, com maior ênfase em conteúdos específicos da área. Um exemplo notável ocorreu em 1934, quando cinco jovens matemáticos franceses, André Weil, Claude Chevalley, Henri Cartan, Jean Delsarte e Jean Dieudonné, fundaram o Grupo Bourbaki, nome fictício adotado pelo coletivo. A proposta inicial do grupo era aprimorar os livros de Análise existentes, que, segundo eles, não representavam adequadamente os resultados matemáticos da época. Contudo, André Weil sugeriu que o tratado elaborado deveria servir à Matemática como um todo, ampliando significativamente o escopo da obra, ao incluir também tópicos de Álgebra, Teoria dos Conjuntos e Topologia, além dos conteúdos originalmente voltados à Análise.

Bourbaki não se destacou por comprovar um teorema de grande relevância, e isso tampouco constituía seu propósito. A intenção do grupo estava centrada na divulgação de uma síntese madura e bem organizada: uma reestruturação da Matemática por meio da adoção de estruturas, da Teoria dos Conjuntos e do método axiomático, padronizando os símbolos e os termos, e tornando-os comuns entre diferentes campos da Matemática (ESQUINCALHA; BAIRRAL, 2019).

Embora não tenha sido originalmente concebido para o Ensino Secundário Pires (2006), as ideias do Grupo Bourbaki exerceram uma influência positiva em diversos países durante as décadas de 1960 e 1970. Essa repercussão contribuiu para o surgimento, no Brasil, de um movimento que se tornou um marco na história da Educação Matemática, gerando transformações significativas nas práticas pedagógicas. Trata-se do Movimento da Matemática Moderna, que, já consolidado internacionalmente, impactou não apenas os objetivos do ensino, mas também os conteúdos convencionais da Matemática.

As obras didáticas de Matemática da década de 1960, como aquelas escritas por Ary Quintella, foram de alguma maneira influenciadas por esse movimento. De acordo com Carvalho (1988), os conceitos que fundamentaram o Movimento da Matemática Moderna foram influenciados pela produção matemática do século XX. Essa produção, segundo o pensamento de Bourbaki, tem como base os princípios de estrutura e de formalização axiomática, organizando-se em quatro principais linhas de abordagem:

- As extensões da noção de número e o aparecimento da álgebra abstrata;
- O aparecimento das geometrias não-euclidianas e a axiomatização da geometria;
- O desenvolvimento da teoria dos conjuntos e da lógica;
- A aritmetização da análise e a percepção da necessidade de rigor nesta área.

Durante esse movimento, buscava-se destacar as estruturas fundamentais da Matemática, com especial valorização do estudo dos conjuntos e maior rigor na utilização da simbologia. No entanto, essa abordagem, marcada por uma ênfase excessiva na linguagem dos conjuntos, acabou dificultando a assimilação dos conteúdos, devido ao excesso de símbolos e termos técnicos. Como consequência, disciplinas como Cálculo,

Geometria e Medidas tiveram seu ensino comprometido (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004). Diante desse cenário, ensino do Cálculo voltou a ser retirado dos currículos escolares brasileiros (BRASIL, Lei nº 4.024, 1961).

Apesar da remoção do Cálculo dos currículos oficiais, uma significativa quantidade de autores, especialmente nas décadas de 70 e 80, persistiu em inserir em suas obras seções dedicadas ao estudo de limites e derivadas. Essas informações eram muitas vezes restritas ao terceiro ano do Ensino Médio, com a utilização de simbologias advindas da Matemática Moderna. Contudo, esse enfoque mostrou-se inadequado, dado o elevado nível de abstração dos conteúdos abordados e a limitada carga horária disponível para o ensino. Isso gerou dificuldades de compreensão por parte dos alunos, sugerindo a necessidade de uma abordagem pedagógica mais acessível.

Compreende-se que a assimilação de conceitos novos, especialmente aqueles de natureza abstrata e específicos como os abordados em Cálculo, exige tempo e dedicação por parte dos estudantes. O engajamento dos alunos com o conteúdo, conforme era tradicionalmente apresentado, demandava uma vivência mais ampla com a linguagem técnica e precisa exigida pela disciplina, algo que nem sempre estava ao alcance imediato dos estudantes.

Reconhecemos que é um desafio significativo para os estudantes assimilarem novos conceitos complexos e, em muitos casos, inicialmente abstratos, como os que são abordados na disciplina de Cálculo. Para que os alunos se familiarizem plenamente com a matéria e se engajem de maneira efetiva, é crucial que eles tenham um tempo de prática e experiência suficiente com a linguagem rigorosa e técnica que o Cálculo demanda. Essa familiaridade não se desenvolve imediatamente e, por isso, um ambiente de aprendizado compreensivo e suportivo pode facilitar essa adaptação gradual e essencial ao conteúdo.

É inegável que excluir totalmente o estudo do Cálculo no Ensino Médio tem impacto significativo nas dificuldades enfrentadas por estudantes universitários ao lidarem com a disciplina de Cálculo I, que geralmente se concentra em Cálculo Diferencial e Integral aplicado a funções de uma variável. Várias pesquisas e estatísticas indicam que há uma alta taxa de reprovação entre os alunos, mesmo aqueles matriculados em cursos das áreas exatas, como Engenharia e Física. Isso sugere que a base conceitual necessária para compreender esses tópicos não é adequadamente desenvolvida durante o Ensino Médio, agravando a situação no ensino superior.

Certamente, a integração entre o que é ensinado no Ensino Fundamental e Médio com a experiência do Ensino Superior é crucial para a formação dos alunos. Barbosa (1994) destaca que a desconexão entre esses níveis educacionais resulta em desafios significativos na aprendizagem, especialmente em disciplinas complexas, como Cálculo Diferencial e Integral. Essa falta de continuidade pode levar a lacunas no conhecimento adquirido, afetando a confiança e o desempenho dos estudantes no ensino superior. É imperativo, portanto, que haja um planejamento curricular que promova a articulação entre as etapas de ensino, facilitando a transição e o aprendizado efetivo.

Atualmente, a presença de conteúdos de Cálculo Diferencial no Ensino Médio é notavelmente rara. Esta lacuna se reflete tanto na produção literária, onde poucos autores se dedicam a explorar o tema, quanto na prática educacional, com escolas que raramente incluem o Cálculo em suas grades curriculares. A abordagem do assunto está quase restrita aos alunos que se preparam para vestibulares específicos que exigem esses conhecimentos, o que limita o acesso e a familiaridade de um grande número de

estudantes com essa importante área da matemática. Uma reformulação no currículo poderia beneficiar um aprendizado mais abrangente.

ENSINO DE CÁLCULO SOB A PERSPECTIVA DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento crucial que define os conteúdos essenciais para o Ensino Básico no Brasil, assegurando que todos os alunos tenham acesso a uma formação educacional comum e de qualidade. Além desse núcleo rígido, as instituições de ensino têm a liberdade de enriquecer seus currículos com conteúdos diversificados que atendam às particularidades de seus alunos. No contexto do Ensino Médio, a BNCC sugere a integração do cálculo da taxa de variação de funções como conteúdo complementar.

Nesta subseção, destacamos certos aspectos da BNCC que consideramos relacionados ao foco de nossa pesquisa.

A BNCC e o Desenvolvimento de Competências

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi desenvolvida por especialistas de diversas áreas de conhecimento, assegurando um conteúdo abrangente e atual, que reflete as necessidades dos estudantes contemporâneos e os prepara para os desafios futuros. O processo de elaboração incluiu vastos debates com a sociedade civil e educadores de todo o Brasil, visando uma democratização do acesso à educação. O documento dedicado ao Ensino Médio facilitará a continuidade da adaptação dos currículos em diferentes regiões e auxiliará na formulação de propostas pedagógicas em escolas públicas e particulares, promovendo uma educação mais inclusiva e eficaz.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento essencial que serve como norma orientadora para o desenvolvimento dos currículos educacionais em todo o Brasil, abrangendo os sistemas educacionais dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, bem como as propostas pedagógicas das instituições de ensino. Ao integrar a política nacional da Educação Básica, a BNCC visa promover a coesão e a harmonização entre diversas iniciativas federais, estaduais e municipais. Sua abrangência impacta a formação de professores, a avaliação educacional, a criação de materiais didáticos e a definição de critérios para garantir uma infraestrutura adequada, essencial para o êxito das atividades pedagógicas nas escolas.

Durante o percurso da Educação Básica, as aprendizagens fundamentais estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) têm o objetivo de garantir que os alunos desenvolvam dez competências gerais. Essas competências são essenciais, pois traduzem, no contexto pedagógico, os direitos de aprendizado e de desenvolvimento dos estudantes. A BNCC busca promover uma formação integral, que abarca não apenas conteúdos acadêmicos, mas também habilidades sociais, emocionais e cívicas, preparando os alunos para os desafios da vida contemporânea e contribuindo para a construção de uma sociedade mais justa e inclusiva.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a competência é entendida como um conjunto dinâmico que envolve a mobilização integrada de diferentes tipos de conhecimentos, incluindo conceitos e procedimentos. Além disso, engloba habilidades práticas, cognitivas e socioemocionais, essenciais para a formação integral do indivíduo. Essa articulação de conhecimentos e habilidades permite que os estudantes desenvolvam atitudes e valores que são fundamentais para enfrentar e resolver as

complexas demandas do cotidiano. Dessa forma, promove-se não apenas o exercício pleno da cidadania, mas também a preparação eficaz para os desafios do mundo do trabalho, conforme destacado em (BRASIL, 2018).

A BNCC estabelece dez competências gerais que orientam as áreas de conhecimento e os componentes curriculares. Das dez Competências Gerais da Educação Básica, a Competência Geral nº 2 é particularmente significativa, pois foca no desenvolvimento de habilidades essenciais para a formação integral dos estudantes no Ensino Médio. Essa competência promove a capacidade de pensar criticamente e resolver problemas complexos, aspectos fundamentais na abordagem de disciplinas como o Cálculo Diferencial. Ao explorar conceitos matemáticos e suas aplicações práticas, os alunos não apenas adquirem conhecimento teórico, mas também são incentivados a desenvolver um raciocínio lógico e analítico, preparando-os melhor para os desafios acadêmicos e profissionais futuros.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.(BRASIL, 2018, p.9).

