



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS CAMPO MAIOR
CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

VANESSA VITÓRIA BRITO DE SOUSA

**LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO SOBRE O USO DE DERIVADAS PARA O
ESTUDO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS COM APLICAÇÕES**

CAMPO MAIOR

2025

VANESSA VITÓRIA BRITO DE SOUSA

LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO SOBRE O USO DE DERIVADAS PARA O
ESTUDO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS COM APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso (artigo científico)
apresentado como exigência parcial para obtenção do
diploma do Curso de Licenciatura em Matemática do
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Piauí, Campus Campo Maior.

Orientador: Prof. Me. José Venâncio de Deus Leão

.

CAMPO MAIOR

2025

LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO SOBRE O USO DE DERIVADAS PARA O ESTUDO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS COM APLICAÇÕES

Vanessa Vitória Brito de Sousa¹
José Venâncio de Deus Leão²

RESUMO

É evidente a presença significativa dos problemas de máximos e mínimos em diversos aspectos da vida cotidiana e nas várias áreas do conhecimento científico. Em vista disso, foi investigado o assunto de derivadas, a fim de compreender sua origem, sua definição e aplicações, que são essenciais na análise matemática para discernir pontos críticos, ou seja, onde as funções atingem valores extremos no estudo de máximos e mínimos. Sendo assim o trabalho tem como objetivo geral compreender o uso das derivadas para o estudo de máximos e mínimos e como objetivos específicos conceituar derivadas, relacionar com máximos e mínimos e conhecer suas aplicações nas diferentes áreas de conhecimento. A pesquisa foi fundamentada nas contribuições de autores renomados na área de cálculo, Newton e Leibniz que foram responsáveis pelo surgimento da teoria acerca das derivadas, destacando sua aplicabilidade prática. Concentrando-se na utilidade do cálculo, especialmente em máximos e mínimos, almejamos evidenciar sua relevância no contexto acadêmico e analisar sua aplicação em diferentes contextos. Essa compreensão fornece ferramentas valiosas para abordar desafios práticos em diversas esferas, evidenciando a otimização de problemas reais. Desta forma, a pesquisa busca definir derivadas, para assim explicar sua relação com máximos e mínimos a fim de conhecer suas aplicações, mostrando que a Matemática está diretamente ligada a outras áreas.

***Palavras-chave:** Funções; máximos e mínimos; derivadas; cálculo.

¹ Graduanda em Licenciatura Plena em matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI. e-mail: vanessavitoriabrito@gmail.com.

² Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Piauí - UFPI. e-mail: jose.leao@ifpi.edu.br

ABSTRACT

It is evident the significant presence of maximum and minimum problems in several aspects of everyday life and in the various areas of scientific knowledge. In view of this, the subject of derivatives was investigated, in order to understand its origin, its definition, and applications, which are essential in mathematical analysis to discern critical points, that is, where functions reach extreme values in the study of maxima and minima. Therefore, the general objective of this work is to understand the use of derivatives for the study of maxima and minima, and as specific objectives, to conceptualize derivatives, relate them to maxima and minima, and understand their applications in different areas of knowledge. The research was based on the contributions of renowned authors in the field of calculus, Newton and Leibniz, who were responsible for the emergence of the theory about derivatives, highlighting its practical applicability. Focusing on the usefulness of calculus, especially in maxima and minima, we aim to highlight its relevance in the academic context and analyze its application in different contexts. This understanding provides valuable tools to approach practical challenges in various spheres, highlighting the optimization of real problems. In this way, the research seeks to define derivatives, in order to explain their relationship with maxima and minima, aiming to understand their applications, showing that Mathematics is directly connected to other areas.

Keywords: Functions, maximums and minimums; derivatives; calculation.

Data de aprovação: 13/08/2025

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho aborda sobre o estudo de derivadas, apresentando uma introdução detalhada com objetivo de apresentar definições essenciais e fundamentadas sobre esse importante conceito de cálculo diferencial. Neste sentido, é fundamental compreender a Matemática para além de operações numéricas, sendo uma linguagem capaz de interpretar, modelar e explicar fenômenos que envolvem variações e relações complexas.

Desse modo, ao adentrarmos no universo do cálculo diferencial, percebemos sua ampla aplicabilidade na resolução de problemas que envolvem máximos e mínimos, que nesse caso apresenta aplicações importantes na resolução de problemas de otimização.

A respeito de máximos e mínimos Rachelli e Martins, afirmam que:

Atualmente, os problemas de máximos e mínimos aparecem em diferentes contextos e, em geral, associados à análise do comportamento do gráfico de uma função e a problemas de otimização, em que se busca maximizar ou minimizar uma função em um determinado domínio. A compreensão dos conceitos envolvidos na solução destes problemas é imprescindível aos estudantes de diferentes áreas de conhecimento, especialmente das ciências naturais, exatas e tecnológicas, entre outras, em que as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral estão presentes. (Rachelli e Martins, 2021, p. 67).

