



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ  
CAMPUS CAMPO MAIOR  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**FRANCISCO DE SALES OLIVEIRA FILHO**

**A CARNAÚBA EM CAMPO MAIOR – PI: UM ESTUDO MATEMÁTICO SOBRE A  
GESTÃO SUSTENTÁVEL DESTE RECURSO NATURAL**

**CAMPO MAIOR  
2025**

FRANCISCO DE SALES OLIVEIRA FILHO

A CARNAÚBA EM CAMPO MAIOR – PI: UM ESTUDO MATEMÁTICO SOBRE A  
GESTÃO SUSTENTÁVEL DESTE RECURSO NATURAL

Trabalho de Conclusão de Curso (artigo científico) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Campo Maior.

Orientador: Prof. Me. Fábio Barbosa de Oliveira.

CAMPO MAIOR  
2025

# A CARNAÚBA EM CAMPO MAIOR – PI: UM ESTUDO MATEMÁTICO SOBRE A GESTÃO SUSTENTÁVEL DESTE RECURSO NATURAL

Francisco de Sales Oliveira Filho<sup>1</sup>  
Fábio Barbosa de Oliveira<sup>2</sup>

## RESUMO

A Carnaúba é um recurso vegetal de grande valor econômico, ecológico e cultural na região de Campo Maior, no estado do Piauí. Diante do avanço da exploração e das preocupações com a sustentabilidade da espécie, este estudo teve como objetivo desenvolver um modelo matemático robusto para representar a dinâmica entre sua regeneração natural e a exploração humana. A metodologia baseou-se em revisão bibliográfica e na construção de um modelo quantitativo com base em dados oficiais, simulando diferentes cenários de extração. Os resultados revelaram que, nas condições atuais, o estoque da Carnaúba tende a se estabilizar em níveis baixos, o que pode comprometer sua função produtiva e ecológica a longo prazo. Por outro lado, cenários com manejo adequado mostraram que é possível alcançar equilíbrio e sustentabilidade. Conclui-se que a modelagem matemática é uma ferramenta útil para apoiar decisões relacionadas ao uso racional da Carnaúba, contribuindo para a preservação ambiental e o desenvolvimento local.

**Palavras-chave:** carnaúba; sustentabilidade; modelagem matemática; recursos naturais; manejo florestal.

## ABSTRACT

Carnauba is a plant resource of great economic, ecological, and cultural value in the region of Campo Maior, in the state of Piauí. Faced with the growing exploitation and concerns about the sustainability of the species, this study aimed to develop a robust mathematical model to represent the dynamics between its natural regeneration and human exploitation. The methodology was based on a bibliographic review and the construction of a quantitative model using official data, simulating different extraction scenarios. The results revealed that, under current conditions, the carnauba stock tends to stabilize at low levels, which may compromise its productive and ecological function in the long term. On the other hand, scenarios with proper management showed that balance and sustainability are achievable. It is concluded that mathematical modeling is a useful tool to support decisions related to the rational use of carnauba, contributing to environmental preservation and local development.

**Keywords:** carnauba; sustainability; mathematical modeling; natural resources; forest management.

Data de aprovação: 12/08/2025

---

<sup>1</sup> Graduando em Licenciatura em Matemática. IFPI Campus Campo Maior. E-mail: [sales.oliveira04@gmail.com](mailto:sales.oliveira04@gmail.com).

<sup>2</sup> Mestre em matemática. Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – Campus Campo Maior. E-mail: [fabio.barbosa@ifpi.edu.br](mailto:fabio.barbosa@ifpi.edu.br).

## 1 INTRODUÇÃO

A Carnaúba (*Copernicia prunifera*), frequentemente denominada “árvore da vida”, constitui um dos recursos naturais mais emblemáticos do estado do Piauí, com papel destacado na economia, na cultura e na preservação ambiental da região de Campo Maior. Reconhecida por suas múltiplas aplicações — da extração da cera até o uso das fibras e folhas em produtos artesanais e industriais —, a Carnaúba é fonte de renda para diversas comunidades locais, consolidando-se como um elemento essencial no cotidiano das populações rurais. Contudo, a crescente demanda por seus derivados, aliada a práticas extrativistas pouco sustentáveis, tem acendido alertas sobre o risco de esgotamento desse recurso natural.

A sustentabilidade da exploração da Carnaúba tornou-se um desafio contemporâneo, exigindo abordagens que combinem conhecimento técnico, consciência ambiental e planejamento a longo prazo. Nesse contexto, a modelagem matemática desponta como uma ferramenta eficaz para compreender as dinâmicas de crescimento, regeneração e extração da espécie, permitindo a previsão de cenários e a elaboração de estratégias de manejo sustentáveis.

Este trabalho adotou como base um modelo matemático descrito por uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), que incorpora simultaneamente a taxa de regeneração natural da Carnaúba e a pressão antrópica da extração. Esse modelo, de natureza não linear, permite simular diferentes contextos — desde cenários sustentáveis até situações de colapso — de acordo com os parâmetros definidos. Por sua capacidade de representar a evolução contínua do estoque de um recurso natural ao longo do tempo, o uso de uma EDO mostrou-se metodologicamente apropriado para o estudo da gestão da Carnaúba na região de Campo Maior – PI.

Diante desse cenário, o presente artigo buscou responder à seguinte pergunta de pesquisa: como a modelagem matemática pode contribuir para a previsão do esgotamento da Carnaúba e a formulação de estratégias sustentáveis de manejo na região de Campo Maior – PI? A escolha dessa abordagem se justifica pela sua relevância científica e prática, bem como pela escassez de trabalhos que associem modelagem matemática robusta à gestão de recursos naturais típicos do semiárido nordestino.

