



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS TERESINA CENTRAL
LICENCIATURA EM FÍSICA

EDSON DAVID DE CASTRO BRANDÃO

**PRINCÍPIO DE HAMILTON NO ENSINO MÉDIO: proposta baseada na análise
qualitativa dos fenômenos da trajetória da luz e da braquistócrona**

TERESINA, PIAUÍ
2025

EDSON DAVID DE CASTRO BRANDÃO

PRINCÍPIO DE HAMILTON NO ENSINO MÉDIO: proposta baseada na análise qualitativa dos fenômenos da trajetória da luz e da braquistócrona

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Teresina Central.

Orientador: Prof.Dr.José Ricardo Rodrigues Duarte

TERESINA, PIAUÍ
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Brandão, Edson David de Castro

B817p Princípio de Hamilton no ensino médio : proposta baseada na análise qualitativa dos fenômenos da trajetória da luz e da braquistócrona / Edson David de Castro Brandão. - 2025.
62 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Teresina Central, 2025.

Orientador : Prof Dr. José Ricardo Rodrigues Duarte.

1. Princípio de Hamilton. 2. Transposição didática . 3. Ensino de física . 4. Problemas de otimização. I.Título.

CDD - 530

Elaborado por Tanize Maria Sales CRB 3/1024

EDSON DAVID DE CASTRO BRANDÃO

PRINCÍPIO DE HAMILTON NO ENSINO MÉDIO: proposta baseada na análise qualitativa dos fenômenos da trajetória da luz e da braquistócrona

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Teresina Central.

Aprovada em 04/11/25

BANCA EXAMINADORA:

Prof.Dr.José Ricardo Rodrigues Duarte(Orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof.Me.Adivaldo Ferreira de Almeida - Membro da Banca
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof.Dr.Herbert da Silva Sousa - Membro da Banca
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Dedico este trabalho ao meu avô, *in memoriam*.
Um dia, o senhor levantou pela tarde para me levar à escola, e agora estou aqui.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me guiado nesta jornada.

Aos meus pais, Cleonildes G. C. Brandão e Edilsomar P. Brandão, por muitas vezes terem acreditado mais do que eu mesmo em minhas capacidades e por terem me apoiado em cada passo que dei desde o dia em que nasci. Vocês foram, e sempre serão, meus principais modelos de Ser Humano.

À minha avó Cleonice que, juntamente com meu falecido avô David, do qual carrego o nome, que nunca deixaram faltar absolutamente nada em minha educação.

Aos meus amigos do "Time 7", que estiveram comigo nos bons e maus momentos desde a época em que eu não tinha idade para ficar em casa sozinho. E aos amigos que o IFPI me deu, meus queridos "Primos".

Agradeço também aos professores do Instituto Federal do Piauí, que foram fontes de conhecimento e inspiração para minha formação. Em especial, ao meu orientador e mentor, Prof.Dr.Ricardo Duarte, agradeço por todos os ensinamentos e conselhos. Hoje posso dizer que parte do meu encantamento pela Física veio das conversas que tivemos.

Por fim, à minha companheira Behael N. Linhares. Obrigado por estar sempre ao meu lado, fazendo dos meus planos os seus também.

"Primeiro descubra por que quer que os alunos aprendam o tema e o que quer que saibam, e o método resultará mais ou menos por senso comum".

Richard Feynman

RESUMO

Esta pesquisa visa disponibilizar ao professor que atua no Ensino Médio uma proposta para abordagem do Princípio de Hamilton (algumas vezes chamado de Princípio da Mínima Ação) baseada na análise qualitativa dos fenômenos da trajetória da luz e da braquistócrona. A pesquisa busca detalhar o desenvolvimento desta proposta, que inclui uma sequência didática e material de apoio, utilizando a Teoria da Transposição Didática de Chevallard como referencial metodológico para adaptar o saber sábio (o formalismo da Mecânica Analítica) a um saber a ensinar acessível. A metodologia emprega a análise histórica e a resolução adaptada dos problemas mencionados, ilustrando o poder unificador e o caráter de economia do princípio sem recorrer ao cálculo variacional, mas sim a analogias e argumentos geométricos. Como resultados, apresentam-se a sequência didática estruturada (Apêndice A), alinhada a habilidades da BNCC, dois questionários (Apêndice B), um diagnóstico e outro avaliativo que instrumentalizam o docente na mediação do conteúdo, e a solução comentada do último problema proposto nos questionários (Apêndice C), que exemplifica a aplicação prática dos conceitos trabalhados. Conclui-se que a abordagem oferece um caminho viável para explorar princípios fundamentais da Física no Ensino Médio, contribuindo para a prática docente e para a formação científica dos estudantes.