De fato, o estudo de máximos e mínimos é essencial para compreender e resolver problemas em áreas como economia, física e engenharia, onde a otimização é frequentemente necessária. Entretanto, apesar de sua importância, nota-se uma dificuldade dos alunos, considerando que muitos professores não conseguem abordar esse conteúdo devido à grande demanda curricular, aliada às dificuldades de aprendizagem dos alunos, isso pode comprometer uma compreensão mais aprofundada sobre o assunto.

Apesar dos estudantes já terem tido contato com funções no ensino médio, é no ensino superior, principalmente nos cursos de ciências exatas, que o estudo das derivadas é introduzido. A abordagem prática e contextualizada dos conteúdos, acompanhadas de exemplos concretos, estimula a aprendizagem e evidencia a relevância do cálculo na resolução de problemas reais.

Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo geral compreender o uso das derivadas para o estudo de máximos e mínimos e como objetivos específicos conceituar derivadas, relacionar com máximos e mínimos e conhecer suas aplicações nas diferentes áreas de conhecimento.

Ao longo deste trabalho, serão apresentados conceitos fundamentais por meio de um levantamento bibliográfico sobre derivadas, que servirão de base para o estudo aprofundado de máximos e mínimos. Em seguida, serão discutidos exemplos de aplicação desses conceitos em diferentes áreas, com o objetivo de promover uma compreensão mais sólida e integrada.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO DE DERIVADAS

O cálculo de derivadas foi desenvolvido por vários matemáticos no decorrer da história. No entanto, teve dois pesquisadores que se destacaram nessa descoberta do cálculo diferencial que foram Issac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Ambos trabalharam em suas pesquisas individualmente, onde Leibniz fez contribuições importantes no trabalho de Newton e assim desenvolveram o cálculo diferencial no final do século XVII.

De acordo com Frazão (2025), em seus estudos sobre biografia de grandes autores, retrata que Isaac Newton foi um grande nome no século XVII se destacando nas áreas de matemática, física, astronomia, teologia entre outras áreas de conhecimento. Nasceu prematuro em 1642, na aldeia de Woolsthorp. Estudou na The King's School e, posteriormente, ingressou no Trinity College da Universidade de Cambridge em 1661, formando-se em 1665. Durante a epidemia de peste bubônica, entre 1665 e 1667, afastado da universidade, realizou suas principais descobertas científicas, como a lei da gravitação universal, as leis da mecânica, o cálculo diferencial e integral, e estudos fundamentais em óptica.

Retornou a Cambridge em 1667 e, aos 26 anos, tornou-se professor de Matemática, sucedendo seu mentor Isaac Barrow. Em 1672, foi eleito membro da Royal Society, além disso representou Cambridge no Parlamento em duas ocasiões. Foi o primeiro cientista a receber o título de “Sir”, nomeado pela rainha Ana em 1705. Newton viveu de forma reclusa, mas ao falecer em 1727, aos 84 anos, foi homenageado com um funeral digno de um rei, refletindo sua importância na história da ciência.

Já em relação a Gottfried Wilhelm von Leibniz, Frazão (2024) também destaca sobre a importância desse autor que teve grande destaque na área da matemática, além de ser conhecido por ser um nomeado filósofo, nascido em Leipzig, na Alemanha em 1646. Órfão de pai ainda pequeno, foi educado pela mãe e demonstrou grande talento autodidata, especialmente em latim, grego e filosofia. Aos 14 anos, ingressou na Universidade de Leipzig, onde se formou em filosofia e obteve o grau de mestre em 1663. Posteriormente, tornou-se doutor em Direito pela Universidade de Altdorf.

Publicou sua tese sobre a arte combinatória em 1666, além disso, foi eleito membro da Royal Society após apresentar sua invenção de uma máquina de calcular. Leibniz também contribuiu com o teorema fundamental do cálculo, publicado em 1677, o que gerou disputa com Newton, devido a descobertas não publicadas.

Newton foi um dos grandes responsáveis pelo desenvolvimento do cálculo diferencial como meio para decifrar o movimento e a mudança, usando séries infinitas e equações diferenciais. Além disso, se destacou na sua aplicação do cálculo a problemas físicos e sua notação, que facilitou o uso. Por outro lado, Leibniz que fez um trabalho independente de Newton, mas que trouxe notações cruciais, complementando para o desenvolvimento do cálculo diferencial. Ele introduziu notações cruciais como o símbolo "d" para derivada e o símbolo "∫" para integral, que ainda são usados atualmente. Leibniz interpretava a derivada dy/dx como o quociente de duas quantidades infinitesimais, dy e dx , e estabeleceu regras para calcular derivadas de funções.