Certamente, é fundamental que o currículo escolar inclua informações que promovam o acesso a conhecimentos que estimulem o senso crítico dos alunos. Ao tratar de situações reais e contemporâneas, o currículo deve ser projetado para proporcionar aos estudantes ferramentas analíticas que lhes permitam entender e abordar tanto problemas gerais quanto questões específicas de suas realidades. A inclusão de temas relevantes pode enriquecer o aprendizado, preparando os alunos para a vida fora da sala de aula, ao mesmo tempo em que estabelece padrões eficazes para a análise crítica de diversas situações enfrentadas na sociedade atual.

O Engajamento com a Educação Integral

De acordo com a BNCC, a educação integral tem como objetivo promover uma formação ampla e o crescimento completo dos alunos, compreendendo “a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento, rompendo com visões reducionistas que privilegiam ou a dimensão intelectual (cognitiva) ou a dimensão afetiva.” (BRASIL, 2018, p.14).

A Educação Integral, enquanto abordagem educacional, fundamenta-se em quatro pilares essenciais: justiça social, ampla participação, contemporaneidade e responsabilidade ecológica, conforme apontado por (WEFFORT; ANDRADE; COSTA, 2019, p.17–18).

1. A Educação Integral promove a equidade ao reconhecer o direito de todos e todas de aprender e acessar oportunidades educativas diferenciadas e diversificadas a partir da interação com múltiplas linguagens, recursos, espaços, saberes e agentes, condição fundamental para o enfrentamento das desigualdades educacionais.

2. A Educação Integral é inclusiva porque reconhece a singularidade dos sujeitos, suas múltiplas identidades e se sustenta na construção da pertinência do projeto educativo para todos e todas;

3. A Educação Integral é uma proposta contemporânea porque, alinhada às demandas do século XXI, tem como foco a formação de sujeitos críticos, autônomos e responsáveis consigo mesmos e com o mundo.

4. A Educação Integral é uma proposta alinhada com a noção de sustentabilidade porque se compromete com processos educativos contextualizados, sustentáveis no tempo e no espaço, com a integração

Os principais temas da educação giram em torno de questões como o que aprender, por que aprender, como ensinar, como criar redes de aprendizado colaborativo e como avaliar o processo de aprendizagem. Essas questões são fundamentais para o desenvolvimento de abordagens educacionais mais eficazes e inclusivas, capazes de atender às demandas contemporâneas e promover o crescimento contínuo de indivíduos e comunidades.

No contexto global atual, reconhecer-se dentro de sua trajetória histórica e cultural, comunicar-se de forma eficaz, exercitar a criatividade, o pensamento crítico, a participação ativa, a abertura às novidades, a cooperação, a resiliência, a produtividade e a responsabilidade exige bem mais do que a simples aquisição de informações. Implica cultivar competências que favoreçam o aprender a aprender, desenvolver habilidades para lidar com o volume crescente de dados, agir com discernimento e ética no universo das culturas digitais, aplicar saberes na resolução de desafios, tomar decisões com autonomia, agir com iniciativa diante de situações complexas e buscar alternativas, além de saber conviver e aprender com as diferenças e diversidades (BRASIL, 2018).

Adotar, de forma abrangente, uma perspectiva distinta, abrangente e integral em relação à criança, ao adolescente, ao jovem e ao adulto implica reconhecê-los como sujeitos ativos na construção do conhecimento. Tal abordagem deve direcionar a educação para o acolhimento, a valorização e a promoção do desenvolvimento pleno desses indivíduos, sempre levando em consideração suas singularidades e diversidades. Ademais, é imprescindível que a escola, enquanto espaço de aprendizagem e convivência democrática, se consolide através de práticas efetivas que promovam o respeito, a inclusão e o enfrentamento às desigualdades sociais, conforme os princípios estabelecidos (BRASIL, 2018).

Independentemente da duração da jornada escolar, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe um conceito de educação integral que se dedica à criação deliberada de processos educativos. Esses processos devem atender às necessidades, possibilidades e interesses dos estudantes, ao mesmo tempo em que se alinham com os desafios atuais enfrentados pela sociedade. Implica, portanto, uma análise cuidadosa das variadas infâncias e juventudes, assim como das distintas culturas juvenis, reconhecendo seu potencial para gerar novas formas de viver e se expressar no mundo contemporâneo (BRASIL, 2018).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) busca romper com a divisão rígida das disciplinas, promovendo uma abordagem mais integrada do conhecimento. Essa proposta incentiva a aplicação prática do que é aprendido, valorizando a relevância do contexto para que os estudantes possam compreender melhor seu aprendizado. Além disso, a BNCC enfatiza a importância do protagonismo discente, ou seja, o papel ativo do estudante na sua formação e na elaboração de seu projeto de vida (BRASIL, 2018). Assim, ao buscar aprendizagens que estejam alinhadas às necessidades, capacidades e interesses dos alunos, torna-se necessário flexibilizar o currículo escolar. Essa flexibilidade é essencial para que, além de um conteúdo básico comum, possamos oferecer programações específicas, adaptadas aos interesses dos estudantes.

Nesse contexto, surge a possibilidade de introduzir o Cálculo Diferencial de forma acessível para todos, com um conteúdo mínimo essencial. Além disso, podemos aprofundar esse conhecimento para os que optarem por seguir nesse caminho. Afinal, nenhum outro conteúdo da Matemática é tão recorrente e indispensável no início da trajetória acadêmica de estudantes universitários quanto o Cálculo Diferencial e Integral.

Vale salientar que, mesmo com as atualizações, a BNCC mantém continuidade

com a visão da disciplina estabelecida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que por muitos anos orientaram o ensino nas escolas brasileiras. Ao definir as competências específicas da Matemática, a Base indica como as competências gerais devem se manifestar dentro desse componente. A Matemática é apresentada como uma ciência humana, nascida das demandas e preocupações de diversas culturas ao longo da história. Além disso, é vista como uma ciência dinâmica, capaz de contribuir para a resolução de problemas científicos e tecnológicos, além de sustentar descobertas e criações. O foco da BNCC está no desenvolvimento do aluno, tornando o conhecimento matemático uma ferramenta eficaz para interpretar, compreender e transformar o mundo à sua volta (CHICA; BARNABÉ; TENUTA, 2017).

A Matemática e suas habilidades particulares para o Ensino Médio

No Ensino Fundamental, a Matemática vai além dos números, fórmulas e medições da realidade. A proposta da BNCC é reposicionar a disciplina, destacando como prioridade o desenvolvimento do letramento matemático nos estudantes. O letramento matemático envolve o desenvolvimento de habilidades como raciocinar, representar ideias, comunicar-se e argumentar, capacitando os alunos a participarem ativamente em diferentes situações. Isso inclui tanto o posicionamento crítico diante de questões quanto a busca por soluções por meio da investigação.

No Ensino Fundamental, essa formação valoriza o uso dos conceitos matemáticos para resolver problemas dentro e fora do ambiente escolar. Já no Ensino Médio, esse processo se torna mais sólido, ao relacionar de forma mais ampla situações cotidianas com conteúdos matemáticos (CHICA; BARNABÉ; TENUTA, 2017).

Os processos matemáticos são compreendidos simultaneamente como conteúdos de estudo e como ferramentas pedagógicas que impulsionam a aprendizagem. Essa abordagem promove o desenvolvimento de competências específicas, conforme estabelecido pela Base Nacional Comum Curricular, assegurando aos estudantes uma formação sólida e contextualizada.

As habilidades específicas para o Ensino Médio, de acordo com a BNCC, são (BRASIL, 2018, p.531):

5. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
6. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
7. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
8. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
9. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Apesar de os objetos de conhecimento estarem organizados em unidades temáticas, o ensino não deve seguir uma ordem linear, centrado em estudar cada conteúdo isoladamente. O mais indicado é que o professor elabore suas aulas em sequência, promovendo diálogos entre diferentes áreas do saber incluindo outras disciplinas escolares e entre as próprias unidades temáticas. Dessa forma, os alunos terão apoio para estabelecer relações, realizar sínteses e elaborar conclusões que evidenciem as conexões entre os conteúdos (CHICA; BARNABÉ; TENUTA, 2017).

Sob uma perspectiva interdisciplinar, o estudo do Cálculo torna-se indispensável, pois constitui uma ferramenta amplamente utilizada não apenas no campo da Matemática, mas também em diversas outras áreas do saber, com destaque para a Física. A falta de entendimento sobre conceitos fundamentais, como derivadas e suas interpretações geométricas, pode limitar a abordagem de diversos conteúdos do Ensino Médio. Isso pode levar a um ensino pautado apenas no uso de fórmulas prontas, sem oferecer uma base matemática sólida que permita compreender plenamente o significado desses conceitos.

4 CÁLCULO DIFERENCIAL: UM RECURSO POTENCIALIZADOR NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Neste capítulo, exploramos o Cálculo como uma ferramenta essencial para resolver diversos problemas na Matemática. Destacamos como o entendimento das derivadas permite calcular a taxa de variação instantânea, uma abordagem amplamente aplicada na Física. Além disso, enfatizamos que este conhecimento pode ser expandido para incluir funções além das simples polinomiais de 1º e 2º graus, mostrando que os estudantes podem aplicar conceitos de Cálculo a uma variedade de funções, enriquecendo sua compreensão e capacidade de resolução de problemas, e preparando-os melhor para desafios mais complexos no campo da Matemática e suas aplicações.

ANALISANDO ABORDAGENS DURANTE RESOLVER UM PROBLEMA: SEM E COM O CÁLCULO

Para ilustrar a eficácia do Cálculo Diferencial na resolução de problemas, focaremos em um exemplo de geometria abordado por três métodos distintos, destacando a derivada como uma ferramenta poderosa. Esta comparação será mais relevante para um grupo de alunos que já possui alguma familiaridade com o Cálculo, pelo que analisaremos as dificuldades específicas que cada abordagem pode apresentar. Ao longo deste trabalho, buscaremos não apenas resolver o problema, mas também instigar uma reflexão crítica sobre como cada técnica contribui para o entendimento e a intuição matemática dos estudantes, enriquecendo assim sua experiência de aprendizado.