O objetivo geral desta pesquisa foi desenvolver um modelo matemático robusto, capaz de representar com precisão a dinâmica entre a regeneração natural

e a exploração econômica da Carnaúba, com o intuito de propor estratégias eficazes de manejo sustentável. Para atingir esse propósito, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Investigar a importância econômica, social e ecológica da Carnaúba na região de Campo Maior – PI;
- Levantar e sistematizar dados secundários sobre sua exploração ao longo da última década;
- Construir e aplicar um modelo matemático dinâmico para simular diferentes cenários de exploração e regeneração da Carnaúba;
- Analisar os resultados do modelo e propor diretrizes para o manejo sustentável da espécie.

A metodologia adotada envolveu pesquisa bibliográfica com abordagem qualitativa e quantitativa, além da formulação e análise de um modelo matemático teórico, capaz de representar o comportamento do estoque da Carnaúba ao longo do tempo. Este artigo está estruturado da seguinte forma: após esta introdução, apresenta-se o desenvolvimento, que abrange o referencial teórico, a construção do modelo matemático e a análise dos resultados; em seguida, são expostas as considerações finais e, por fim, as referências utilizadas.

## **2 DESENVOLVIMENTO**

### **2.1 REFERENCIAL TEÓRICO**

#### **2.1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO MANEJO SUSTENTÁVEL DA CARNAÚBA**

A modelagem matemática tem se destacado como uma importante ferramenta no estudo de fenômenos naturais, sociais e econômicos, ao possibilitar a representação, análise e previsão de comportamentos complexos a partir de equações e relações lógicas. No campo do manejo de recursos naturais, seu uso tem sido cada vez mais valorizado, sobretudo por permitir a simulação de cenários e a elaboração de estratégias de preservação ambiental baseadas em dados e projeções confiáveis (Silva, 2017).

Entre as diversas abordagens matemáticas existentes, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) ocupam um papel de destaque. Essas equações descrevem o comportamento de uma variável ao longo do tempo, levando em

consideração suas taxas de variação. No caso específico da Carnaúba, o uso de uma EDO possibilita compreender como o estoque da planta — representado pela biomassa, número de indivíduos ou área ocupada — evolui com o tempo, sob a influência de dois fatores principais: a regeneração natural da espécie e a extração realizada pelo ser humano.

A equação adotada neste estudo baseia-se no modelo logístico de crescimento populacional, com a adição de um termo que representa a extração. Sua forma geral é expressa por:

$$\frac{dC}{dt} = r \cdot C \cdot \left(1 - \frac{C}{K}\right) - h \cdot C$$

Onde:

- $C(t)$  representa o estoque de Carnaúba em função do tempo;
- $r$  é a taxa de regeneração natural da espécie;
- $K$  corresponde à capacidade de suporte ambiental da região;
- $h$  representa a taxa de extração anual do recurso.

O primeiro termo da equação,  $r \times C \times (1-C/K)$ , representa o crescimento logístico, um modelo amplamente aceito para descrever populações ou estoques que crescem rapidamente no início, mas desaceleram à medida que se aproximam de um limite ambiental. O segundo termo,  $h \times C$ , expressa a pressão extrativista humana, que reduz o estoque disponível proporcionalmente à sua quantidade.

Esse tipo de equação — de primeira ordem e não linear — é comum em modelos ecológicos e de recursos renováveis, sendo amplamente estudado em obras como a de Eliaquim Nabin Sampaio Matias, Jefika Lima e Fernando Fernandes (2020), no livro *Modelagem Matemática Aplicada ao Manejo de Recursos Renováveis*. Os autores explicam:

As equações diferenciais ordinárias permitem modelar fenômenos biológicos e ecológicos de forma contínua, levando em consideração as interações entre variáveis ambientais, taxa de crescimento e fatores de impacto antrópico. No contexto do manejo de recursos naturais, as EDOs se mostram especialmente eficazes por fornecerem instrumentos teóricos e computacionais capazes de prever o comportamento futuro de populações exploradas, considerando não apenas seu potencial de regeneração, mas também a pressão de consumo humano (Matias et al., 2020, p. 78).

Outro autor relevante é Warley Gramacho da Silva (2019), em *Modelagem Matemática Aplicada à Otimização e Análise de Processos*, onde defende o uso de

equações diferenciais em contextos industriais e ambientais como instrumento de previsão e controle. Segundo ele, a modelagem por EDOs permite simulações que “antecipam impactos, orientam decisões estratégicas e contribuem com políticas públicas fundamentadas” (Silva, 2019, p. 102).

A pertinência dessa abordagem também é destacada por Renata de Oliveira Silva (2017), que em *Modelagem Matemática – Um Método Científico de Pesquisa*, argumenta que a aplicabilidade das EDOs é particularmente eficaz em sistemas dinâmicos sujeitos a limites ambientais e ações humanas, como é o caso da Carnaúba.

Na literatura internacional, autores como Murray (2002), em *Mathematical Biology*, também apontam a relevância dos modelos logísticos com extração como ferramentas poderosas na ecologia aplicada. Embora o foco deste trabalho permaneça em fontes brasileiras, a solidez da abordagem encontra respaldo também em estudos internacionais.

Além de sua base teórica consolidada, o uso das EDOs neste trabalho justifica-se por sua capacidade de gerar simulações numéricas e qualitativas. Com valores estimados para os parâmetros  $r$ ,  $K$  e  $h$ , é possível projetar diferentes cenários:

- Sustentável: quando a regeneração natural supera a extração ( $h < r$ );
- Crítico: quando há equilíbrio instável entre extração e regeneração ( $h \approx r$ );
- Colapso: quando a extração excede a regeneração ( $h > r$ ).