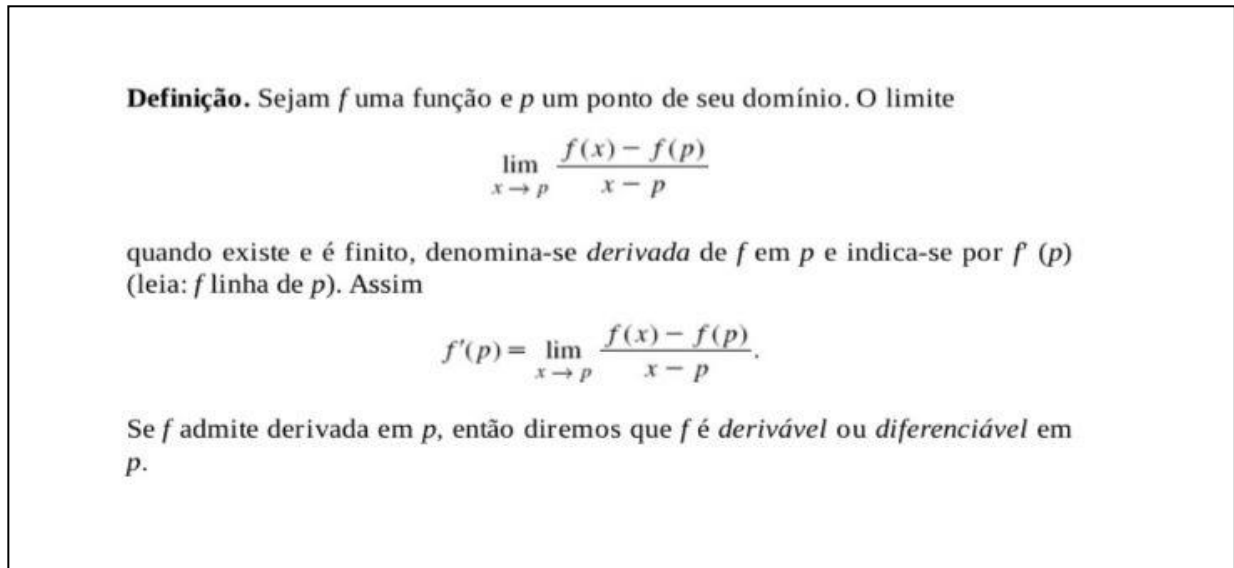
É notório que a matemática carrega consigo descobertas históricas durante a antiguidade, usada por grandes matemáticos como: Newton, Pitágoras, Leibniz dentre outros. Ao qual foram responsáveis por descobertas matemáticas que são vigoradas até hoje, além das grandes aplicações dessas descobertas em diferentes áreas do conhecimento.

O surgimento do Cálculo Diferencial está diretamente ligado à questão das tangentes. Desde a antiguidade, os gregos antigos conheciam a reta tangente como um segmento que intercepta uma curva em um único ponto.

Acredita-se que enquanto fazia a observação dos movimentos dos planetas, Newton tenha-se perguntado por que as órbitas dos planetas eram curvas, pois se fossem formadas por segmentos de retas seriam mais fáceis de serem estudadas. Daí surgiu a ideia de considerá-las como um conjunto de pequenas retas que, aproximadamente, representariam o movimento daquela curva. Assim, começo uma longa produção científica que engloba derivadas, integrais e outras coisas.

Nesta seção, iremos abordar a definição de derivadas e suas regras, provando alguns dos seus principais resultados. Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783) afirmou que a “definição mais precisa e elegante do cálculo diferencial” é que a derivada é o limite de certas razões quando os numeradores e denominadores se aproximam mais e mais de zero, e que este limite produz certas expressões algébricas que chamamos de derivada.

No início do século XIX, a definição moderna de derivada foi dada por Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857). Definição hoje encontrada nos mais diversos livros de Cálculo:

Figura 1 – definição de derivadas

Fonte: Guidorizzi, (2013, pag. 137)

Portanto, dizemos que f é derivável em um conjunto A , ao qual este conjunto está contido em D (sendo um domínio de f), se f for derivável em cada $p \in A$. Então, diremos que f é uma função derivável ou diferenciável se f for derivável em cada ponto de seu domínio. Diante desses conceitos, vejamos as seguintes propriedades dos limites que:

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}, \text{ onde } x = p + h \text{ e } h = x - p \Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