O problema discutido, juntamente com as suas soluções, foi minuciosamente abordado no número 53 da Revista do Professor de Matemática (CARNEIRO; WAGNER, 2004). Ambos os autores oferecem uma análise aprofundada, destacando metodologias e estratégias práticas que podem ser implementadas no ensino da Matemática, tornando a revista uma valiosa fonte de recursos para educadores que buscam inovar em suas abordagens pedagógicas.

Problema: Dentre todos os cilindros circulares retos de área total constante, qual é o de maior volume?

Observações acerca do problema:

Esse desafio é típico para quem domina o Cálculo Diferencial. É uma dúvida que pode surgir entre bons alunos do primeiro ano do Ensino Médio após estudar funções quadráticas e resolver situações similares. Aqui, a função apresenta um grau mais elevado, proporcionando uma ótima chance de introduzir o Cálculo. Vamos analisar as soluções.

Solução 1

— Sendo x o raio da base e y a altura do cilindro, o que se deseja é encontrar o maior valor de $V = \pi \times x^2 \times y$, para $x > 0$ e $y > 0$, satisfazendo a condição: $2\pi x^2 + 2\pi xy = C$. Sem perda de generalidade, podemos colocar $C = 2\pi a^2$, onde $a = \sqrt[3]{\frac{C}{2\pi}}$. A condição fica na forma: $x^2 + xy = a^2$ (*). Tirando o valor de $y = \frac{a^2 - x^2}{x}$ e substituindo, queremos maximizar $\frac{V}{\pi} = a^2x - x^3 = f(x)$, para $0 < x < a$, que é a condição para que $y > 0$.

Como $f(0) = f(a) = 0$ e $f(x) = x(a^2 - x^2) > 0$, para $0 < x < a$, o problema recai em achar o máximo de $f(x)$ no intervalo fechado e limitado $I = [0; a]$. É intuitivo que esse máximo existirá, e de fato sua existência está garantida por ser f contínua em I (Teorema do Valor Extremo).

Seja então b um valor de x para o qual f assume seu valor máximo em I , ou seja: $f(b) - f(x) > 0$, para todo $x \in I$. Essa situação se expressa em:

$$\begin{aligned} a^2b - b^3 - (a^2x - x^3) &> 0 \Rightarrow a^2(b - x) + (x - b)(x^2 + bx + b^2) > 0 \\ \Rightarrow (x - b)(x^2 + bx + b^2 - a^2) &> 0. \end{aligned}$$

Como $b < a$, o trinômio $x^2 + bx + b^2 - a^2$ tem discriminante tal que:

$$\Delta = 4a^2 - 3b^2 > 4a^2 - 3a^2 = a^2 > 0.$$

Portanto, o trinômio em questão tem duas raízes reais x_1 e x_2 , de sinais contrários, pois $x_1 \cdot x_2 = b^2 - a^2 < 0$. Assim, a condição (i) pode ser expressa como:

$$(x - b)(x - x_1)(x - x_2) \geq 0, \text{ onde:}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Como $x - x_2$ é sempre positivo, a condição fica reduzida a:

$$(x - b)(x - x_1) \geq 0.$$

Logo, a única maneira de satisfazer $(x - b)(x - x_1) \geq 0$ para todo $x \in I$ é ter $x_1 = b$, pois, caso contrário, $f(x)$ seria negativa para x entre b e x_1 . Assim, $b = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$, ou seja, $3b = \sqrt{4a^2 - 3b^2}$, $\Rightarrow b = \frac{\sqrt{a^2}}{3}$. Pela condição $y = \frac{a^2}{x} - x$, com $x = b = \frac{\sqrt{a}}{3}$,

obtemos $y = \frac{2a}{3}$.

Conclusão: volume máximo ocorre quando a altura do cilindro tem o mesmo comprimento que o diâmetro da base.

$$\text{Logo: } V = \pi x^2 y = \pi \left(\frac{a}{3}\right)^2 \frac{2a}{3} = \frac{2\pi a^3}{27}.$$

$$\sqrt[3]{3} \quad \sqrt[3]{3} \quad \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$$

Análise da solução 1 : Esta solução é muito criativa. Ela exige conhecimento total sobre a função quadrática e desigualdades em intervalos reais. A definição de valor máximo de uma função foi bem usada como base para resolver o problema e encontrar as desigualdades certas. Alunos bons e dedicados à Matemática ficariam felizes com essa solução. No entanto, embora a matemática básica tenha sido usada em todas as etapas, algumas características do problema ajudaram a conduzir cada passo. Assim, esse método não garante um padrão fixo para encontrar o valor máximo ou mínimo de uma função.

Solução 2

Com as sugestões preliminares da solução 1, vamos realizar $V = \pi x^2 y$.

Notemos que:

$$\frac{1}{4} \frac{V}{\pi} = \frac{x^4 y^2}{4\pi} = x^2 \frac{xy \cdot xy}{4}.$$

Devido à desigualdade das médias, se, se u, v e w representarem números positivos, teremos:

$$u \cdot v \cdot w \leq \left(\frac{u+v+w}{3} \right)^3.$$

Nesse caso, a igualdade só ocorrerá quando $u = v = w$. Assim: $\frac{1}{4} \frac{V}{\pi} =$

$\frac{x^4 y^2}{4} = x^2 \frac{xy \cdot xy}{2 \cdot 2} \leq \frac{x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2}}{3}^3 = \frac{x^2 + xy}{3}^3$. Logo, aplicando a condição $x^2 + xy = a^2$, exibida na solução 1, teremos:

$$\frac{1}{4} \frac{V}{\pi} \leq \frac{a^2}{3}^3 \Rightarrow V \leq \frac{2\pi a^3}{3}.$$

A desigualdade mencionada anteriormente indica o valor máximo do volume, que é alcançado através da propriedade das médias $x^2 = \frac{xy}{2}$, isto é, $y = 2x$, substituindo na igualdade(*), teremos, $x = \sqrt[3]{a}$.

Análise da solução 2: Uma das utilizações da desigualdade das médias é a abordagem de problemas de máximos e mínimos. Sem dúvida, é uma técnica que ajuda na solução de certas questões, onde as variáveis presentes podem estar conectadas de forma que possamos tirar proveito do fato de que $M_H \leq M_G \leq M_A \leq M_Q$, sendo M_H , M_G e M_A as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática de n números reais que são positivos, onde $n \in \mathbb{N}$. No entanto, isso aqui também requer uma grande criatividade do aluno, já que a seleção dos números em questão não é feita de forma aleatória.

Solução 3

Seja a função f definida como na solução 1: $f(x) = \frac{V}{\pi} = x(a^2 - x^2)$.

Utilizando o saber em Cálculo Diferencial, realizamos o cálculo das derivadas, $f'(x)$ e $f''(x)$ da função $f(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} = x(a^2 - x^2)$. Assim $f'(x) = a^2 - 3x^2$ e $f''(x) = -6x$. Se $f'(x) = a^2 - 3x^2 = 0$, encontramos $x = b = \sqrt{\frac{a^2}{3}}$ no intervalo $I = [0; a]$.

Sabemos que $f'(b) = 0$, com $f''(b) < 0$, é condição suficiente para a função $f(x)$, contínua e derivável no intervalo aberto $I =]0; a[$, possuir um valor máximo local em $x = b$. Assim, como $f''(b) = -\sqrt{6}a < 0$, a função $f(x)$ tem valor máximo no ponto de abscissa $x = b = \sqrt{\frac{a^2}{3}}$.

$$\text{O volume máximo é } V = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}}}{3} \pi \left(\frac{a^2}{3} \right)^2 = \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}}.$$

Análise da solução 3:

Sem dúvida, a terceira solução é a mais atraente, e se o tratamento do Cálculo, com seus teoremas rigorosos, for feito de maneira mais suave, substituindo, sempre que possível, demonstrações complexas com algébricas por representações geométricas, é apropriado discutir tópicos de Cálculo Diferencial no Ensino Médio, com o intuito de aumentar a quantidade de problemas que podem ser solucionados (não só em Matemática) e, também, facilitar os cálculos.

A partir das soluções apresentadas, fica evidente que a opção 3, que aplica o Cálculo Diferencial, exige consideravelmente menos intervenções, tendo como base os conhecimentos sobre as regras de derivação e a interpretação adequada dos pontos críticos gerados pela primeira derivada, assim como o sinal da segunda derivada da função contínua e derivável relacionada aos pontos críticos já identificados.

5 PROPOSTA PARA O ESTUDO DE DERIVADA NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO.

Um dos principais obstáculos à introdução do Cálculo no ensino médio brasileiro é a exigência do conceito formal de limites, cuja complexidade representa um desafio mesmo para estudantes do ensino superior. Para esse nível de ensino, portanto, recomenda-se uma abordagem centrada na geometrização dos problemas e na visualização gráfica, especialmente por meio da análise de dados estatísticos.

Segundo Machado, uma abordagem adequada ao ensino de Cálculo no contexto escolar:

O professor começa com a ideia mais simples, que é a de integral, e com as funções mais simples, que são as funções polinomiais de primeiro grau. Depois ele trabalha a ideia de derivada. E depois, a de equação diferencial. Assim, sempre trabalhando apenas com funções polinomiais de grau 1, o professor passa as ideias mais importantes do cálculo. Isso dá para fazer em poucas aulas. (MACHADO, 2015)

Machado (2015) dá continuidade ao seu argumento:

E daí ele recomeça, mas desta vez com funções polinomiais de grau 2. Agora, a curva da função não é mais uma reta, mas uma parábola. O aluno vai perceber que, se sabe calcular a área de um retângulo, pode calcular a área aproximada debaixo de uma função polinomial do tipo $y = ax^2 + bx + c$ num intervalo qualquer: basta dividir o intervalo em n retângulos. Quanto maior o número de retângulos, melhor a aproximação. A ideia de derivada também é simples: o aluno calcula o valor do polinômio para $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, etc. Vai ver que a taxa de variação por unidade não é mais constante, mas a taxa de variação da taxa de variação é constante! E isso ele descobre muito simplesmente, com tabelas.