Esses cenários serão discutidos adiante à luz da realidade da região de Campo Maior, possibilitando compreender as possíveis trajetórias do recurso caso não sejam adotadas estratégias eficazes de manejo.

Em síntese, a modelagem por equações diferenciais oferece uma estrutura matemática robusta, sensível às condições ecológicas e sociais, e alinhada às práticas sustentáveis de gestão dos recursos naturais. Ao aplicá-la ao contexto da Carnaúba no Piauí, este estudo busca contribuir para a construção de soluções fundamentadas e replicáveis em outras regiões que enfrentam desafios semelhantes.

### 2.1.2 HISTÓRIA E RELEVÂNCIA DA CARNAÚBA

A Carnaúba (*Copernicia prunifera*) é uma espécie nativa do semiárido nordestino e ocupou ao longo da história um lugar de destaque na paisagem, na cultura e na economia dos estados do Piauí, Ceará, Pernambuco e Rio Grande do Norte. Desde os

tempos coloniais, as populações indígenas e sertanejas já utilizavam seus subprodutos em diversas atividades do cotidiano, desde a alimentação até a construção civil. No decorrer dos séculos, sua importância aumentou com a valorização da cera de Carnaúba no mercado internacional, em especial a partir do século XIX.

No estado do Piauí, a Carnaúba foi um dos pilares da economia agroextrativista, particularmente na cidade de Campo Maior, onde a espécie encontrou condições ideais de solo e clima. A partir da extração da cera — realizada por meio do corte e secagem das folhas — estabeleceu-se uma cadeia produtiva que envolvia coletores, agricultores, atravessadores, industriais e exportadores. Segundo Pinto (2014), a Carnaúba passou a ser chamada de “árvore da vida”, não apenas por sua resistência às secas, mas pela multiplicidade de usos e sua capacidade de sustentar famílias inteiras nas zonas rurais do semiárido.

Além da cera, também foram aproveitados o tronco, as fibras, a palha e até as raízes da planta. Produtos como vassouras, cestos, telhas naturais, biofertilizantes e até componentes farmacêuticos derivaram da sua exploração. Como destacaram Carvalho e Gomes (2004), a utilização integral da planta tornou a Carnaúba uma espécie economicamente viável e ambientalmente estratégica.

A Carnaúba possui a peculiaridade de oferecer aproveitamento total. Sua folha fornece a cera, seu caule é usado na construção, suas fibras servem à indústria artesanal e suas raízes são aproveitadas em práticas agrícolas. Essa versatilidade, somada à resistência da planta ao clima árido, explica sua relevância histórica e econômica no interior do Nordeste (Carvalho; Gomes, 2004, p. 68).

A cidade de Campo Maior, no norte do Piauí, destacou-se como uma das principais regiões produtoras da cera de Carnaúba no Brasil. A economia local desenvolveu-se em torno dessa atividade, especialmente entre os meses de junho e outubro, período de colheita das folhas. De acordo com Fontenele de Carvalho (2008), milhares de trabalhadores atuaram direta ou indiretamente nesse ciclo produtivo, incluindo extrativistas, secadores, raspadores e transportadores. Muitos desses trabalhadores pertenciam a comunidades tradicionais e dependiam exclusivamente da Carnaúba como fonte de renda.

A economia da Carnaúba impulsionou o surgimento de uma cultura extrativista com características próprias. O modo de vida, o vocabulário e as técnicas repassadas entre gerações tornaram-se elementos identitários para muitas comunidades do semiárido, especialmente nas regiões de Campo Maior e Castelo do Piauí (Fontenele de Carvalho, 2008, p. 91).



No entanto, apesar de sua resistência climática, a Carnaúba mostrou-se vulnerável à exploração intensiva, sem práticas de manejo adequadas. O uso predatório e o corte excessivo de folhas comprometeram a regeneração da planta, o que levou à diminuição da produtividade em diversas áreas do Piauí. Estudos como o de Azevedo (2015) alertaram para a necessidade urgente de adoção de técnicas sustentáveis, como a poda seletiva, o respeito ao ciclo vegetativo da planta e a preservação de áreas de regeneração natural.

Do ponto de vista ambiental, a Carnaúba também desempenhou funções relevantes no ecossistema da caatinga. Sua copa densa e suas raízes profundas ajudaram a reter umidade no solo, prevenir erosões e servir de abrigo para inúmeras espécies da fauna local. Conforme destacou Veiga (2011), qualquer alteração significativa na estrutura da vegetação de Carnaúba poderia desencadear impactos ecológicos em cadeia.

A Carnaúba não é apenas um recurso econômico: ela representa um elo essencial na teia ecológica da caatinga. Sua retirada descontrolada pode resultar em empobrecimento do solo, perda da biodiversidade e redução da resiliência ambiental das regiões semiáridas (Veiga, 2011, p. 53).

Dessa forma, compreender a história e a relevância da Carnaúba não se limita ao resgate de um patrimônio cultural e econômico, mas se conecta diretamente à urgência de práticas sustentáveis que garantam sua permanência como recurso para as futuras gerações. O presente estudo, ao associar essa compreensão histórica à modelagem matemática, busca fornecer bases sólidas para o planejamento ecológico e econômico da região.

### **2.1.3 CONCEITOS DE SUSTENTABILIDADE E MANEJO DE RECURSOS NATURAIS**

A preocupação com a sustentabilidade ambiental consolidou-se, ao longo das últimas décadas, como um dos eixos centrais das políticas públicas, dos movimentos sociais e das pesquisas acadêmicas. No contexto do uso dos recursos naturais, o conceito de sustentabilidade passou a ser entendido como a busca por formas de exploração que não comprometam a capacidade de regeneração dos ecossistemas e nem prejudiquem as gerações futuras. Essa perspectiva ganhou força sobretudo após a publicação do relatório “Nosso Futuro Comum”, em 1987, elaborado pela Comissão Mundial sobre Meio Ambiente e Desenvolvimento da ONU.