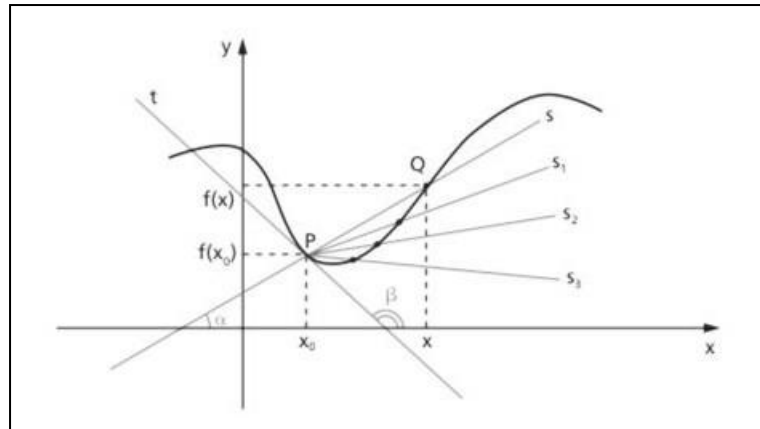
$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \quad \text{ou então} \quad f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Do tópico 2.1 ao 2.4 será abordado sobre interpretação geométricas, derivadas de algumas funções elementares e a demonstração de algumas regras de derivação de acordo com a referência [4].

2.1 Interpretações Geométricas

Consideremos o problema de definir a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, f(x_0))$. Tal reta deve passar pelo ponto $P(x_0, f(x_0))$ assim a reta tangente fica determinada se dissermos qual deve ser seu coeficiente angular.

Seja f uma função continua no intervalo aberto I . Admitamos que exista a derivada de f no ponto $X_0 \in I$. Dado um ponto $x \in I$, tal que $x \neq x_0$, consideremos a reta s determinada pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e o ponto $Q(x, f(x))$.

Figura 2 – coeficiente angular

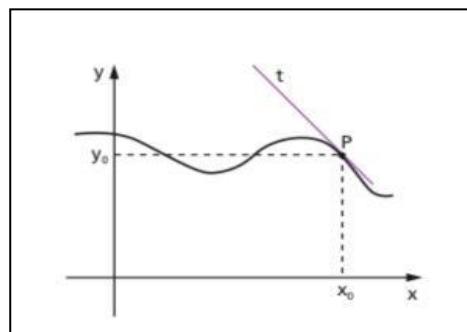
Fonte: Iezzi, Machado e Murakami, (2008, pág. 130).

Entretanto, a função f tende a ser contínua no intervalo I , logo, na condição que x tende a x_0 , Q muda de posição sobre o gráfico da função e fica perto de P . Dessa forma, a reta movimenta-se tomando as posições $s_1, s_2, s_3, \dots$ e tende a compatibilizar com a reta t , ao qual é tangente à curva no ponto P .

Então, como existe $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\lim \alpha) = \operatorname{tg} \beta$, a partir dos dados apresentando concluímos que a derivada de uma função f no ponto x_0 é correspondente ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 .

Para obter uma equação de uma reta ao qual passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e cujo coeficiente angular é m , será utilizado a fórmula da Geometria Analítica:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Figura 3 – representação geométrica

Fonte: Iezzi, Machado e Murakami, (2008, pág. 131).

Vejamos acima a representação da situação dada, que se trata da equação da reta tangente t ao gráfico de uma função f no ponto (x_0, y_0) , em que para saber se ele é derivável, basta fazer $x_0 = f(x_0)$ e $m = f'(x_0)$. Portanto a equação será:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

2.2 Função Derivada

Seja f uma função derivável em um determinado intervalo aberto I , onde para cada $x_0 \in I$ existe somente um único limite $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Então, podemos definir uma função da seguinte maneira:

$$f': I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Vejamos o cálculo da derivada de algumas funções elementares a seguir.

2.2.1 Derivada da função constante

Tomando uma função $f(x) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

2.2.2 Derivada da função potência

Tomando uma função $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, temos que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot \Delta x + \binom{n}{3}x^{n-3} \cdot (\Delta x)^2 + \dots + \binom{n}{n}(\Delta x)^{n-1}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \binom{n}{1}x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

2.2.3 Derivada da função seno

Tomando uma função $f(x) = \text{sen } x$, temos que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{sen}(x+\Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x} = \frac{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

$$f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

2.3 Regras de derivação

Vejamos em seguida a demonstração de algumas regras de derivação.

2.3.1 Regra da soma

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$, onde ambas são funções deriváveis em $I =]a, b[$. Então vamos provar que a função $f(x) = u(x) + v(x)$ é derivável em I , e sua derivada será:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)] = \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Tendo que u e v são duas funções variáveis, logo os limites de ambas do segundo membro são finitos; então, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é finito, ou seja, f é derivável em I .