Palavras-chaves: princípio de hamilton; transposição didática; ensino de física; problemas de otimização; sequência didática.

ABSTRACT

This research aims to make available to high school teachers a proposal for approaching Hamilton's Principle (sometimes called the Principle of Least Action) based on the qualitative analysis of the phenomena of the trajectory of light and the brachistochrone. The research details the development of this proposal, which includes a didactic sequence and support material, using Chevallard's Theory of Didactic Transposition as a methodological framework to adapt scholarly knowledge (the formalism of Analytical Mechanics) into accessible teaching knowledge. The methodology employs historical analysis and adapted problem solving, illustrating the unifying power and economy of the principle without resorting to variational calculus, but instead using analogies and geometric reasoning. As results, the structured didactic sequence (Appendix A), aligned with BNCC skills, two questionnaires (Appendix B) one diagnostic and one evaluative that assist teachers in mediating the content and the commented solution of the final problem proposed in the questionnaires (Appendix C), which exemplifies the practical application of the discussed concepts, are presented. It is concluded that this approach provides a viable path to explore fundamental principles of Physics in high school, contributing to teaching practice and to students' scientific formation.

Keywords: hamilton's Principle; didactic transposition; physics teaching; optimization problems; didactic sequence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação do fenômeno da refração	16
Figura 2 – Pierre de Fermat (1607-1665)	17
Figura 3 – Revista Acta Eruditum	18
Figura 4 – Desenho original do problema	18
Figura 5 – Trajetória da luz atravessando meios ópticos de A até B	18
Figura 6 – Ilustração da trajetória de uma partícula sofrendo colisão elástica .	20
Figura 7 – Distância entre dois pontos	23
Figura 8 – Representação da trajetória de 1 A 2	25
Figura 9 – Curva cicloide gerada por circunferência de raio unitário	27
Figura 10 – Mapa conceitual da (TD)	32
Figura 11 – Fluxograma representando o processo de transposição Didática no contexto do trabalho.	34
Figura 12 – Representação do problema do salva vidas	36
Figura 13 – Esfera em um poço	37
Figura 14 – A trajetória ótima (contínua) e uma trajetória vizinha (tracejada) utili- zada na derivação geométrica da Lei de Snell	37
Figura 15 – Esquema simplificado de Usina Hidrelétrica	51
Figura 16 – Ilustração da situação da montanha-russa	52
Figura 17 – "lápis quebrado"	52
Figura 18 – Trajetória do carro da estrada (ponto A) ao campo (ponto B)	53
Figura 19 – Ilustração da situação da montanha-russa	54
Figura 20 – Ilustração da situação do salva-vidas	55
Figura 21 – Catenária entre postes	56
Figura 22 – Trajetória de tempo mínimo para o carro	56
Figura 23 – Trajetória de tempo mínimo para o carro	58
Figura 24 – Representação da analogia utilizando lei de Snell	60

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base nacional comum curricular
TD	Teoria da Transposição Didática