No Brasil, a sustentabilidade ambiental assumiu contornos próprios, especialmente em áreas de vulnerabilidade ecológica como o semiárido nordestino. Nesse cenário, tornou-se indispensável adotar práticas de manejo racional dos recursos naturais, respeitando os ciclos ecológicos, os limites da natureza e as particularidades das comunidades que deles dependem. Segundo Almeida (2002), a sustentabilidade não se limita à conservação ambiental, mas incorpora também a dimensão social e econômica do desenvolvimento:

A sustentabilidade pressupõe uma relação equilibrada entre o ser humano e o meio ambiente. Isso implica não apenas preservar os ecossistemas, mas também promover justiça social, equidade no acesso aos recursos e participação ativa das comunidades na tomada de decisões (Almeida, 2002, p. 37).

O manejo de recursos naturais, por sua vez, diz respeito ao conjunto de estratégias que visam equilibrar a exploração e a conservação, garantindo que o uso atual não inviabilize o uso futuro. No caso da Carnaúba, isso significa implementar práticas como a poda seletiva, o respeito ao tempo de regeneração das folhas e a delimitação de áreas de preservação permanente.

Veiga (2010) enfatizou que o manejo sustentável deve ser participativo e adaptado à realidade local, e não apenas tecnocrático ou baseado em modelos impostos de fora. O autor critica visões que ignoram os saberes tradicionais das comunidades, defendendo uma abordagem integrada:

O verdadeiro manejo sustentável dos recursos naturais não pode prescindir da participação ativa dos sujeitos que vivem e interagem com o ecossistema. É preciso reconhecer o valor do conhecimento popular, das experiências locais e da convivência com o semiárido, como elementos centrais para qualquer proposta de uso racional dos recursos (Veiga, 2010, p. 64).

Além do aspecto ambiental, o uso sustentável da Carnaúba envolve ainda o combate à pobreza, a geração de renda local e a valorização das práticas agroextrativistas. Paniagua (2020) destaca que a sustentabilidade, no Brasil, deve ser entendida em sua dimensão integrada — envolvendo a biodiversidade, os direitos sociais e o equilíbrio econômico:

Não se pode falar em sustentabilidade ambiental de forma isolada, como se o meio ambiente estivesse dissociado da sociedade. A pobreza, a desigualdade e o desemprego são fatores que também ameaçam o equilíbrio ecológico. Por isso, políticas de preservação devem caminhar lado a lado com ações de inclusão social e desenvolvimento humano (Paniagua, 2020, p. 22).

Compreender os conceitos de sustentabilidade e manejo de recursos naturais, portanto, foi essencial para fundamentar a proposta deste artigo. A modelagem

matemática aplicada à realidade da Carnaúba em Campo Maior só adquire sentido se for capaz de dialogar com esses princípios, apontando caminhos que unam preservação ambiental e justiça social. O desafio atual não é apenas evitar o esgotamento de recursos, mas garantir um modo de vida digno, resiliente e enraizado no equilíbrio entre natureza e sociedade.

## **2.2 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS**

### **2.2.1 APLICAÇÃO DO MODELO E ESTIMATIVAS DE PARÂMETROS**

Neste estudo, foi utilizada uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) para representar matematicamente o comportamento do estoque da Carnaúba ao longo do tempo, considerando dois fatores principais: a capacidade natural de regeneração da espécie e a exploração humana do recurso.

A equação utilizada foi a seguinte:

$$\frac{dC}{dt} = r \cdot C \cdot \left(1 - \frac{C}{K}\right) - h \cdot C$$

Onde:

- $C(t)$  representa o estoque de carnaúba (em toneladas) no tempo  $t$ ;
- $r$  é a taxa de regeneração natural da planta;
- $K$  é a capacidade máxima de suporte ambiental da espécie na região;
- $h$  é a taxa de extração humana anual do recurso.

Essa equação modela o crescimento logístico clássico com uma perda proporcional à extração. O primeiro termo ( $rC(1 - C/K)$ ) reflete a regeneração ecológica, enquanto o segundo termo ( $hC$ ) representa a pressão da extração, ou seja, a diminuição no estoque devido à retirada constante pelas atividades humanas.

#### **Parâmetros adotados para a modelagem**

Com base em dados do IBGE e estimativas locais, foram considerados os seguintes valores:

- $r = 0,10$  (crescimento de 10% ao ano);
- $K = 13.359$  toneladas (produção máxima histórica registrada no Piauí – 2007);
- $C_0 = 8.684$  toneladas (produção atual registrada em 2023);

- $h = 0,08$  (extração estimada atual, equivalente a 8% ao ano).

O objetivo desta etapa é investigar, com base nesses parâmetros, em que ponto o estoque se estabiliza ao longo do tempo. Ou seja, calcular o ponto de equilíbrio da equação.