Percebe-se que a proposta de Machado (2015) adota uma abordagem intuitiva, centrada em conceitos acessíveis como o cálculo de áreas e as taxas de variação, sem recorrer à formalização dos limites. A partir da compreensão inicial das ideias de integral e derivada, é possível expandir o estudo para funções mais complexas, como as polinomiais de grau superior, as exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Para fins de organização, este trabalho adotará a abordagem da derivada como ponto de partida. No entanto, é importante destacar que a ordem de ensino entre os principais conceitos do Cálculo pode variar conforme os objetivos pedagógicos. Ressalta-se, ainda, que o sucesso dos alunos no aprendizado da derivada depende de uma base sólida em áreas como Aritmética, Álgebra e Geometria Plana, pois, assim como ocorre com outros conteúdos do ensino médio, o estudo do Cálculo exige conhecimentos prévios de Matemática, a serem desenvolvidos no ensino fundamental ou, ao menos, de forma articulada com ele durante o ensino médio.

Diante do exposto anteriormente, observou-se diferentes fases da história do ensino de Matemática nas quais o Cálculo teve um papel significativo, frequentemente abordado com um rigor excessivo. Considerando as razões que justificam o retorno do ensino do Cálculo ao currículo do Ensino Médio, apresentamos uma proposta inovadora. Sugere-se que a definição de derivada seja introduzida já na primeira série do Ensino Médio, integrando conceitos e aplicações. Essa abordagem deve ser acompanhada pela disciplina de Física, pois os fundamentos iniciais da Cinemática Escalar se alinham de forma eficaz e prática com a compreensão da derivada, facilitando o aprendizado. Portanto, no início do curso, a escalada dos tópicos relacionados ao Cálculo será liderada pelo professor de Física.

A escolha de focar nas derivadas das funções polinomiais de 1º e 2º graus proporcionará não apenas uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, mas também suas aplicações práticas na Física, especialmente na análise do movimento uniforme e do movimento uniformemente variado. Essas aplicações contextualizam o aprendizado, tornando-o mais significativo.

Além disso, a abordagem da função polinomial de 2º grau permitirá que os estudantes enfrentem um desafio crucial: encontrar a equação da reta tangente a uma parábola, uma habilidade fundamental que liga matemática teórica a situações do mundo real e enriquece a formação acadêmica. Na primeira série do ensino, é essencial incorporar o estudo da taxa de variação instantânea no programa de Física, introduzindo a definição de derivada de forma acessível. Juntamente com a disciplina de Matemática, os alunos explorarão o conceito da reta tangente a gráficos de funções, compreendendo o significado geométrico da derivada como o coeficiente angular dessa reta em pontos específicos. Ao analisar funções polinomiais de 2º grau, os estudantes poderão aplicar o conhecimento da derivada para esboçar gráficos e identificar pontos de máximo ou mínimo, promovendo uma compreensão mais profunda do comportamento das funções.

5.0.1 Proposta direcionada ao primeiro ano do Ensino Médio – Física

Começando com a Física, a velocidade escalar instantânea nos leva ao conceito de derivada. Na Cinemática Escalar, um ponto material se move ao longo de uma trajetória. A posição desse ponto, chamada de espaço, é determinada por uma função que depende do tempo, $s(t)$. A taxa de variação média do espaço em relação ao tempo é a velocidade escalar média. A taxa de variação instantânea é a velocidade escalar instantânea, ou seja, a velocidade em um momento específico t . A definição matemática é apresentada em muitos livros de Física da seguinte maneira:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Onde $v(t)$ é a função da velocidade no instante t , sendo Δs e Δt as variações, respectivamente, de espaço e tempo, entre dois instantes, que sejam t e $t + \Delta t$.

Agora, precisamos calcular esse limite usando funções $s(t)$ que são polinomiais. Isso inclui funções polinomiais de primeiro e segundo graus. Essas funções vão descrever os movimentos uniformes e os movimentos uniformemente variáveis. O professor de Física definirá esse limite como “A derivada da função $s(t)$ em relação ao tempo.” Ele concluirá que a derivada do espaço em um momento t mede a velocidade escalar nesse instante.

O livro "Cinemática" da coleção Física Clássica, escrito por Caio Sérgio Calçada e José Luiz Sampaio, aborda a derivada com clareza, facilitando a compreensão dos conceitos fundamentais de Física. A segunda edição, publicada pela editora Atual, utiliza uma linguagem acessível, o que torna a leitura mais fluída e menos intimidadora para os estudantes. Apesar da simplicidade na linguagem, a obra mantém o rigor acadêmico necessário, evidenciado em exemplos ilustrativos, como demonstrado na Figura 6. Isso faz do livro um recurso valioso tanto para iniciantes quanto para aqueles que buscam solidificar seus conhecimentos na área.

Figura 6: Aplicação de derivadas na Cinemática.

9. VELOCIDADE ESCALAR INSTANTÂNEA

A velocidade escalar média nos dá uma idéia geral do movimento. De fato, se dissermos que a velocidade escalar média de um carro, em certo percurso, é de $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, não significa necessariamente que a velocidade escalar é, em cada instante, $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Estamos apenas dizendo que, em média, o carro percorreu 60 km em uma hora.

Para sabermos o que aconteceu em cada instante, devemos definir a *velocidade escalar instantânea*.

Esta pode ser entendida como uma velocidade escalar média para um intervalo de tempo Δt muito pequeno, isto é, Δt tendendo a zero ($\Delta t \rightarrow 0$), ou seja, t_2 tendendo a t_1 ($t_2 \rightarrow t_1$).

Quando Δt tende a zero, Δs também tende a zero, mas o quociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tende a um valor limite, que é a velocidade escalar instantânea.

Assim, se s é o espaço de um móvel num instante t e $s + \Delta s$ é o espaço num instante $t + \Delta t$, a velocidade escalar v no instante t é o limite para o qual tende $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero e escreve-se:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

O limite de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero recebe o nome de *derivada do espaço em relação ao tempo* e indica-se por $\frac{ds}{dt}$. Assim:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Fonte: Calçada; Sapaio, 1998 (p. 19).

Observe que, na página 19 deste livro, depois de abordar os conceitos básicos de Cinemática, acompanhados de várias atividades, os escritores, de maneira bem clara, explicam que a velocidade instantânea é a taxa de variação do espaço em função do tempo.

Diferentemente de muitos livros de Física que se dedicam ao Ensino Médio, que abordam conceitos de maneira mais superficial e intuitiva, o livro Física Clássica adota uma abordagem mais rigorosa e matemática. A velocidade instantânea, em particular, é definida através de um limite, que na linguagem do cálculo é reconhecida como a derivada do espaço em relação ao tempo. Esse conceito é ilustrado com exemplos práticos, como o apresentado na Figura 7. Os autores utilizam a função $s(t) = 4t^2$ para calcular a derivada, também introduzindo importantes regras básicas de diferenciação, incluindo a derivada de uma constante e a derivada da soma de funções, proporcionando assim uma base sólida para os estudantes entenderem movimentos temporais.

Figura 7: Exemplos de aplicação: velocidade instantânea e derivada.

Exemplos:
 a) Seja a equação horária do espaço $s = 4t^2$, para s em metros e t em segundos. Calculemos $v = \frac{ds}{dt}$. Sendo s o espaço do móvel no instante t e $s + \Delta s$ o espaço no instante $t + \Delta t$, vem:

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow s = 4t^2 & (1) \\ t + \Delta t &\longrightarrow s + \Delta s = 4(t + \Delta t)^2 \\ & s + \Delta s = 4t^2 + 8t \Delta t + 4(\Delta t)^2 & (2) \end{aligned}$$

Subtraindo membro a membro as equações (2) e (1), vem:

$$\Delta s = 8t \Delta t + 4(\Delta t)^2$$

Dividindo ambos os membros por Δt , vem:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 8t + 4 \Delta t$$

$$\text{Logo: } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (8t + 4 \Delta t)$$

Como Δt tende a zero, vem:

$$v = 8t \left(v \text{ em } \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ e } t \text{ em s} \right).$$

Assim, a derivada em relação ao tempo de $s = 4t^2$ é $v = 8t$, e ela constitui a equação horária da velocidade. Note que a cada valor de t corresponde um valor de v .

A partir de $s = 4t^2$ podemos obter diretamente $v = 8t$ através da seguinte regra:

multiplica-se o expoente (2) pelo coeficiente de t^2 (que é 4) e subtrai-se uma unidade do expoente de t^2 .

$$s = 4t^2 \longrightarrow v = \frac{ds}{dt} = 2 \cdot 4t^{2-1} = 8t$$

Generalizando, sendo $s = m \cdot t^n$, com n real, vem:

$$v = \frac{ds}{dt} = n \cdot m \cdot t^{n-1}$$

b) Considere um móvel cujo espaço não varia com o tempo, isto é, $s = C$ (constante). Nesse caso, $\Delta s = 0$ em qualquer intervalo de tempo e $v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 0$. Portanto, concluímos que a derivada de uma constante é nula.

Outros exemplos:

$$\begin{aligned} \bullet \quad s &= 6 + 4t + 3t^2 \quad (s \text{ em m, } t \text{ em s}) \\ v &= \frac{ds}{dt} = 0 + 1 \cdot 4 \cdot t^{1-1} + 2 \cdot 3t^{2-1} \\ v &= 4 + 6t \quad \left(v \text{ em } \frac{\text{m}}{\text{s}}, t \text{ em s} \right) \end{aligned}$$

Fonte: Calçada; Sapaio, 1998 (p. 21).