Calculando os limites das funções, temos que:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Em suma:

$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Essa propriedade também pode ser usada para uma soma de n funções. Assim:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \Rightarrow f'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x)$$

2.3.2 Regra do produto

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ ambas as funções deriváveis em $I =]a, b[$. Então vamos provar que a função $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ é derivável em I , e sua derivada ser:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = \\ &= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)] = \\ &= \Delta u \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \Delta v \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Sabendo que u e v são duas funções deriváveis, ou seja, contínuas, os quatro limites do segundo membro são finitos e sendo assim, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é finito, ou seja, f é derivável em I .

Calculando os limites das funções, temos que:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Em suma:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

2.3.3 Regra do quociente

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em I e $v(x) \neq 0$ em I . Então vamos provar que a função $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ é derivável em I e sua derivada será:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \\ &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \\ &= \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \\ &= \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} - \frac{u(x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \\ &= \Delta u \cdot \frac{v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} - \frac{u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \cdot \Delta v \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Tendo que u e v são deriváveis e contínuas, os quatro limites do segundo membro são finitos e sendo assim, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é finito, ou seja, f é derivável em I .

Calculando os limites das funções temos que:

$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{v(x)}{[v(x)]^2} - \frac{u(x)}{[v(x)]^2} \cdot v'(x)$$

Em suma,

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

2.4 Derivadas de Ordem Superior

A respeito das derivadas de ordem superior, temos que se f for uma função diferenciável, sua derivada f' é também uma função, o que implica que f pode ter sua própria derivada, denota por $(f')' = f''$. Utilizando a notação de Leibniz, podemos escrever a derivada segunda como $\frac{d^2y}{dx^2}$, outra notação seria $f''(x)$. Entretanto, a segunda derivada é obtida por meio da derivação do resultado da primeira derivada.

Essa segunda derivada fornece informações sobre como a taxa de variação, ao qual é obtido através da primeira derivada, está mudando ao longo do eixo x . Desse modo, f'' esta diretamente ligada à concavidade da função, indicando se a curva é côncava para cima ou para baixo ou se não possui concavidade notável em um determinado ponto.

Além da segunda derivada, podemos seguir esse processo de derivação por meio de diferentes ordens. Vejamos algumas notações:

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ou $f''(x)$ (derivada de segunda ordem de f em relação à x);

$\frac{d^3y}{dx^3}$ ou $f'''(x)$ (derivada de terceira ordem de f em relação à x);

$\frac{d^ny}{dx^n}$ ou $f^n(x)$ (derivada de ordem n de f em relação à x).

2.5. Máximos e Mínimos

Algumas das aplicações mais elegantes de cálculo diferencial são os problemas de otimização. Listamos alguns problemas de otimização que pode ser resolvido através da teoria dos máximos e mínimos, com base na referência [7] vejamos alguns exemplos e conceitos:

- Qual é a forma de uma lata que minimiza o custo de manufatura?
- Qual é a aceleração máxima de um ônibus espacial?

- Qual o raio de uma traqueia contraída que expelle mais rapidamente o ar durante uma tosse?
- Sob que ângulo os vasos sanguíneos devem se ramificar de forma que minimizem a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue?

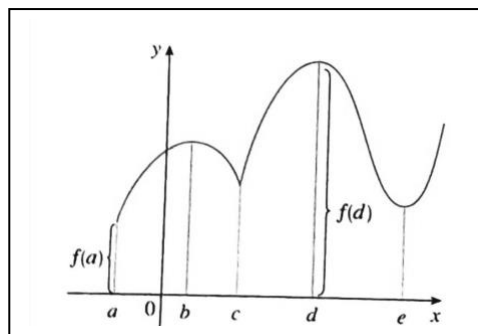
Esses problemas podem ser reduzidos ao encontrar os valores máximo ou mínimo de uma função. Vamos primeiramente definir máximos e mínimos.

Definição: Seja c um ponto no domínio D de uma função f . Então $f(c)$ é:

- valor máximo absoluto de f em D se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D ;
- valor mínimo absoluto de f em D se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D .

Um máximo ou mínimo absoluto às vezes é chamado de máximo ou mínimo global. Os valores máximos e mínimos de f são chamados de valores extremos de f . Vamos associar esses conceitos na seguinte figura.

Figura 4 – representação de máximos e mínimos absoluto



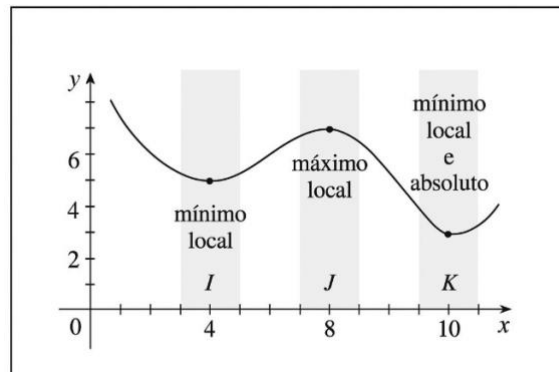
Fonte: Stewart, (2014, pág. 248).