### 2.2.1.1 CÁLCULO DO PONTO DE EQUILÍBRIO

O ponto de equilíbrio ocorre quando a taxa de variação do estoque é nula, ou seja:

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

Substituindo na equação:

$$rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - hC = 0$$

Fatorando a expressão:

$$C \cdot \left[r \left(1 - \frac{C}{K}\right) - h\right] = 0$$

A equação possui duas soluções:

1.  $C = 0$ , que representa o colapso total do recurso (sem viabilidade);
2. A solução viável, que é:

$$C = K \cdot \left(1 - \frac{h}{r}\right)$$

Agora, substituindo os valores no modelo, tem-se:

$$C = 13.359 \cdot \left(1 - \frac{0,08}{0,10}\right)$$

$$C = 13.359 \cdot (1 - 0,8)$$

$$C = 13.359 \cdot 0,2$$

$$C = 2.671,80 \text{ toneladas}$$

O ponto de equilíbrio do sistema, com os parâmetros atuais, indica que o estoque da Carnaúba tenderá a se estabilizar em torno de 2.671,80 toneladas, o que representa apenas 20% da capacidade total da espécie na região. Isso sugere um estado de baixa sustentabilidade a longo prazo, mesmo sem colapso imediato. A vegetação se manteria viva, porém com baixa produtividade econômica e ecológica.

### 2.2.1.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA – MÉTODO DE EULER

A Equação Diferencial Ordinária (EDO) apresentada anteriormente não possui uma solução analítica simples nesse caso. Por isso, utilizamos o Método de Euler, que é uma técnica numérica bastante conhecida para aproximar soluções de EDOs, especialmente em contextos aplicados como este.

A fórmula geral do Método de Euler é:

$$C_{t+1} = C_t + \left[ r \cdot C_t \cdot \left( 1 - \frac{C_t}{K} \right) - h \cdot C_t \right] \cdot \Delta t$$

Onde:

- $C_t$  é o valor atual do estoque no tempo  $t$ ;
- $C_{t+1}$  é o valor no tempo seguinte;
- $\Delta t$  é o passo de tempo (em anos, aqui igual a 1).

Aplicando os valores no nosso modelo com os parâmetros já definidos ( $r = 0,10$ ;  $h = 0,08$ ;  $K = 13.359$ ;  $\Delta t = 1$  e  $C_0 = 8.684$ ), temos:

$$C_1 = 8.684 + \left[ \left( 0,10 \cdot \left( 1 - \frac{8.684}{13.359} \right) - 0,08 \right) \cdot 8.684 \right]$$

Calculando passo a passo, temos:

- $\frac{8.684}{13.359} \approx 0,65$
- $1 - 0,65 = 0,35$
- $0,10 \cdot 0,35 = 0,035$
- $0,035 - 0,08 = -0,045$
- $-0,045 \cdot 8.684 \approx -390,78$

$$C_1 = 8.684 - 390,78 = \mathbf{8.293,22}$$

Ou seja, o estoque tende a cair no primeiro ano, o que mostra a força da extração sobre a regeneração quando a proporção  $C/K$  já está alta.

Simulação dos 5 primeiros anos:

| Ano | C(t) (toneladas) | Variação ( $\Delta C$ ) |
|-----|------------------|-------------------------|
| 0   | 8.684,00         | —                       |
| 1   | 8.293,22         | -390,78                 |
| 2   | 7.936,81         | -356,41                 |
| 3   | 7.611,76         | -325,05                 |
| 4   | 7.315,35         | -296,41                 |
| 5   | 7.045,13         | -270,22                 |

(valores simulados numericamente com a mesma lógica acima)

Interpretando esses dados, o modelo mostra uma tendência de queda contínua no estoque, mesmo com valores moderados de extração. Isso evidencia que, sob os parâmetros adotados, o sistema caminha lentamente para o ponto de equilíbrio de 2.671,80 toneladas, como já calculado anteriormente.

Essa abordagem numérica é útil para prever quanto tempo levará até que o sistema atinja estabilidade e quais medidas precisam ser tomadas para evitar perdas mais acentuadas.

### 2.2.2 CENÁRIOS DE MANEJO: SUSTENTÁVEL, CRÍTICO E COLAPSO

Após a análise da equação e a simulação numérica com os parâmetros reais da região, foi possível observar que, mesmo com uma taxa de extração aparentemente moderada ( $h = 0,08$ ), o sistema apresenta tendência de declínio. Para compreender melhor os limites da sustentabilidade, simulamos três cenários alternativos, variando a taxa de extração e mantendo constantes os demais parâmetros:

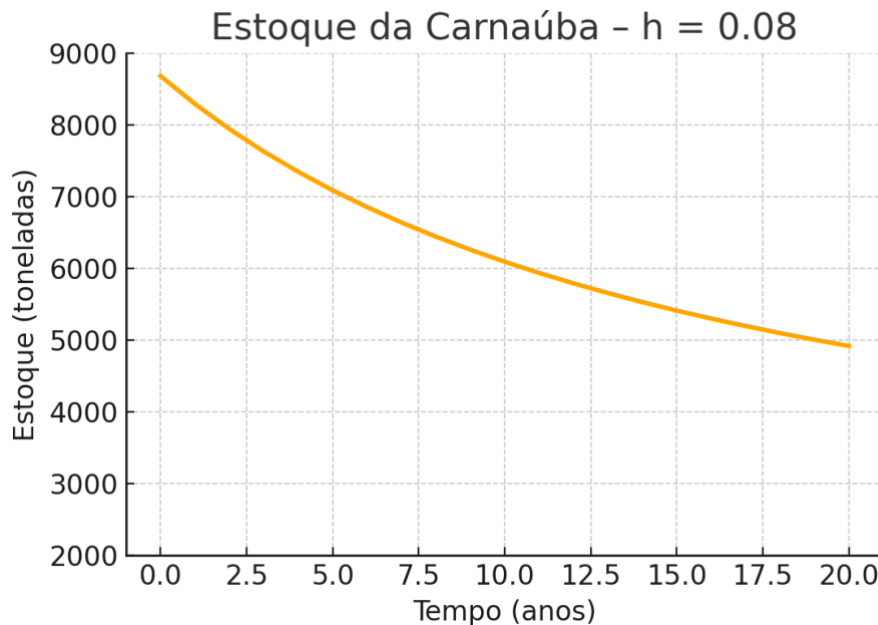
| Parâmetro                       | Valor utilizado  |
|---------------------------------|------------------|
| r (taxa de regeneração)         | 0,10             |
| K (capacidade de suporte)       | 13.359 toneladas |
| $C_0$ (estoque inicial)         | 8.684 toneladas  |
| $\Delta t$ (intervalo de tempo) | 1 ano            |