Um aspecto notável deste livro de Cinemática é a maneira como ele ilumina a conexão entre Cinemática e Cálculo, especialmente através da interpretação geométrica da derivada em um determinado ponto. Na ilustrativa Figura 8, os autores elucidam que a velocidade escalar instantânea em um instante específico, $t = t_0$, corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função horária do espaço. Essa representação gráfica não apenas facilita a compreensão do conceito de derivada, mas também permite que os leitores visualizem a dinâmica do movimento de forma clara e intuitiva, estabelecendo uma ponte entre teoria e prática.

Figura 8: Análise geométrica da derivada.

3. DETERMINAÇÃO GRÁFICA DA VELOCIDADE ESCALAR INSTANTÂNEA

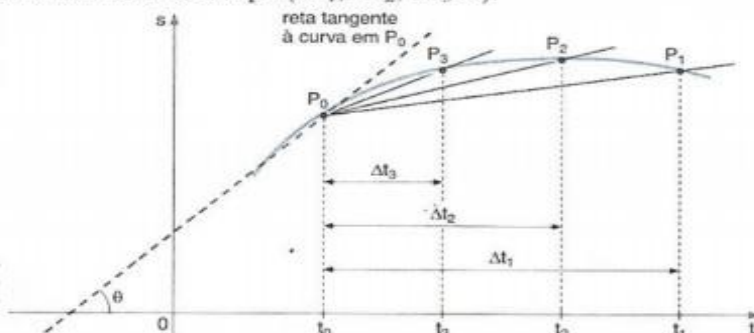
Consideremos uma partícula em movimento, numa trajetória qualquer, em relação a um dado sistema de referência. A Fig. 6 é o diagrama horário do espaço dessa partícula.

Tomemos uma sequência de intervalos de tempo ($\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3 \dots$) de tal maneira que cada um deles seja menor que o seu antecedente, isto é, $\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3 \dots$

Como sabemos, o coeficiente angular de cada uma das retas secantes ao gráfico ($\vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}, \vec{P_0P_3} \dots$) é a medida das velocidades escalares médias ($v_{m1}, v_{m2}, v_{m3} \dots$), nos respectivos intervalos de tempo ($\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3 \dots$).

À medida que esses intervalos de tempo vão diminuindo, os pontos $P_1, P_2, P_3 \dots$ aproximam-se de P_0 e as retas ($\vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}, \vec{P_0P_3} \dots$) tendem à tangente que passa por ele (P_0).

Fig. 6 Diagrama horário do espaço mostrando intervalos de tempo sucessivamente decrescentes e tendendo a zero. As secantes tendem à tangente em P_0 .



Por outro lado, a velocidade escalar instantânea é definida pelo limite do quociente entre a variação de espaço Δs e o intervalo de tempo Δt , quando este tende a zero:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Do exposto, podemos concluir que a velocidade escalar instantânea, no instante t_0 , pode ser medida pelo coeficiente angular ($\text{tg } \theta$) da reta tangente no ponto P_0 .

$$v \stackrel{N}{=} \text{tg } \theta \quad (\text{para } t = t_0)$$

Fonte: Calçada; Sapaio, 1998 (p. 117).

Na Figura 8, vemos que a interpretação geométrica da derivada foi discutida apenas na página 117. Isso veio depois de uma sequência de ensino de tópicos anteriores. O capítulo intitulado "Diagramas de tempo" pode vir antes de outros conteúdos se quisermos introduzir a interpretação geométrica da derivada mais cedo.

Seguindo a sequência valiosa do livro de Cinemática, escrito por (CALÇADA; SAMPAIO, 1998), vemos o importante papel da Física no começo do estudo de derivadas. Os autores mostram esse conhecimento inicial de Cálculo em toda a coleção Física Clássica, que tem 5 volumes. Nela, a taxa de variação instantânea é a derivada de uma função. Quando os autores precisaram da derivada de uma função transcendental, como as trigonométricas, não se preocuparam em fazer demonstrações. Apenas informaram que, por exemplo, a derivada do seno é o cosseno.

5.0.2 Proposta direcionada ao primeiro ano do Ensino Médio - Matemática

A derivada de uma função polinomial é familiar aos estudantes e, com aplicações na Física, é utilizada para definir a velocidade escalar instantânea. Um exemplo específico, relacionado às funções afim e quadrática, pode ser um excelente ponto de partida: Qual é a fórmula da linha tangente à parábola em um determinado ponto?

O problema a seguir (Problema 1) será resolvido primeiro sem usar a derivada

(Resolução 1). Isso será feito como um exercício comum que vemos nas aulas sobre funções quadráticas. Depois, resolveremos usando Cálculo (Resolução 2).

Problema 1: Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função polinomial do 2º grau $f(x) = x^2 - 6x + 1$ no ponto $(4, -7)$.

Solução 1: Seja $y = ax + b$ a equação procurada. O problema estará resolvido se determinarmos os valores de a e b . É imediato que a reta procurada tem equação $y - (-7) = m(x - 4) \Rightarrow y = mx - 4m - 7$. Onde m é o coeficiente angular da reta em questão. Para que exista ponto em comum entre a reta e a parábola, o sistema a seguir deve ser satisfeito:

$$\begin{aligned} \square & y = x^2 - 6x + 1 \\ \square & y = mx - 4m - 7 \end{aligned}$$

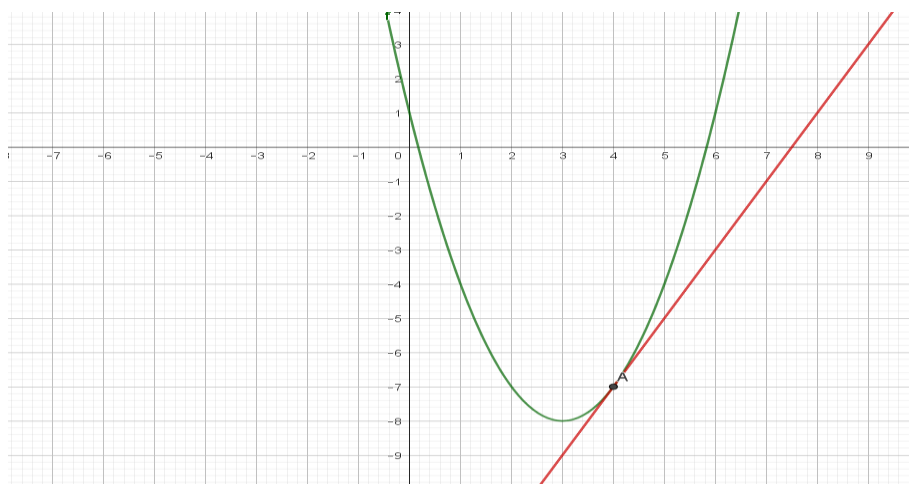
Ou seja:

$$x^2 - 6x + 1 = mx - 4m - 7 \Rightarrow x^2 - (6 + m)x + 4m + 8 = 0.$$

Assim, para que exista apenas um ponto em comum entre a reta e a parábola, devemos ter apenas uma raiz para equação do segundo grau em destaque, acima, ou seja, devemos ter $\Delta = 0$. Portanto, $-(6 + m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4m + 8) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2$. Assim, a equação da reta tangente é $y = 2x - 15$.

Através do programa GeoGebra, podemos confirmar que a linha reta e a parábola se cruzam em apenas um ponto, que é $A = (4, -7)$, e esse é o ponto de tangência, conforme ilustrado na Figura 9.

Figura 9: Solução visual da reta tangente com o uso do GeoGebra.



Fonte: Produzida pelo autor, 2025

A verificação da solução pelo GeoGebra é um instrumento valioso que contribui significativamente para o entendimento dos estudantes em matemática. Ao utilizar essa plataforma interativa, os alunos podem visualizar conceitos abstratos de forma concreta, tornando o aprendizado mais dinâmico. O GeoGebra permite que os estudantes explorem funções, gráficos e construções geométricas, promovendo a prática do raciocínio lógico. Essa ferramenta não só ajuda na verificação de respostas, mas também estimula a curiosidade e a autoconfiança na resolução de problemas, facilitando uma compreensão mais profunda dos tópicos estudados e enriquecendo a experiência educativa.

Com certeza Integrar as ferramentas do Cálculo traz uma nova dimensão ao entendimento do problema. Após a professora apresentar a solução do problema da reta tangente, utilizar a derivada como uma alternativa para resolver a questão poderá não apenas enriquecer a aula, mas também proporcionar aos alunos uma compreensão mais profunda do conceito. A derivada oferece um método sistemático para encontrar a inclinação da reta tangente em um ponto específico, e esse contraste entre os métodos pode estimular o pensamento crítico e a curiosidade dos alunos em relação aos conceitos matemáticos.

Solução 2:

A reta procurada tem equação $y = mx - 4m - 7$, onde m é o seu coeficiente angular. No entanto, o coeficiente angular da reta tangente é a derivada da função f no ponto de abscissa $x = 4$. Portanto, $\frac{df}{dx} = 2x - 6$, donde $m = 2 \cdot 4 - 6 = 2$. Portanto, a equação procurada é da forma $y = 2x - 15$.

Acabamos, incentivamos os estudantes a se questionarem sobre a razão por trás da solução aparentemente simples que foi apresentada, utilizando um conceito matemático conhecido como derivada. Eles inicialmente viam a derivada apenas como uma ferramenta aplicável na Física. Nesse contexto, chegou o momento em que o(a) professor(a) de Matemática introduzirá a derivada de uma função de forma mais abrangente. A taxa de variação instantânea, que na Física é entendida como a velocidade ou aceleração de um objeto em um dado instante, pode ser calculada para qualquer função, desde que certas condições sejam atendidas, embora essas condições não serão discutidas neste momento.

Uma análise, começando com os conceitos da Física, é imprescindível. A derivação de funções polinomiais precisa ser praticada, e o resultado subsequente deve ser mostrado:

Proposição 1: A derivada da função f no ponto de abscissa x_0 é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ neste ponto, isto é, $(x_0, f(x_0))$ é o ponto de tangência.

Observa-se que o resultado obtido está de acordo com o apresentado na página 117 do livro Cinemática, conforme ilustrado na Figura 6, onde se demonstra, no contexto do movimento dos corpos, que:

A velocidade escalar instantânea, no instante t_0 , é igual à derivada do espaço nesse instante, e pode ser medida pelo coeficiente angular ($\tan\theta$) da reta tangente no ponto P_0 .