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	ESTRUTURA E OBJETIVOS	14
1.2	OBJETIVO GERAL	14
1.3	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	14
2	HISTÓRIA DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO	15
2.1	O PRINCÍPIO DO TEMPO MÍNIMO DE FERMAT	15
2.2	O DESAFIO DA BRAQUISTÓCRONA E A SOLUÇÃO DE BERNOULLI:	17
2.3	A UNIFICAÇÃO PELO PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO	19
3	MECÂNICA LAGRANGEANA E PRINCÍPIO DE HAMILTON	22
3.1	EXEMPLOS DA ABORDAGEM VARIACIONAL	22
3.2	PRINCÍPIO DE FERMAT NA ABORDAGEM VARIACIONAL	22
3.3	DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EULER LAGRANGE	23
3.4	ABORDAGEM VARIACIONAL DO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA	25
3.5	A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA DA MECÂNICA E O PRINCÍPIO de HAMILTON	27
3.6	A FORMA MODERNA DO PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO	28
4	BASES PEDAGÓGICAS	29
4.1	A FÍSICA NO ENSINO MÉDIO	29
4.2	TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DE CHEVALLARD	30
5	METODOLOGIA	33
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	35
6.1	TRANSPOSIÇÃO EXTERNA: SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA TRA- JETÓRIA DA LUZ	35
6.2	TRANSPOSIÇÃO EXTERNA: SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA BRA- QUISTÓCRONA	38
6.3	SABER ENSINAR: SEQUÊNCIA DIDÁTICA	39
6.4	SABER ENSINADO: QUESTIONÁRIOS	41
6.5	DISCUSSÕES ADICIONAIS	41
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	43
	REFERÊNCIAS	44

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA	46
APÊNDICE B – QUESTIONÁRIOS DIAGNÓSTICOS E AVALIATIVOS	51
APÊNDICE C – SOLUÇÃO DO ÚLTIMO PROBLEMA DOS QUES- TIONÁRIOS	58

1 INTRODUÇÃO

A busca por teorias de unificação e formas de conexão entre as leis da natureza tem motivado filósofos e físicos desde os primórdios da construção da ciência moderna. No final do século XVII, Newton demonstrou, em sua obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687), que as leis que regem os corpos na Terra são as mesmas que governam os movimentos dos astros, revelando o poder de uma formulação unificadora.

Apesar de sua funcionalidade e sucesso inicial, as leis da mecânica newtoniana logo demonstraram limitações quanto ao seu escopo, exigindo reformulações mais abrangentes. Nesse contexto, os trabalhos de Euler (1744), Lagrange (1788) e Hamilton (1834–1835) propuseram uma nova formulação da mecânica, fundamentada em conceitos variacionais, referenciados em problemas de otimização clássicos, como a distância percorrida pela luz (Lei de Snell) e o problema da braquistócrona.

Essa nova abordagem culminou no enunciado de um princípio formulado por Hamilton, segundo o qual a natureza segue trajetórias que minimizam (ou tornam estacionária) uma quantidade chamada ação, associada a energia, surgindo assim, o chamado princípio da mínima ação. Tal princípio, além de resolver de forma elegante problemas de otimização, demonstrou grande poder unificador ao conectar áreas distintas da Física, como a mecânica clássica, a óptica e, mais adiante, a mecânica quântica.

Entretanto, a natureza rigorosa das demonstrações utilizadas por Lagrange e Hamilton, afasta o público não acadêmico da abrangência e elegância de seus resultados. No entanto incorporar o princípio da mínima ação no Ensino Médio não só amplia o repertório conceitual dos estudantes, mas também promove um entendimento mais profundo da natureza da física, incentivando o desenvolvimento do raciocínio crítico e da capacidade de resolução de problemas. Nesse sentido a análise de problemas clássicos, como o percurso da luz e a braquistócrona, podem servir de motivação para aplicação desse princípio unificador tornando-o acessível e estimulante, rompendo a barreira da abstração e aproximando a teoria da experiência cotidiana dos alunos.

Dessa forma, este trabalho se propõe a desenvolver uma abordagem didática baseada na BNCC, para o docente que possibilite a introdução do princípio da mínima ação no Ensino Médio, utilizando problemas clássicos para demonstrar sua aplicabilidade e potencial educativo, valendo-se apenas de ferramentas qualitativas e dos conhecimentos matemáticos já presentes nesse nível de ensino. A proposta busca construir instrumentos que auxiliem o professor na abordagem desses conceitos em sala de aula, oferecendo como resultado uma sequência didática e um material de apoio que lhe permita, de forma autônoma, desenvolver sua própria prática pedagógica.