Os três cenários foram construídos da seguinte forma:

- Cenário 1 – Sustentável:  $h = 0,05$

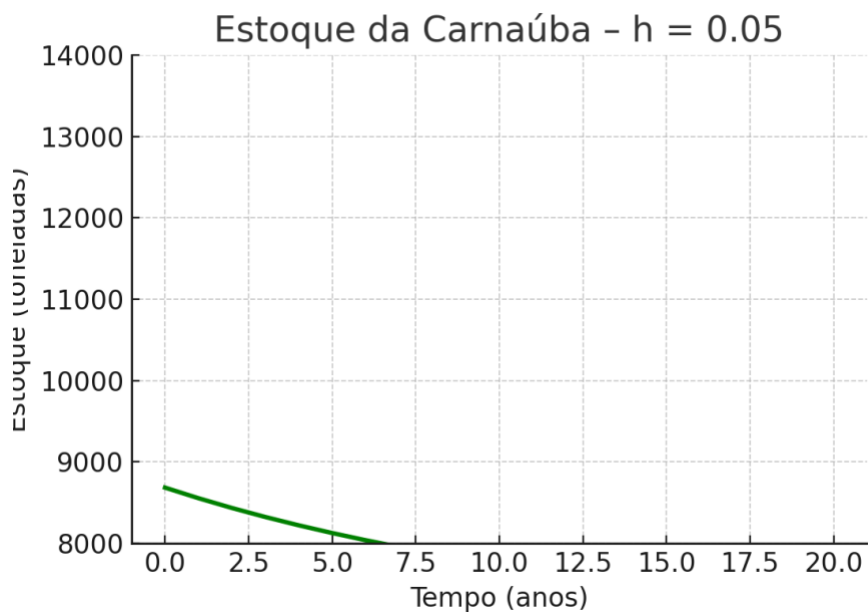
- Cenário 2 – Crítico:  $h = 0,10$
- Cenário 3 – Colapso:  $h = 0,15$

**Gráfico 1 – Situação Atual ( $h = 0,08$ )**



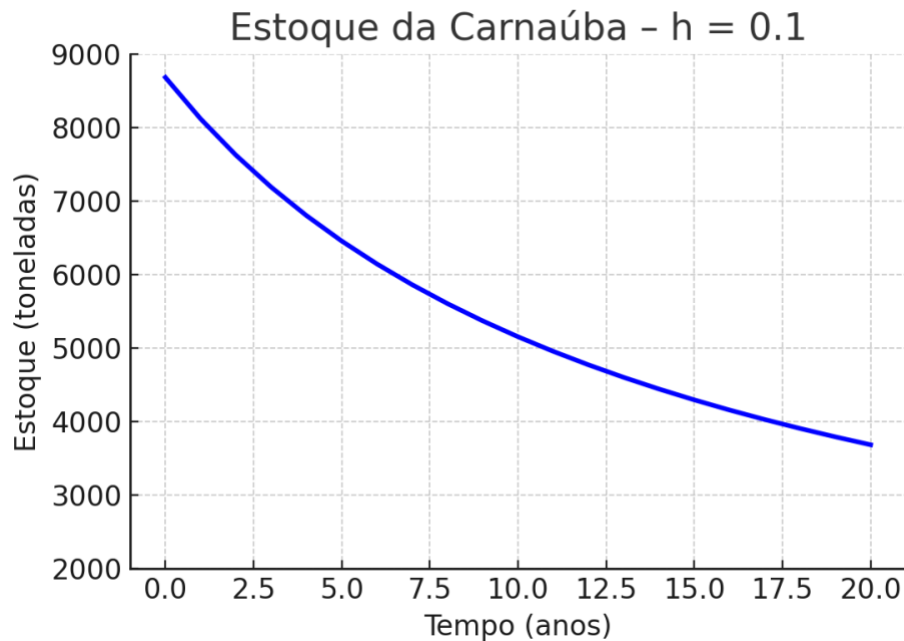
Interpretação: a curva estabiliza em um patamar mais baixo, sugerindo equilíbrio frágil entre regeneração e extração. Apesar de parecer estável à primeira vista, o sistema está em estado de desgaste contínuo. Esse cenário reflete o momento atual da região, conforme os dados históricos do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