Embora o resultado desejado já tenha sido obtido na disciplina de Física, é fundamental que o(a) professor(a) de Matemática reforce esse aprendizado. A repetição da demonstração, assim como foi feita em Física, pode ser benéfica, pois a conexão prática com o cotidiano dos alunos favorece a compreensão.

Este resultado específico é crucial, pois solidifica o entendimento do conceito de reta tangente, um tópico matemático que é frequentemente desafiador. Além disso, essa abordagem interdisciplinar ajuda os alunos a verem a aplicabilidade da Matemática em contextos fora da sala de aula, enriquecendo seu aprendizado e engajamento.

Proposição 2: Seja $f(x)$ uma função derivável em x_0 . Então, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é dada por:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

onde $f'(x_0)$ representa a derivada da função $f(x)$ no ponto x_0 , e corresponde ao coeficiente angular da reta tangente.

É bastante eficiente construir certos resultados relacionados à função polinomial do segundo grau antes de introduzir o conceito de derivada. Isso foi exemplificado no estudo do problema da reta tangente, permitindo que os alunos compreendam aspectos fundamentais como os intervalos de crescimento da função, o vértice da parábola, e os pontos de máximo ou mínimo utilizando métodos tradicionais. Após essa exploração inicial e prática com esses conceitos, podemos, então, apresentar as mesmas questões utilizando a derivada, o que facilitará a obtenção dos resultados e proporcionará uma compreensão mais aprofundada dos comportamentos da função.

A intuição e o apelo visual são fundamentais para facilitar a compreensão de conceitos matemáticos, especialmente ao tratar de aplicações práticas da derivada. É importante que, ao ensinar a alunos do Ensino Médio, se priorize uma abordagem mais acessível e menos técnica, evitando demonstrações formais que podem confundir ou desmotivar os estudantes. Focar em exemplos visuais e situações do cotidiano pode ajudar a consolidar o entendimento. Dessa maneira, os alunos não apenas aprendem a derivada, mas também podem intuitivamente conectar o conceito a problemas reais, permitindo uma assimilação mais efetiva e duradoura do conhecimento.

Vamos analisar o Problema 2 como um exemplo ilustrativo, no qual são apresentados diferentes caminhos possíveis para aplicar a derivada na resolução de questões relacionadas à função polinomial do segundo grau.

Problema 2: Dada a função polinomial do 2 grau $f(x) = -x^2 + 7x - 10$, determine, com o auxílio da derivada:

- a) os intervalos de crescimento e decrescimento;
- b) as coordenadas do ponto de ordenada máxima;

Solução :

Conforme a proposta apresentada, os estudantes já reconhecem que a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $a < 0$, possui um gráfico em forma de parábola. Eles também compreendem que o valor máximo de $f(x)$ ocorre no vértice da parábola, cuja coordenada é dada por $V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$.

$$2a \quad 4a$$

Além disso, eles sabem que a função é crescente nos valores de x menores que $-\frac{b}{2a}$, e decrescente quando x é maior que esse mesmo valor. A partir da análise do gráfico dessa função, que já é familiar para os alunos, torna-se simples identificar os intervalos em que ela cresce e decresce.

Atualmente, compreende-se que a derivada de uma função $y = f(x)$

corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao seu gráfico em um determinado ponto. Assim, com base em uma revisão adequada de trigonometria básica — conteúdo já abordado no 9º ano do Ensino Fundamental —, os itens (I), (II) e (III), juntamente com a

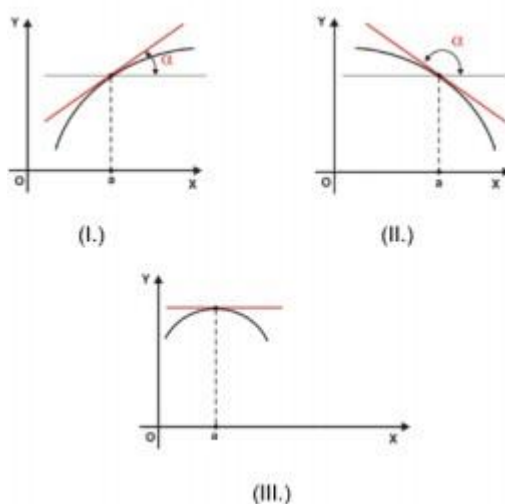
Figura 10, apresentam um resultado relevante. Esse resultado estabelece uma relação entre o sinal da derivada da função em um ponto e o ângulo formado pela reta tangente ao gráfico nesse mesmo ponto.

Seja α o ângulo, no sentido anti-horário, entre o eixo das abscissas e a reta tangente ao gráfico de uma função quadrática $f(x)$, no ponto $(a, f(a))$, e seja $m = \tan \alpha = f'(a)$ o coeficiente angular dessa reta.

É certo que a derivada dessa função no ponto de abscissa a , ou seja, $f'(a)$, é tal que:

- (I) Se α é agudo, então $\tan \alpha > 0$, ou seja, $f'(a) > 0$.
- (II) Se α é obtuso, então $\tan \alpha < 0$, ou seja, $f'(a) < 0$.
- (III) Se $\alpha = 0^\circ$, então $\tan \alpha = 0$, ou seja, $f'(a) = 0$.

Figura 10: Estudo do sinal da derivada.



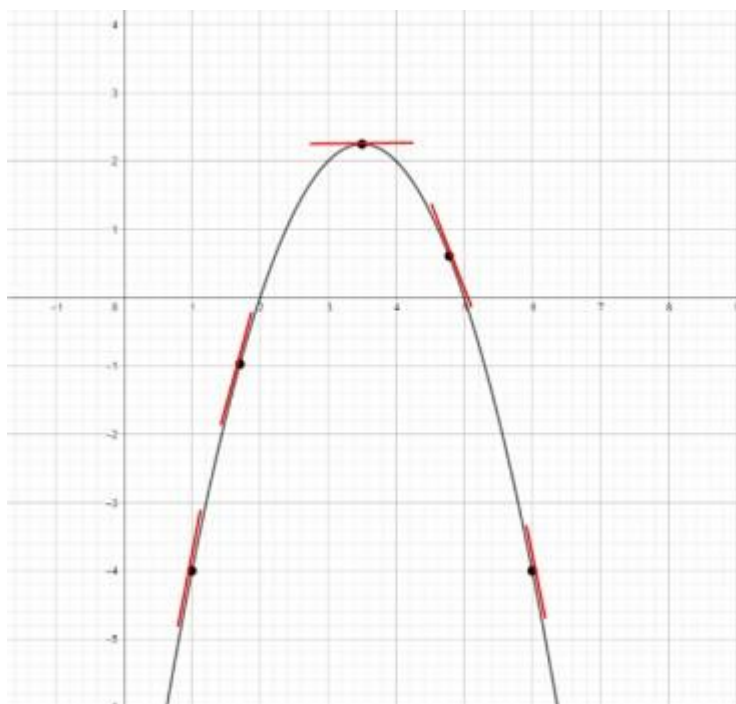
Fonte: Produzida pelo autor, 2025.

O gráfico (III.) da Figura 10 ilustra um conceito fundamental em cálculo: a mudança de comportamento da função em relação à sua derivada. Quando a derivada atinge o valor de zero, isso indica um ponto crítico, onde ocorre uma transição no crescimento da função. Se a derivada muda de positiva para negativa, a função, que anteriormente estava crescendo, começará a decrescer. Da mesma forma, se a derivada muda de negativa para positiva, a função que estava decrescendo começará a crescer. Esses pontos são cruciais para entender o comportamento da função e identificar máximos e mínimos locais, aspecto que será explorado em maior detalhe adiante.

A Figura 11 apresenta o gráfico da função quadrática $f(x) = -x^2 + 7x - 10$, relacionado ao exercício proposto. Nela, observam-se, em destaque vermelho, diversas

retas tangentes que tocam o gráfico em pontos específicos.

Figura 11: Representação gráfica da função $f(x) = -x^2 + 7x - 10$.



Fonte: Produzida pelo autor, 2025.

A Figura 10 foi elaborada com o objetivo de proporcionar uma compreensão mais abrangente do exercício proposto. Observa-se que, ao combinarmos as três representações gráficas nela contidas, obtemos, de forma aproximada, o gráfico apresentado na Figura 11.

Assim, compreendidas as implicações (I), (II) e (III), e com base na análise dos respectivos gráficos, espera-se que os estudantes resolvam o problema conforme descrito a seguir.

Solução: Seja a função quadrática definida por:

$$f(x) = -x^2 + 7x - 10$$

Sua derivada é:

$$f'(x) = -2x + 7$$

a) Intervalos de Crescimento e Decrescimento

A função estará *crescente* quando:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow -2x + 7 > 0 \Rightarrow x < 3,5$$

E estará *decrescente* quando:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow -2x + 7 < 0 \Rightarrow x > 3,5$$

b) Determinação da Ordenada Máxima da Parábola

Para encontrar o ponto de máximo, igualamos a derivada a zero:

$$f'(x) = -2x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} = 3,5$$

Substituímos o valor de x na função original:

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{7^2}{2} + \frac{7}{2} - 10$$

$$= -\frac{49}{2} + \frac{49}{2} - 10 = -10 = 2,25$$

Portanto, o ponto de ordenada máxima da parábola é:

$$(3,5 ; 2,25).$$

A representação gráfica da parábola com concavidade voltada para cima, juntamente com o desenho das retas tangentes, permite compreender de forma clara que os intervalos de crescimento e decrescimento da função quadrática seguem diretamente o comportamento do sinal de sua derivada, conforme ilustrado no exercício anterior.

Observa-se que o software GeoGebra também pode ser uma valiosa ferramenta para professores de Física na elaboração de esboços gráficos. No contexto do Ensino Médio, é comum que a análise de gráficos em Física anteceda o estudo formal de gráficos de funções em Matemática.