Nessa figura 4, podemos perceber uma função f com máximos e mínimos absolutos em a . Onde $\underline{d}$ é onde se localiza o ponto mais alto e $\underline{a}$ o ponto mais baixo. A partir dessa figura, temos ainda duas características importantes onde se originam conceitos fundamentais, que é:

Definição: O valor de $f(c)$ é um

- Máximo local de f se $f(c) \geq f(x)$ quando x está próximo de c .
- Mínimo local de f se $f(c) \leq f(x)$ quando x está próximo de c .

Em vista desse conceito, vamos associá-lo a seguinte figura, para percebermos esse conceito por meio do gráfico a seguir.

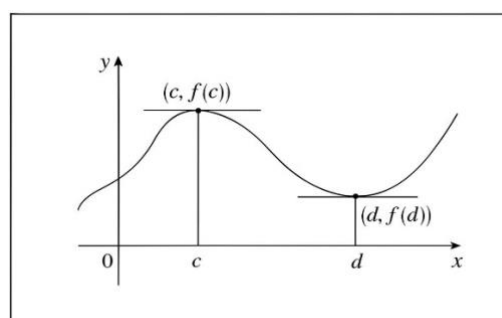
Figura 5 - representação de máximos e mínimos local

Fonte: Stewart, (2014, pág. 248).

Nessa figura 5, observamos que além dos máximos e mínimos absolutos, existem também os máximos e mínimos locais, onde são representados por valores que não transcendem os valores absolutos. Ainda analisando a mesma figura temos que I é um mínimo local, pois existe outro valor menor que I , representado pelo K , que chamamos de mínimo absoluto por não ter outro valor menor que o mesmo.

Fermat elaborou um método algébrico para encontrar os pontos de máximo e de mínimo de uma função. Ele determinava geometricamente os pontos da reta tangente ao gráfico que tinha inclinação zero, isto é, os pontos em que o coeficiente angular da reta tangente é zero. Esse método é basicamente utilizado ainda hoje.

Vejamos a representação desse conceito por meio da seguinte figura.

Figura 6 – Representação do Teorema de Fermat

Fonte: Stewart, (2014, pág. 250).

Nessa figura 6, podemos perceber a ideia de Fermat e Descartes, de encontrar as tangentes à curva, ou seja, onde a derivada da função é zero. Essa ideia foi uma contribuição importante para se formular o teorema de Fermat que veremos logo em seguir.

2.6.1 Teorema de Fermat

A seguir temos a demonstração do teorema de Fermat, com base na referência [7] que de acordo com Fermat, tem-se que se f tiver um mínimo ou máximo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$. A partir dessa definição, fundou-se a ideia de ponto crítico, onde ocorre quando a derivada é igual à zero ou é indefinida. Além disso, para determinar um ponto de máximo ou de mínimo, basta usar a segunda derivada, se for positiva, o ponto crítico é um mínimo local e se for negativa é um máximo local.

Demonstração: Suponhamos que f tenha um máximo local em c . Logo $f(c) \geq f(x)$ se x for próximo de c . Desse modo, se h for próximo de 0, com h sendo positivo ou negativo, então temos que:

$$f(c) \geq f(c + h)$$

Logo,

$$f(c + h) - f(c) \leq 0$$

Em seguida, dividimos ambos os membros por h , e temos:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Aplicando o limite a ambos os membros ficara da seguinte forma:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

Mas, uma vez que $f'(c)$ existe, temos

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Assim, mostramos que $f'(c) \leq 0$.

Se $h < 0$, então o sentido da desigualdade $f(c + h) - f(c) \leq 0$ é invertido quando dividimos por um número negativo, no caso, pelo h .

$$f(c + h) - f(c) \geq 0 \quad h < 0.$$

Tomando o limite pela esquerda temos:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0.$$

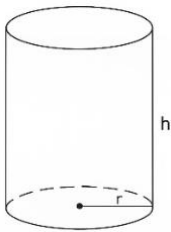
Mostrando que $f'(c) \geq 0$ e que $f'(c) \leq 0$. Uma vez que ambas as desigualdades sejam verdadeiras, a única possibilidade é que $f'(c) = 0$.

2.7 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Diante da contextualização de derivadas e sua relação com máximos e mínimos vejamos a seguir como podemos aplicá-la em outras áreas de conhecimento. Principais referências dessa seção [9], [8] e [1].

Aplicação 1

Uma lata cilíndrica sem tampa superior tem volume 5 cm^3 . Determinaremos as dimensões da lata, de modo que a quantidade de material para sua fabricação seja mínima.