**Gráfico 2 – Cenário Sustentável ( $h = 0,05$ )**



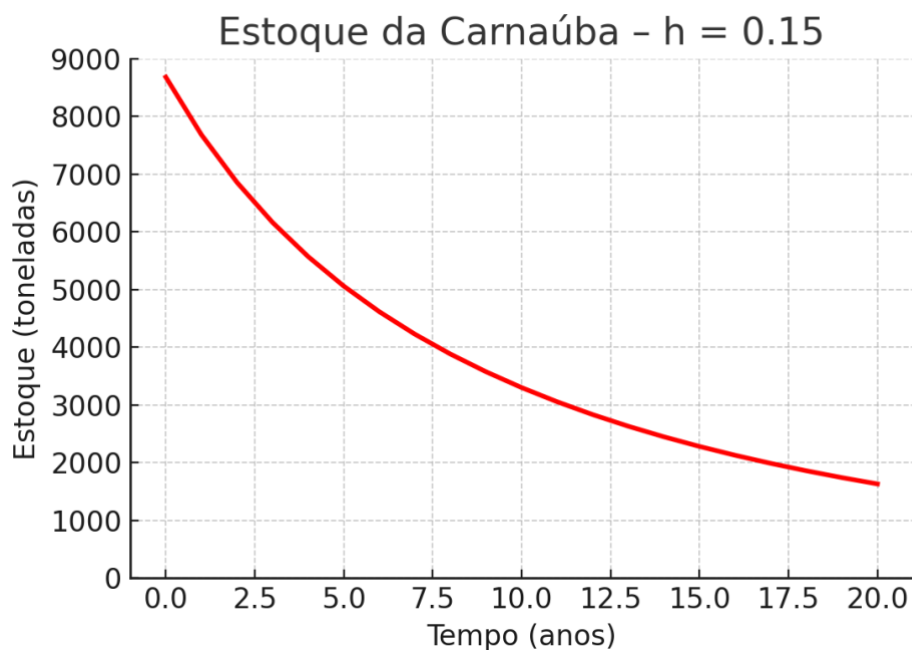
Interpretação: a curva mostra crescimento gradual do estoque, indicando que a regeneração supera a exploração, permitindo que o recurso se recupere. A curva tende ao equilíbrio superior, representando sustentabilidade real a longo prazo.

**Gráfico 3 – Cenário Crítico ( $h = 0,10$ )**



Interpretação: a curva tende à estabilização mínima, representando o ponto crítico entre recuperação e esgotamento. Esse é um ponto de instabilidade ecológica. Pequenas variações externas podem empurrar o sistema ao colapso.

**Gráfico 4 – Cenário de Colapso ( $h = 0,15$ )**





Interpretação: a curva evidencia colapso do estoque após cerca de 18 anos, devido à exploração superior à regeneração. Este é o cenário de exploração predatória. O gráfico mostra colapso iminente e representa risco ambiental, econômico e social.

### **Análise Comparativa dos Cenários**

A tabela a seguir resume os efeitos de cada cenário no estoque de Carnaúba:

| Cenário     | h (extração) | Tendência do estoque         | Sustentabilidade |
|-------------|--------------|------------------------------|------------------|
| Atual       | 0,08         | Queda até 2.671,80 toneladas | Baixa            |
| Sustentável | 0,05         | Crescimento até próximo de K | Alta             |
| Crítico     | 0,10         | Estagnação/declínio leve     | Instável         |
| Colapso     | 0,15         | Queda rápida (< 4.000 t)     | Nenhuma          |

A simulação dos cenários mostra que há uma faixa segura para a taxa de extração, que deve estar bem abaixo da taxa de regeneração. A exploração sem manejo leva à perda contínua de produtividade e, em casos extremos, ao colapso do sistema.

O modelo evidencia a importância de políticas públicas e comunitárias de manejo sustentável, como: limitação da coleta anual, monitoramento da exploração e incentivos ao replantio.

### **2.2.3 INTEGRAÇÃO COM A REALIDADE LOCAL**

A modelagem matemática aplicada ao estoque de Carnaúba na região de Campo Maior – PI, apresentada nas seções anteriores, tem base concreta na realidade produtiva do estado do Piauí. Entre os anos de 2007 e 2023, os dados oficiais do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) apontam uma redução significativa na produção de pó da Carnaúba, que caiu de cerca de 13.359 toneladas para 8.684 toneladas — uma diminuição superior a 35% em menos de duas décadas.

Esse declínio histórico reforça o comportamento descrito no Cenário Atual, simulado com o modelo matemático. A equação diferencial utilizada, ao considerar tanto a regeneração ecológica (parâmetro  $r$ ) quanto a pressão da exploração humana (parâmetro  $h$ ), permitiu estimar que, se mantida a atual taxa de extração, o estoque

tende a se estabilizar em torno de 2.671,80 toneladas, valor inferior a 25% da capacidade de suporte do ecossistema.

Trata-se de um valor preocupante, pois mesmo sem provocar extinção da espécie, um estoque tão baixo compromete sua função econômica, social e ecológica, afetando desde trabalhadores extrativistas até cadeias produtivas locais e exportações.

Adicionalmente, comunidades rurais que dependem diretamente da coleta da Carnaúba para geração de renda e subsistência enfrentam risco de empobrecimento progressivo caso não haja ações de manejo e controle da exploração. A perda do equilíbrio ecológico também impacta na biodiversidade e no microclima da região, pois a carnaubeira cumpre papel relevante na estrutura do bioma da Caatinga e dos cerrados piauienses.

A aplicação do modelo matemático neste trabalho cumpre papel de ferramenta de apoio à tomada de decisão. Com ele, é possível prever consequências futuras de práticas extrativas intensivas ou sustentáveis. A simplicidade da equação torna possível seu uso por gestores, ONGs e associações locais, inclusive em atividades de educação ambiental.

Além disso, o modelo pode ser adaptado para diferentes municípios do Piauí e do Nordeste, ajustando-se os parâmetros  $C_0$ ,  $r$ ,  $h$  e  $K$  conforme dados específicos de cada território.

Para evitar que o cenário de colapso se concretize na região de Campo Maior e entorno, recomenda-se:

- Implementar limites legais de extração anual por produtor ou cooperativa;
- Estabelecer períodos de defeso e de regeneração da planta;
- Incentivar o plantio de carnaubeiras jovens;
- Investir em capacitação técnica de trabalhadores rurais;
- Fortalecer políticas públicas voltadas à economia verde e à conservação do bioma.