Até o momento, estamos abordando a função polinomial do segundo grau, cujo gráfico, especialmente no que diz respeito à concavidade, já é familiar aos estudantes. Esse conhecimento permite que eles identifiquem se a função apresenta um ponto de máximo ou de mínimo. Tal entendimento decorre diretamente do sinal do coeficiente de x^2 , o qual, mesmo sem uma justificativa mais elaborada, fornece essa informação essencial.

É possível determinar, com base nos sinais da derivada, que uma função polinomial do segundo grau $y = f(x)$ atinge um valor máximo em um ponto x_0 quando são satisfeitas duas condições essenciais:

- $f'(x_0) = 0$

- Para $x < x_0$, a função f é crescente, ou seja, $f'(x) > 0$ e, para $x > x_0$, a função f é decrescente, ou seja, $f'(x) < 0$

No primeiro ano do Ensino Médio, introduzimos o conceito de derivada de funções polinomiais com o apoio da Física, focando no cálculo, interpretação geométrica e aplicações práticas, evitando formalismos e aproveitando os conhecimentos prévios dos alunos em contextos sem o uso explícito do Cálculo.

Para conteúdos como funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, considerados nesta etapa, optamos por não abordar formalmente o cálculo de suas derivadas devido às particularidades envolvidas. No entanto, os professores podem citar, por exemplo, que a derivada de $f(x) = \sen x \Rightarrow f'(x) = \cos x$, e até apresentar uma tabela com as principais derivadas. Assim, iniciamos esse percurso formativo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, propomos uma sequência de conteúdos voltados ao Cálculo Diferencial, com o objetivo de proporcionar aos estudantes do Ensino Médio uma formação mais ampla. A intenção é capacitá-los a interpretar certos problemas matemáticos e também de outras áreas do conhecimento por meio de uma ferramenta acessível, porém extremamente poderosa: a derivada. Essa abordagem permitirá que os alunos compreendam melhor o comportamento de funções contínuas, revelando informações valiosas por meio de um raciocínio matemático eficaz.

Não propomos a substituição dos conteúdos tradicionais da Matemática do Ensino Médio por tópicos de Cálculo Diferencial. Ao contrário, buscamos apresentar o Cálculo como um recurso adicional dentro da disciplina de Matemática, oferecendo uma alternativa eficaz para a resolução de determinados problemas. Acreditamos que, ao ter contato com essa ferramenta, os estudantes poderão reconhecer seu potencial e compreender que, em um contexto mais abrangente, o Cálculo representa uma das abordagens mais poderosas e apropriadas para a análise de diversas situações.

Constatamos que a simples aplicação da derivada de uma função, aliada à análise do sinal obtido, geralmente é suficiente para responder à maioria das questões relacionadas ao comportamento dessa função. Sem os instrumentos do Cálculo, muitos conteúdos do Ensino Médio são explorados de forma limitada, com explicações incompletas. Isso acaba por prender os estudantes a fórmulas prontas, cuja fundamentação, quando apresentada, exige caminhos mais longos ou recursos bastante específicos como observamos na resolução de problemas de máximos e mínimos sem o uso do Cálculo.

A partir dessa perspectiva, delineamos os principais tópicos relacionados ao estudo de derivadas, voltados aos alunos do primeiro ano do Ensino Médio que manifestarem interesse ou necessitarem dessa ferramenta em seus estudos futuros. Alinhada às diretrizes da BNCC, essa abordagem propõe uma visão mais abrangente do conteúdo, fundamentada em novas propriedades matemáticas, especialmente aquelas oriundas dos conceitos de limites e continuidade. Assim, é fundamental que todos os estudantes do Ensino Médio tenham acesso ao estudo do Cálculo. A intenção é tornar o conceito de derivada tão familiar quanto o de função, integrando-o ao vocabulário matemático cotidiano dos alunos.

Espera-se que o domínio do conceito de derivada por parte dos estudantes sirva como um alicerce sólido para que possam prosseguir de maneira mais segura em seus estudos no ensino superior. Essa preparação se mostra especialmente relevante diante dos dados estatísticos atuais, que revelam um desempenho insatisfatório em disciplinas iniciais como Cálculo Diferencial e Integral I, realidade evidenciada em estudos como o de (ROSA; ALVARENGA; SANTOS, 2019), que apontam altos índices de reprovação e dificuldades generalizadas entre os alunos dos cursos das áreas de exatas.

Os estudantes do terceiro ano do Ensino Médio que optarem por uma formação mais voltada à Matemática e suas tecnologias terão, ao se dedicarem ao estudo do Cálculo, uma base sólida no entendimento das funções, construída, sobretudo, pelo tempo destinado à exploração do conceito de derivada. Dessa forma, ao ingressarem no ensino superior, mesmo diante da densidade dos conteúdos tratados em Cálculo I, que abrange desde os fundamentos teóricos de limite e continuidade até as aplicações práticas da derivada, esses alunos estarão mais maduros e familiarizados com grande parte dos tópicos abordados. Isso os colocará em posição favorável para alcançar um bom desempenho não apenas na disciplina de Cálculo, mas também nas demais áreas que utilizam essa ferramenta como recurso essencial.

Para os estudantes do Ensino Médio que optaram por uma carga horária ampliada em Matemática, há ainda a possibilidade de introduzir o estudo da integral. Ao apresentar a integração como operação inversa da derivação, com foco na obtenção da função primitiva, o processo se torna acessível aos alunos que já dominam as regras de derivação. Com poucas aulas, é possível introduzir noções sobre a diferencial de uma função e explorar o cálculo de áreas, tanto por meio de somatórios quanto utilizando a integral definida.

De fato, a implementação de uma abordagem mais abrangente do Cálculo enfrenta diversos obstáculos. Um dos principais desafios é a formação precária dos alunos no Ensino Fundamental, especialmente em escolas públicas, onde muitos estudantes recebem uma educação insuficiente em matemáticas básicas. Isso resulta em lacunas significativas no conhecimento que dificultam a transição para conceitos mais complexos no Ensino Médio. Para superar isso, será necessário um investimento contínuo em formação de professores e recursos educacionais, além de tempo e esforços coletivos para moldar um ambiente de aprendizado que prepare adequadamente todos os alunos.

Este trabalho se insere em uma ampla gama de iniciativas pedagógicas, como a de (SOUZA, 2019), que visam introduzir o Cálculo no currículo dos estudantes do Ensino Médio. O principal objetivo é proporcionar uma formação matemática sólida, que não apenas aprofunde os conhecimentos nas diversas áreas da Matemática, mas também prepare adequadamente os alunos para os desafios do Ensino Superior. Ao desenvolver competências analíticas e raciocínio lógico, essa formação contribui para a construção de uma base essencial às disciplinas acadêmicas futuras. Assim, espera-se que esses estudantes estejam mais bem preparados para enfrentar os rigorosos requisitos das universidades e dos cursos técnicos.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, P. M. C. **Um olhar docente sobre as tecnologias digitais na formação inicial do pedagogo**. 43 p. Tese (Tese (Mestra)) — Universidade Católica de Minas, Belo Horizonte, 2004, p.43. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Católica de Minas, Belo Horizonte, 2004. Citado na página 52.
- ÁVILA, G. O ensino do cálculo no segundo grau. **Revista do Professor de Matemática**, v. 18, p. 1–9, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 18.
- BARBOSA, G. O. **Raciocínio lógico formal e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral: o caso da Universidade Federal do Ceará**. 109 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Educação)) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 1994. Citado na página 23.
- BARDI, J. S. **A Guerra do Cálculo**. Rio de Janeiro: Editora Record, 2007. ISBN 9788501076809. Citado na página 15.
- BRASIL. **Decreto Nº 21.241, de 4 de abril de 1932. Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências**. [S.l.]: Câmara dos Deputados Brasília, 1932. Citado na página 18.
- BRASIL. **Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. 1996. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 23 dez. 1996, p. 33–41. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Citado na página 11.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular - Educação Infantil e Ensino Fundamental**. 2018. <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal.pdf>. Acesso em: 1 abr. 2025. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 27.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular - Educação Infantil e Ensino Fundamental**. 2018, p.14. <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal.pdf>. Acesso em: 1 abr. 2025. Citado na página 26.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular - Educação Infantil e Ensino Fundamental**. 2018, p.531. <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal.pdf>. Acesso em: 1 abr. 2025. Citado na página 28.
- BRASIL. **Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961. Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei nº 4.024,1961. <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l4024.htm>. Acesso em: 05 jul. 2025. Citado na página 23.
- BRASIL, Decreto nº 981. Decreto nº 981, de 8 de novembro de 1890. **Coleção de Leis do Brasil**, v. 11, p. 3474, 1890. Citado na página 18.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997, p.67. 67 p. Citado na página 52.

CALÇADA, C. S.; SAMPAIO, J. L. **Física Clássica, vol. 1: Cinemática, 2º grau**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1998. Citado na página 38.

CARNEIRO, J. P.; WAGNER, E. Vale a pena estudar cálculo. **Revista do Professor de Matemática**, n. 53, p. 18–21, 2004. Citado na página 30.

CARVALHO, J. B. P. d. As idéias fundamentais da matemática moderna. **Boletim do GEPEM**, v. 23, n. 1, 1988. Citado na página 22.

CHICA; BARNABÉ; TENUTA. Novos temas e reorganização das áreas são as principais novidades em matemática. **Nova Escola**, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

DEPUTADOS, B. C. dos. Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931. dispõe sobre a organização do ensino secundário. **Diário Oficial**, 1931. Citado na página 18.

DIAS, T. de O. **Cálculo no Ensino Médio: uma proposta alternativa para o atual currículo da educação básica no Brasil**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2014. Disponível em: <<http://www.locus.ufv.br/handle/123456789/25683>>. Citado na página 11.

ESQUINCALHA, A. da C.; BAIRRAL, M. A. Refletindo sobre análise real com professores da educação básica em um curso a distância. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 9, n. 3, 2019. Citado na página 22.

MACHADO, F. M. **Noções de Cálculo I no Ensino Médio: uma proposta de intervenção curricular**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2016. Orientador: Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato. Disponível em: <<https://observatoriodeeducacao.institutounibanco.org.br/api/assets/4e11aff4-9ca4-48c2-b884-b696f283ae57/>>. Citado na página 12.