O procedimento metodológico utilizado na construção deste material fora a Teoria de transposição didática de Chevallard que descreve o processo de transformação pelo qual um conhecimento acadêmico (o saber sábio) é adaptado para se tornar um objeto de ensino (o saber a ensinar). Neste trabalho, o saber sábio corresponde ao formalismo matemático do Cálculo Variacional e da Mecânica Analítica. A transposição didática externa, portanto, consiste em converter este saber em uma proposta viável para o Ensino Médio.

1.1 ESTRUTURA E OBJETIVOS

O presente trabalho está estruturado em sete capítulos. O Capítulo 1 consiste na Introdução, que contextualiza e justifica a relevância do projeto. Os Capítulos 2, 3 e 4 são responsáveis por fornecer, respectivamente, a base histórica, a fundamentação da Física e o referencial pedagógico de suporte ao professor. O Capítulo 5 discute as metodologias de pesquisa e de transposição didática adotadas, adequando-as ao escopo do Ensino Médio. Por fim, no Capítulo 6 e 7, são apresentados os resultados e as considerações finais da proposta à luz da literatura.

O desenvolvimento do produto educacional deste projeto, uma sequência didática detalhada para o Ensino Médio juntamente com o material de apoio, encontram-se em apêndice, servindo como um material prático para o professor.

Tal disposição visa cumprir os seguintes objetivos, gerais e específicos:

1.2 OBJETIVO GERAL

Propor aos docentes que atuam no Ensino Médio uma abordagem sobre o Princípio de Hamilton baseada na análise qualitativa dos fenômenos da trajetória da luz e da braquistócrona.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Apresentar o Princípio de Hamilton de forma acessível e motivadora para professores do Ensino Médio.

Contextualizar historicamente o desenvolvimento do Princípio de Hamilton, incluindo a trajetória da luz e a braquistócrona.

Demonstrar a aplicação qualitativa do Princípio de Hamilton na análise dos problemas da trajetória da luz e da braquistócrona.

Fornecer exemplos práticos e abordagens didáticas para o ensino do Princípio de Hamilton no Ensino Médio.

Incentivar a reflexão sobre a relevância e o potencial do Princípio de Hamilton no contexto do Ensino Médio.

2 HISTÓRIA DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

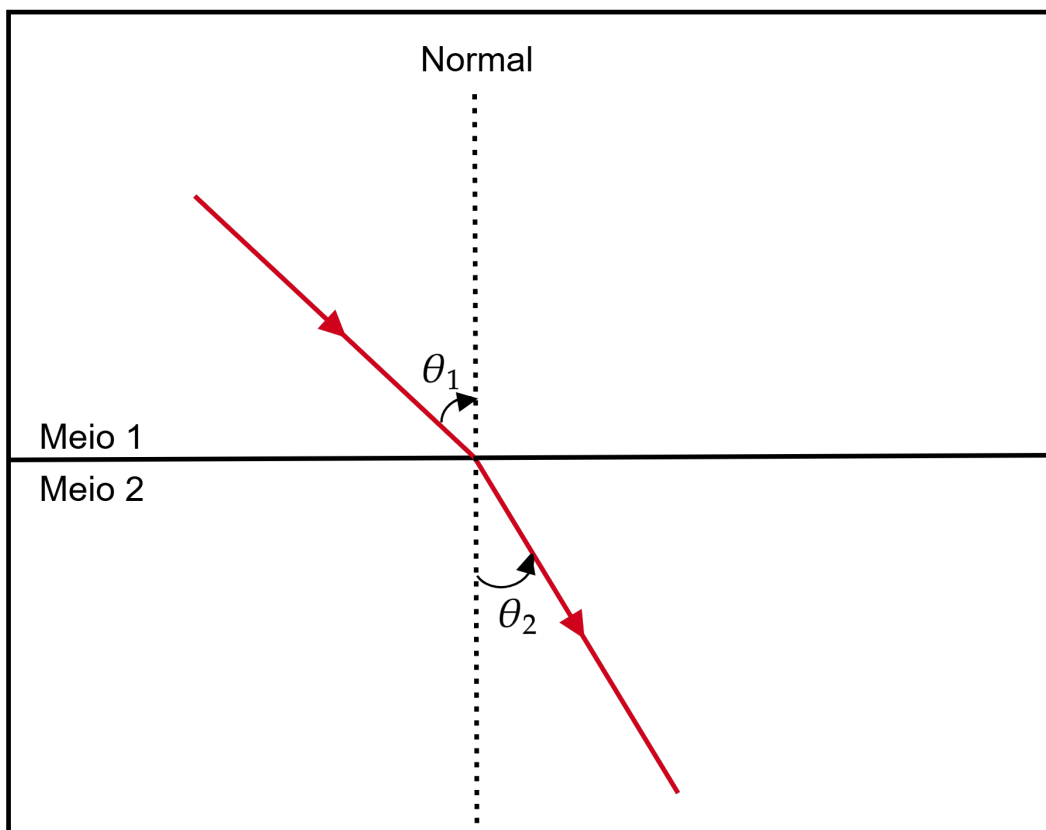
A necessidade de se encontrar caminhos que otimizem ou tornem mais econômicas certas grandezas é uma constante na História da humanidade. Através de séculos, tal necessidade impulsionou o desenvolvimento de novas ferramentas conceituais e matemáticas. Exemplificando o poder de unificação desse princípio, observa-se que a mesma premissa de otimização conecta as primeiras abordagens a respeito da trajetória da luz, propostas na antiguidade, até, de forma mais recente, às integrais de trajetória propostas por Richard Feynman (1940) e suas diversas aplicações na mecânica quântica (FEYNMAN; HIBBS, 1965).(GOLDSTEIN; JR.; SAFKO, 2002)