Essas medidas, aliadas ao uso contínuo da modelagem como ferramenta de monitoramento, podem garantir que a Carnaúba continue sendo o símbolo econômico e cultural do povo piauiense — não apenas no presente, mas para as próximas gerações.

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo teve como objetivo principal desenvolver um modelo matemático robusto, capaz de representar a dinâmica entre a regeneração natural e a exploração da Carnaúba na região de Campo Maior – PI, com vistas a apoiar estratégias sustentáveis de manejo. Através da simulação de cenários com diferentes taxas de extração, foi possível compreender os efeitos de práticas sustentáveis e insustentáveis sobre o estoque desse recurso natural, considerado estratégico para a economia e o meio ambiente do semiárido piauiense.

A modelagem demonstrou que, quando a taxa de extração ( $h$ ) é inferior à taxa de regeneração natural da espécie ( $r$ ), o estoque tende à estabilidade e à recuperação. Por outro lado, quando  $h \geq r$ , o recurso entra em risco de colapso, especialmente em períodos prolongados. Essa constatação é compatível com dados históricos do IBGE, que apontaram uma queda de aproximadamente 35% na produção de pó de Carnaúba no Piauí entre 2007 e 2023, indicando uma exploração que já flerta com os limites da sustentabilidade.

A partir dos resultados obtidos, ficou evidente que a Carnaúba, apesar de resistente, depende de práticas adequadas de manejo para garantir sua conservação a longo prazo. A adoção de estratégias como poda seletiva, proteção de brotos, delimitação de áreas de regeneração e capacitação de trabalhadores rurais são caminhos viáveis para reduzir a pressão sobre o recurso. Além disso, políticas públicas voltadas à sustentabilidade, como incentivos à certificação ambiental e à rastreabilidade da cadeia produtiva, podem fortalecer o equilíbrio entre exploração econômica e preservação ambiental.

Como limitação do estudo, destaca-se a indisponibilidade de séries temporais completas e atualizadas sobre o estoque real de Carnaúba na região, o que levou à adoção de estimativas aproximadas com base na produção de pó registrada. Ainda assim, os resultados obtidos foram suficientes para validar o modelo e indicar direções relevantes para o manejo do recurso.

Para futuras pesquisas, sugere-se a ampliação da base de dados empíricos com apoio de órgãos como IBGE, SEPLAN-PI, secretarias municipais e entidades extrativistas. Também seria pertinente aplicar esse mesmo modelo a outras regiões produtoras de Carnaúba, ou adaptá-lo para espécies com dinâmica semelhante. Além disso, integrar a modelagem matemática com estudos sociais e econômicos pode

enriquecer ainda mais a compreensão do uso sustentável dos recursos naturais no semiárido brasileiro.

Dessa forma, este artigo buscou contribuir não apenas com a compreensão matemática da dinâmica da Carnaúba, mas também com a formulação de reflexões críticas e propositivas sobre o manejo de um recurso essencial para o presente e o futuro da região de Campo Maior e do Piauí como um todo.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Fernando. **Sustentabilidade**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2002.

AZEVEDO, Hélio de Sousa. **Uso sustentável da carnaúba no meio rural piauiense: práticas e desafios**. Revista Meio Ambiente e Sustentabilidade, v. 2, n. 4, 2015.

BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Plano Nacional de Recuperação da Vegetação Nativa – PLANAVEG**. Brasília: MMA, 2017.

CARVALHO, Francisco Prancacio Araújo de; GOMES, Jaíra Maria Alcobaça. **Ecoeficiência na produção de cera de Carnaúba no município de Campo Maior, Piauí – 2004**. Revista de Desenvolvimento Sustentável, v. 3, n. 1, 2004.

CARVALHO, José Natanael Fontenele de. **O rastro da carnaúba no Piauí**. Teresina: EDUFPI, 2008.

GP1. **Produção de pó de carnaúba no Piauí caiu 35% em 17 anos, diz IBGE**. 28 set. 2024. Disponível em: <https://www.gp1.com.br/piaui/noticia/2024/9/28/producao-de-po-de-carnauba-no-piaui-caiu-35-em-17-anos-diz-ibge-578833.html>. Acesso em: 28 jun. 2025.

IBGE. **Produção da extração vegetal e da silvicultura – PEVS**. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/>. Acesso em: 28 jun. 2025.

MATIAS, Eliaquim Nabin Sampaio; FERNANDES, Fernando Henrique Martins; LIMA, Jefika Silva de. **Modelagem matemática aplicada ao manejo de recursos renováveis**. Fortaleza: Editora ABC, 2020.

MURRAY, James D. **Mathematical biology**. New York: Springer-Verlag, 2002.

PANIAGUA, Cleiseano Emanuel da Silva. **Sustentabilidade ambiental, preservação do meio e conservação dos recursos naturais**. Curitiba: CRV, 2020.

PINTO, Guilherme de Souza. **A carnaubeira: árvore da vida**. Teresina: Fundação Quixote, 2014.

SEPLAN – Secretaria de Planejamento do Estado do Piauí. **Indicadores Econômicos do Piauí**. Disponível em: <https://www.seplan.pi.gov.br/>. Acesso em: 28 jun. 2025.

SILVA, Renata de Oliveira. **Modelagem matemática – um método científico de pesquisa**. São Paulo: Moderna, 2017.

SILVA, Warley Gramacho da. **Modelagem matemática aplicada à otimização e análise de processos**. São Paulo: Atual, 2019.

VEIGA, José Eli da. **Gestão sustentável dos recursos naturais: uma abordagem participativa**. São Paulo: Senac, 2010.

VEIGA, José Eli da. **Os recursos naturais e o homem**. São Paulo: Senac, 2011.