MACHADO, N. J. **Cálculo no ensino médio: já passou da hora**. 2015. [Entrevista concedida a] Márcio Simões. Blog Imaginário Puro. Acesso em: 22 jun. 2025. Disponível em: <<https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-no-ensino-medio-ja-passou-da-hora/>>. Citado na página 34.

NASCIMENTO, R. M. d. **Uma Proposta Didática para o Cálculo no Ensino Médio**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Federal do Maranhão, São Luís, MA, 2024. Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa. Disponível em: <<https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/5675>>. Citado na página 13.

NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M. Transição do ensino médio para o superior: como minimizar as dificuldades em cálculo. **Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Petrópolis/RJ: SBEM**, p. 18, 2012. Citado na página 11.

PALIS, G. d. L. R. Computadores em cálculo uma alternativa que não se justifica por si mesma. **Temas e Debates**, v. 1, n. 6, p. 22–38, 1995, p.22. Citado na página 12.

PIRES, R. da C. **A Presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo**. Tese (Doutorado) — PUC/SP, 2006. Citado na página 22.

QUINTELLA, A. **Matemática: v.3, Ensino Médio**. 4. ed. São Paulo: Cia Editora Nacional, 1959. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.

REZENDE, W. M. O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. **Linguagem, Conhecimento, Ação—ensaios epistemologia e didática. Escrituras: São Paulo**, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.

ROSA, C. de M.; ALVARENGA, K. B.; SANTOS, F. F. T. dos. Desempenho acadêmico em cálculo diferencial e integral: um estudo de caso. **Revista Internacional de Educação Superior**, v. 5, p. e019023–e019023, 2019. Citado na página 48.

SILVA, E. P. d.; SCHUBRING, G. Cálculo em matemática: um assunto para o ensino em geral ou específico para o ensino técnico. **História da Educação**, SciELO Brasil, v. 20, n. 49, p. 65–80, 2016. Citado na página 12.

SOARES, F. S.; DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. Ensino de matemática no século xx – da reforma francisco campos à matemática moderna. **Revista Horizontes**, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7–15, 2004. Citado na página 23.

SOUZA, J. F. d. **Cálculo diferencial: uma proposta de abordagem no ensino médio**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)) — Mestrado Profissional em Matemática, 2019. Citado na página 48.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké**, 2008. Citado na página 19.

WEFFORT, H. F.; ANDRADE, J. P.; COSTA, N. G. **Currículo e educação integral na prática: uma referência para estados e municípios**. 1. ed. São Paulo: Associação Cidade Escola Aprendiz, 2019, p.17–18. Citado na página 26.

APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA DA ANIMAÇÃO SOBRE DEFINIÇÃO DE DERIVADA

A.1 USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS NO ENSINO

O ensino de Matemática tem sido alvo de debates por profissionais da Educação ao longo dos anos, porém os altos índices de fracasso escolar persistem. A recorrência da reprovação e a insatisfação dos alunos com os resultados obtidos em sala de aula revelam que essa disciplina ainda é percebida como desconectada da realidade dos estudantes, muitas vezes gerando sentimentos de medo e desmotivação. Nesse cenário, a utilização de tecnologias educacionais tem se mostrado uma aliada importante para tornar as aulas mais dinâmicas e interativas, contribuindo para transformar a visão negativa dos alunos em relação à Matemática. De acordo com (ARAÚJO, 2004, p.43) :

A tecnologia educacional, assim como a Didática, preocupa-se com as práticas do ensino, mas diferentemente dela inclui entre suas preocupações o exame da teoria da comunicação e dos novos desenvolvimentos tecnológicos: a informática, hoje em primeiro lugar, o vídeo, a TV, o rádio, o áudio e os impressos, velhos ou novos, desde livros até cartazes.

Dessa forma, a utilização de recursos tecnológicos na sala de aula exige que os professores estejam devidamente capacitados, dominando suas funcionalidades e sabendo aplicá-los com objetividade e praticidade. É fundamental que o docente conheça as potencialidades e limitações desses recursos, planeje bem suas aulas e esteja familiarizado com as ferramentas que pretende utilizar.

Entre os avanços tecnológicos aplicados à educação, o computador aliado a dispositivos móveis e plataformas digitais tornou-se uma ferramenta essencial no processo de ensino e aprendizagem, ampliando significativamente as formas de explorar e compreender conteúdos matemáticos.

Com o apoio de softwares matemáticos como o Geogebra, o Cabri-Géomètre e diversos aplicativos para smartphones, os recursos tecnológicos tornam-se ferramentas eficazes para a visualização e manipulação de símbolos e figuras geométricas. Essa integração favorece a construção de representações mentais e contribui para uma aprendizagem mais dinâmica e interativa. Além disso, proporciona ao aluno não apenas o desenvolvimento do raciocínio matemático, mas também o domínio do uso do computador como forma de inserção social.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental, 1997, p.67), o computador pode desempenhar diferentes funções no ensino de Matemática :

Como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem; Como auxiliar no processo de construção de conhecimento; Como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções; Como ferramenta para realizar determinadas atividades com o uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados, etc.

Dessa forma, nesta abordagem metodológica, os recursos tecnológicos ocupam papel de destaque como ferramentas auxiliares. A maior parte das construções desenvolvidas neste trabalho foi realizada utilizando o software Geogebra, escolhido por sua acessibilidade por ser de código aberto e por estar amplamente disponível nos computadores com sistema Linux Educacional, utilizado nas escolas públicas do Estado do Piauí, assim como em muitas outras regiões do Brasil. Além disso, o Geogebra também pode ser acessado gratuitamente por usuários de outros sistemas operacionais por meio do site oficial www.geogebra.org.

Além da versão para computadores, o Geogebra também está disponível para dispositivos móveis com sistemas Android, iOS e Windows Phone, o que amplia seu acesso entre os alunos que utilizam smartphones ou tablets. Cabe ao professor orientar os estudantes quanto à instalação de aplicativos voltados à construção de gráficos de funções. É importante, também, que o docente tenha domínio e familiaridade com o uso do Geogebra. Outro recurso tecnológico essencial para a aplicação desta proposta metodológica é o projetor multimídia.

Como parte da proposta metodológica apresentada neste trabalho, foi realizada a construção de uma representação gráfica utilizando o software GeoGebra, com o objetivo de ilustrar a definição de derivada por meio de recursos tecnológicos. Para isso, desenvolveu-se uma animação que evidencia a aplicabilidade da ferramenta na criação de representações dinâmicas e interativas de conceitos matemáticos. A seguir, são apresentados os comandos utilizados nessa construção, permitindo ao leitor compreender o passo a passo e reproduzir a atividade de forma autônoma.

N.	Nome	Ícon...	Definição	Comando
1	Ponto A			
2	Ponto B			
3	Ponto C			
4	Função f_3		Polinômio[{A, B, C}]	Polinômio[{A, B, C}]
5	Função f		$f(x) = \text{Se}[-2 \leq x \leq 10, f_3(x)]$	$f(x) = \text{Se}[-2 \leq x \leq 10, f_3(x)]$
6	Ponto x_2		(1, f(1))	(1, f(1))
7	Número a			
8	Ponto x_3		(a, f(a))	(a, f(a))
9	Reta b		Reta x_2x_3	Reta[x_2, x_3]
10	Função s		$s(x) = \text{Se}[-2 \leq x \leq 11, -(x(b)/y(b))x - z(b)/y(b)]$	$s(x) = \text{Se}[-2 \leq x \leq 11, -(x(b)/y(b))x - z(b)/y(b)]$
11	Reta c		Reta passando por x_2 e perpendicular a EixoX	Perpendicular[x_2 , EixoX]
12	Reta d		Reta passando por x_3 e perpendicular a EixoX	Perpendicular[x_3 , EixoX]
13	Reta e		Reta passando por x_2 e perpendicular a d	Perpendicular[x_2 , d]
14	Ponto D		Ponto de interseção de e, d	Interseção[e, d]
15	Ponto x_0		Ponto de interseção de c, EixoX	Interseção[c, EixoX]
16	Ponto f_0		Ponto de interseção de EixoY, e	Interseção[EixoY, e]
17	Segmento Δ_x		Segmento [x_2 , D]	Segmento[x_2 , D]
18	Segmento Δ_y		Segmento [D, x_3]	Segmento[D, x_3]

19	Ponto x_1		Ponto de interseção de d, EixoX	Interseção[d, EixoX]
20	Segmento h		Segmento $[x_2, x_0]$	Segmento $[x_2, x_0]$
21	Segmento i		Segmento $[x_3, x_1]$	Segmento $[x_3, x_1]$
22	Segmento g		Segmento $[x_2, f_0]$	Segmento $[x_2, f_0]$
23	Reta j		Reta passando por x_3 e perpendicular a EixoY	Perpendicular $[x_3, \text{EixoY}]$
24	Ponto f_1		Ponto de interseção de j, EixoY	Interseção[j, EixoY]
25	Segmento k		Segmento $[f_1, x_3]$	Segmento $[f_1, x_3]$
26	Valor Booleano l			
27	Texto texto1	ABC		
28	Texto texto2	ABC		
29	Texto texto2 ₁	ABC		
30	Número o		Δ_y / Δ_x	Δ_y / Δ_x
31	Texto texto3	ABC	$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} + \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$	$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} + \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$
32	Reta t		Tangente a f em $x = x(x_2)$	Tangente $[x_2, f]$
33	Texto texto5	ABC	$t(x) = t + t$	$t(x) = t + t$
34	Função p		$p(x) = \text{Se}[-2 \leq x \leq 11, -(x(t) / y(t)) x - z(t) / y(t)]$	$p(x) = \text{Se}[-2 \leq x \leq 11, -(x(t) / y(t)) x - z(t) / y(t)]$
35	Valor Booleano m			
36	Texto texto4	ABC	$s = t + b + t$	$s = t + b + t$
37	Valor Booleano n			
38	Valor Booleano q			