2.1 O PRINCÍPIO DO TEMPO MÍNIMO DE FERMAT

O estudo da trajetória da luz é um tema central na história da Física. Uma das primeiras formulações matemáticas para descrevê-la veio de Heron de Alexandria no século I d.C. Ao analisar o fenômeno da reflexão em espelhos planos, Heron concluiu que a luz segue um princípio de otimização, postulando que, ao viajar entre dois pontos refletindo em uma superfície, ela sempre percorre o caminho de menor distância possível. Esta foi uma ideia revolucionária, representando a primeira formulação de uma lei Física como um princípio de minimização. (FERGUSON, 2004)

Contudo, o princípio de Heron, embora preciso para a reflexão, tendo em vista que em um meio isotrópico o menor caminho entre dois pontos é uma linha reta, mostrava-se insuficiente para descrever outros fenômenos, como por exemplo, a refração, que trata do desvio luminoso ao atravessar meios diferentes (como do ar para a água). Durante o século XVII, o fenômeno da refração era bem descrito matematicamente, era conhecida a Lei de Snell-Descartes, que descreve a relação entre os ângulos de incidência e de refração quando a luz ou outra onda atravessa a fronteira entre dois meios isotrópicos diferentes.(NUSSENZVEIG, 2014)

Figura 1 – Representação do fenômeno da refração



Fonte: Autor.

Sendo a descrição algébrica, dada por:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad (2.1)$$

Onde:

- n_1 é o índice de refração do primeiro meio (meio de incidência).
- θ_1 é o ângulo de incidência, medido entre o raio de luz incidente e a linha normal (perpendicular) à superfície.
- n_2 é o índice de refração do segundo meio (meio de refração).
- θ_2 é o ângulo de refração, medido entre o raio de luz refratado e a linha normal.

Entretanto, como dito anteriormente, o princípio do caminho mínimo proposto por Heron de Alexandria não explicava a referida lei. Nesse contexto, Pierre de Fermat (1662) propôs que o equívoco não residia na premissa de um caminho "econômico", mas sim na grandeza a ser otimizada: em vez da distância, a natureza minimizaria o tempo. Surgia assim o enunciado do Princípio de Fermat, que afirma que o caminho percorrido pela luz para ir de um ponto fixo A até um ponto fixo B é aquele para o qual

o tempo de percurso é mínimo. A Forma original como Fermat enunciou seu princípio pode ser encontrado na obra póstuma (FERMAT, 1891-1922) que compila suas cartas e manuscritos sobre refração.