Resolução:

Devemos minimizar a área. A área do cilindro e da tampa inferior são: $A_1 = 2\pi rh$ e $A_2 = \pi r^2$, respectivamente, onde r e h são o raio e a altura do cilindro; logo, devemos minimizar:

$$A = A_1 + A_2 = 2\pi rh + \pi r^2.$$

Mas o volume é 5; logo, $5 = V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{5}{\pi r^2}$; substituindo h na expressão a minimizar, temos:

$$A(r) = \frac{10}{r} + \pi r^2.$$

Derivando e igualando a zero:

$$A'(r) = -\frac{10}{r^2} + 2\pi r = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}.$$

Por meio da segunda derivada obtemos:

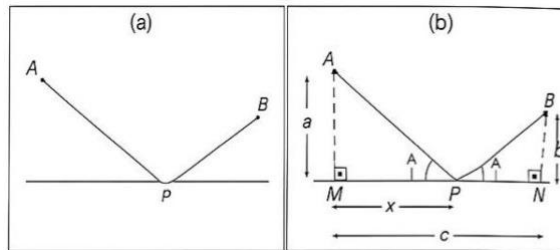
$$A''(r) = \frac{20}{r^3} + 2\pi > 0;$$

$r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$ é o ponto de mínimo e $h = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$. Logo, as dimensões da lata são

$$r = h = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}} \text{ cm}$$

Aplicação 2

A seguir temos um raio luminoso que parte do ponto A, atinge o ponto P, reflete-se e atinge o ponto B. Mostre que o ângulo de incidência é igual de reflexão, admitindo o Princípio de Fermat, segundo o qual o trajeto é feito em tempo mínimo (A e B estão em um mesmo meio).



Resolução: Sejam a, b e c as distâncias indicadas na figura a seguir, $a > 0, b > 0, c > 0$. Indiquemos por x a abscissa de P , em relação ao ponto M considerado como origem. Os ângulos $\hat{i}$ e $\hat{r}$ são respectivamente os ângulos de incidência e de reflexão.

Sendo v a velocidade da luz no meio em que se encontram A e B , o tempo gasto para percorrer AP é AP/v , e o gasto para percorrer PB é PB/v , de modo que o tempo total gasto no percurso de A a B é $AP/v + PB/v$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo na expressão do tempo total, vemos que este é uma função de x :

$$t(x) = \frac{1}{v}(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2})$$

para x real qualquer. Efetuando os cálculos, obtemos:

$$t'(x) = \frac{1}{v} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} \right)$$

$$t''(x) = \frac{1}{v} \left(\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} + \frac{b^2}{\sqrt{(b^2 + (c-x)^2)^3}} \right)$$

Claramente $t''(x) > 0$ para todo x real. Então, para aplicar o critério da concavidade, basta verificar $t'(x) = 0$ tem uma raiz real. Esta equação equivale a seguinte:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

Com estas condições, obteremos, elevando ao quadrado ambos os membros da equação anterior, e em seguida dividimos o numerador do primeiro por x^2 , e da mesma forma com relação $(c - x)^2$.

$$\frac{x^2}{a^2 + x^2} = \frac{(c - x)^2}{b^2 + (c - x)^2} \Rightarrow \frac{1}{a^2/x^2 + 1} = \frac{1}{b^2/(c - x)^2 + 1}$$

Comparando os denominadores obtemos:

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{(c - x)^2} \therefore \frac{a}{x} = \frac{b}{(c - x)}$$

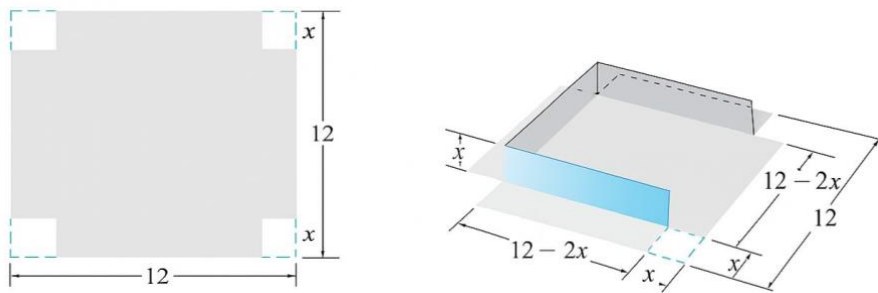
Onde usamos que $a, x, b, c - x$ são positivos. Assim, resulta facilmente que $x = ac/(a + b)$, que é, então, ponto de mínimo da função t . Portanto, chegamos numa semelhança de triângulos AMP e BNP

$$\frac{MP}{AP} = \frac{PN}{PB}$$

o que resulta na congruência dos ângulos $\hat{i}$ e $\hat{r}$, respectivamente de incidência e de reflexão.