Com seu princípio variacional, Fermat conseguiu, de fato, obter a Lei de Snell. Contudo, a aplicabilidade de uma ideia tão poderosa não se limitou apenas à óptica. Outro problema, agora no campo da mecânica, chamaria a atenção de matemáticos e físicos do século XVII, e a intuição de Fermat seria novamente invocada em busca de uma solução para o desafio que ficou conhecido como o problema da braquistócrona. (BERNOULLI, 1697)

Figura 2 – Pierre de Fermat (1607-1665)

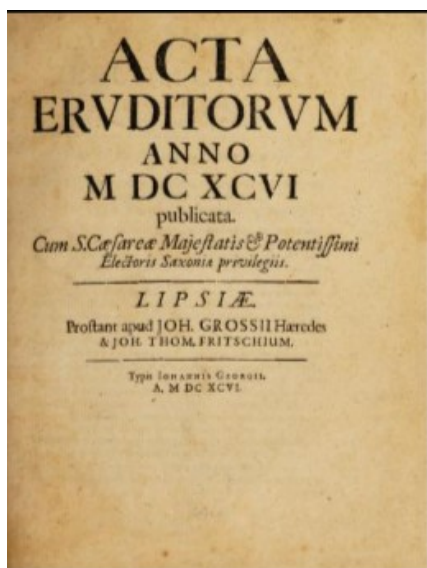


Fonte: Wikipedia.

2.2 O DESAFIO DA BRAQUISTÓCRONA E A SOLUÇÃO DE BERNOULLI:

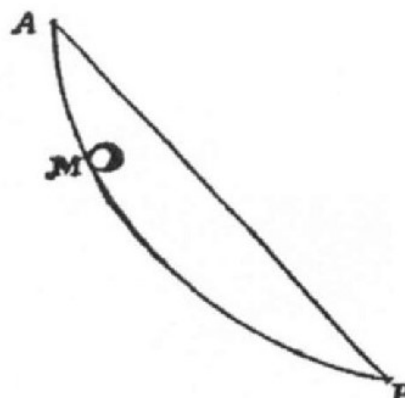
A Braquistócrona pode ser entendida como a trajetória de uma partícula que, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e partindo do repouso, se desloca entre dois pontos no menor tempo. Tal problema foi proposto por Johann Bernoulli (1696), que, além de anunciar que já possuía uma solução, desafiou os cientistas da época a resolvê-lo também em um prazo de seis meses. Em maio de 1697, algumas soluções foram publicadas, dentre elas a do próprio Bernoulli, sendo esta muito notória por invocar um princípio variacional conhecido por seus contemporâneos: o Princípio de Fermat. (BERNOULLI, 1697)

Figura 3 – Revista Acta Eruditum



Fonte: Acta eruditorum (1696).

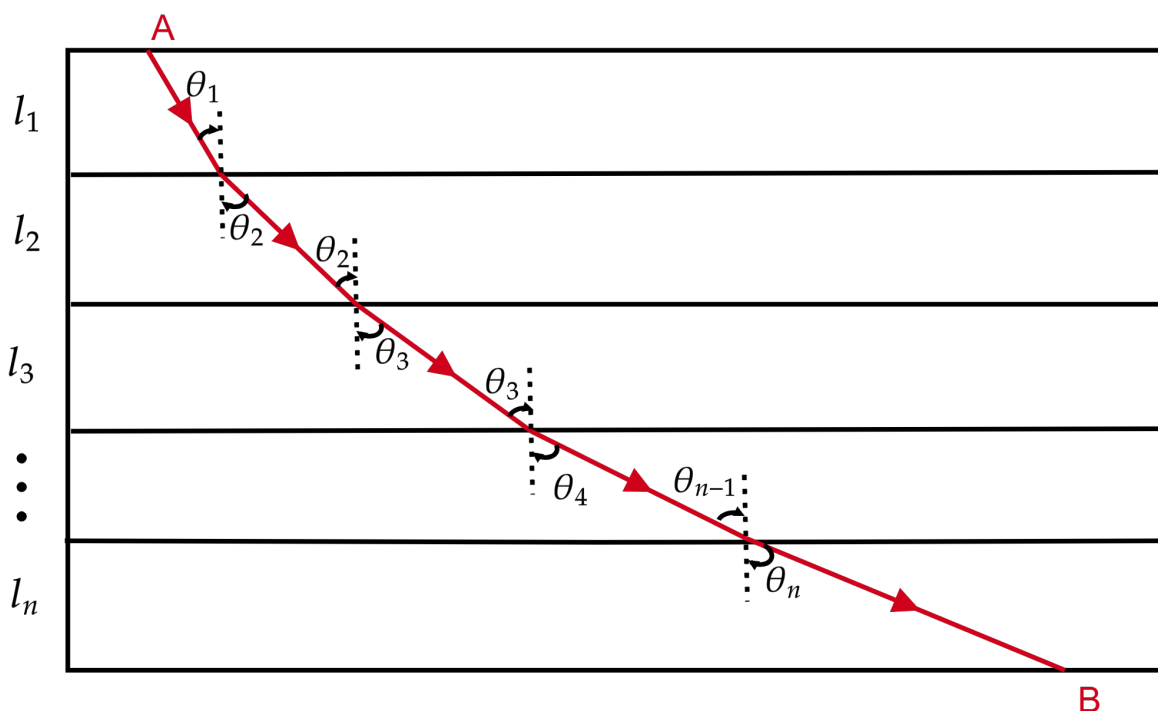
Figura 4 – Desenho original do problema



Fonte: Acta eruditorum (1696).

Solucionar o problema da braquistócrona, é determinar qual a curva entre os pontos A e b, que minimiza o tempo de percurso. A solução proposta por Bernoulli, leva em consideração que ao cair sobre ação do campo gravitacional, a partícula funcionaria como um feixe de luz, atravessando meios com densidades ópticas diferentes.

Figura 5 – Trajetória da luz atravessando meios ópticos de A até B



Fonte: Autor.

A abstração leva em consideração que para ambos os problemas, o tempo mínimo é a condição que guiará a trajetória de A até B. De acordo com a Lei de Snell

em interfaces consecutivas:

$$\frac{\sin(\theta_{n-1})}{v_{n-1}} = \frac{\sin(\theta_n)}{v_n} = cte = K \quad (2.2)$$

Entretanto, a velocidade considerada em um único meio óptico é constante, de acordo a lei de snell, enquanto a velocidade de queda de uma partícula varia conforme ela acelera sob efeito da força gravitacional. Para transpor essa problema, Bernoulli argumentou que a velocidade de uma partícula ao cair de uma altura y é $\sqrt{2gy}$, Logo no limite em que as interfaces tendem ao infinito, o caminho que levará ao tempo mínimo será aquele em que a luz atravessando um meio mudando sua densidade óptica de maneira contínua, obedeça a equação:

$$\frac{\sin(\theta_n)}{\sqrt{2gy}} = K \quad (2.3)$$

A relação em destaque, é obdecida por uma curva denominada cicloide - curva traçada por um ponto que está na borda de uma roda de raio r girando ao longo do eixo x . A demonstração dessa correlação pode ser vista em (MARION; THORNTON, 2004). A solução de bernoulli não foi a única a encontrar a cicloide como resposta, entretanto os argumentos utilizados demonstraram que princípios variacionais podem de alguma forma conectar problemas distintos na natureza, gerando-se a necessidade de uma formulação mais rigorosa para se tratar de situações análogas de otimização. (BOYER, 1996)

2.3 A UNIFICAÇÃO PELO PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO

Na década de 1740, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis(1744), inspirado no trabalho de Fermat, também comparou o comportamento da luz e das partículas, observando as similaridades em suas trajetórias. Essa análise o levou a elaborar a hipótese de que provavelmente existia algo ainda mais fundamental que o Princípio de Fermat, e que seria o responsável por conectar os dois problemas. Sua busca por uma quantidade basilar a ser minimizada o levou (de forma intuitiva) a uma grandeza que ele chamou de ação, sendo o produto da massa, velocidade e distância percorrida.(SILVA; MARTINS, 2007)