Aplicação 3

Uma caixa sem tampa será construída recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho que mede $12 \times 12 \text{ m}$ e dobrando-se os lados para cima. Desta forma, mostraremos o tamanho que quadrados das bordas devem ter para que a caixa tenha a capacidade máxima. Vejamos a seguir.

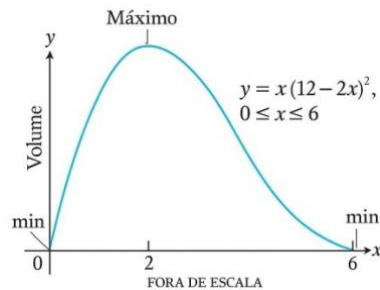


Resolução: Os quadrados nos cantos têm x metro de lado. O volume total da caixa é uma função dessa variável:

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

Como os lados da folha de estanho medem apenas 12 m de comprimento, $x \leq 6$ e o domínio de V é o intervalo $0 \leq x \leq 6$.

Um gráfico de V sugere um valor mínimo de 0 quando $x = 0$ e $x = 6$, e um máximo próximo de $x = 2$, para descobrirmos mais, examinaremos a primeira derivada de V em relação a x :



$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2) = 12(2 - x)(6 - x).$$

Das duas raízes, $x = 2$ e $x = 6$, apenas $x = 2$ está contida no domínio da função, fazendo parte da lista de pontos críticos. Os valores de V nesse único ponto crítico e nas duas extremidades são:

Valor no ponto crítico: $V(2) = 128$

Valores nas extremidades: $V(0) = 0, V(6) = 0$.

O volume máximo é de 128 m^3 . Os quadrados a serem recortados devem ter 2 m de lado.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto, o estudo das derivadas nos mostra que a matemática não se resume só a teorias. Já que através da análise de máximos e mínimos, foi possível compreender como essa ferramenta é útil para resolver problemas que envolvem otimização em diversas áreas do conhecimento. Assim como foi visto no cálculo que minimiza a produção de uma embalagem de tal forma que economize o material a ser utilizado, na demonstração do trajeto de luz segundo o princípio de Fermat, e na construção de estruturas com medidas que maximizem capacidade máxima de uma caixa sem tampa.

Na Física, por exemplo, as derivadas são fundamentais para entender o comportamento de grandezas em movimento, como a da velocidade que é por meio da primeira derivada e a aceleração que é por meio da segunda derivada. Já na Engenharia, são utilizadas para projetar sistemas eficientes, ou seja, de forma que se minimize perdas e maximize desempenhos. Na Economia, é usada de forma a analisar lucros e custos, prever tendências e tomar decisões estratégicas, baseada no comportamento de funções econômicas. Outra área a ser encontrada essa aplicação é em áreas de ciências da natureza como na Biologia, Química ou Medicina, contribuindo na modelagem de fenômenos complexos, como o crescimento populacional ou a taxa de difusão de substâncias.

Dessa forma, o ensino de derivadas, quando bem demonstrado, se torna mais fácil de se compreender, já que une teoria e a aplicação de problemas reais, despertando assim o interesse dos estudantes e mostrando a Matemática como uma linguagem que interpreta, modela e explica fenômenos. A compreensão dos conceitos de máximos e mínimos, mostrada por meio das derivadas, é um exemplo, já que ao ser explicado os conceitos essenciais foi mostrado a aplicação prática desse estudo.

REFERÊNCIAS

BOULOS, Paulo. **Cálculo diferencial e integral** vol.1. São Paulo: Pearson Makron Books, 1999.

IEZZI G., MACHADO N. J., MURAKAMI C. **Fundamentos da Matemática Elementar:** limites, derivadas e noções de integral. 6. ed. São Paulo: Saraiva Didáticos, 2008.

FRAZÃO, Dilva. **Gottfried Leibniz**. Disponível em: https://www.ebiografia.com/gottfried_leibniz/. Acesso em: 08 jul. 2025.

FRAZÃO, Dilva. **Isaac Newton**. Disponível em: https://www.ebiografia.com/isaac_newton/. Acesso em: 08 jul. 2025.

GUIDORIZZI H. L. **Um curso de cálculo**, vol. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

RACHELLI, Janice; MARTINS, P. D. C. Máximos e mínimos de funções: um estudo com base em problemas históricos. **Boletim Cearense de Educação e História da matemática** – v. 08, n. 24, 65–83, 2021. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/download/5359/4751/22998> Acesso em: 08 jul. 2025.

STEWART, James. **Cálculo I**, vol. 1. 7. ed.. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

THOMAS, George B., WEIR, Maurice D., & HASS, Joel. **Cálculo vol.1**. 12. ed. São Paulo: Pearson Education Brasil, 2012.

VILCHES, Mauricio A., CORRÊA, Maria Luiza. **Cálculo vol.1**. Rio de Janeiro: UERJ, [20-?]