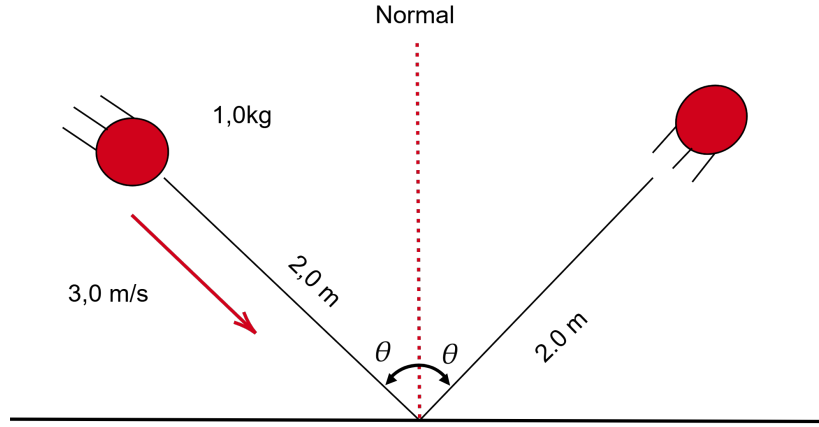
$$S = m \cdot v \cdot d \quad (2.4)$$

Essa grandeza, segundo Maupertuis, seria aquela que a natureza minimizaria em qualquer sistema sob a ação de uma força. Sendo este composto por muitas partículas, a ação total seria dada pela soma das ações individuais de cada uma delas.

Como ilustração, considere a situação representada na figura 6: uma esfera de massa $m = 1 \text{ kg}$ e velocidade constante $v = 3 \text{ m/s}$ desloca-se em uma trajetória retilínea por uma distância $d_1 = 2 \text{ m}$. Após sofrer uma colisão elástica com uma

superfície plana (que inverte seu sentido, mas mantém a magnitude da velocidade), ela percorre outra trajetória retilínea de $d_2 = 2 \text{ m}$.

Figura 6 – Ilustração da trajetória de uma partícula sofrendo colisão elástica



Fonte: Autor.

Nesse exemplo, a ação total para a trajetória observada (totalizando $d = d_1 + d_2 = 4 \text{ m}$) seria a soma das ações antes e depois da colisão:

$$S_{\text{real}} = (1 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s} \cdot 2 \text{ m}) + (1 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s} \cdot 2 \text{ m}) = 6 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} + 6 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 12 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (2.5)$$

Sendo assim, de todas as trajetórias possíveis para essa partícula ir do ponto inicial ao final passando pela colisão, a escolhida foi aquela em que sua ação foi mínima. Este resultado está em consonância com o que se espera de uma colisão elástica ideal em uma superfície plana, onde a conservação do momento e da energia cinética leva a trajetórias retilíneas entre as interações.

Para ilustrar explicitamente a minimização, pode-se comparar essa ação com a de uma trajetória alternativa. Suponha que, após a colisão, em vez de seguir a linha reta de 2 m , a partícula seguisse um caminho semicircular entre o ponto de colisão e o ponto final. Se o diâmetro desse semicírculo for igual à distância retilínea original ($D = d_2 = 2 \text{ m}$), a distância percorrida ao longo do arco será:

$$d'_{\text{semi}} = \frac{1}{2} \pi D = \frac{1}{2} \pi (2 \text{ m}) = \pi \text{ m} \quad (2.6)$$

A ação total para esta trajetória alternativa (primeiro trecho reto, segundo semicircular) seria calculada como:

$$S_{\text{semi}} = (m \cdot v \cdot d_1) + (m \cdot v \cdot d'_{\text{semi}}) \quad (2.7)$$

Substituindo os valores numéricos ($m = 1 \text{ kg}$, $v = 3 \text{ m/s}$, $d_1 = 2 \text{ m}$, $d'_{\text{semi}} = \pi \text{ m}$):

$$S_{\text{semi}} = (1 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s} \cdot 2 \text{ m}) + (1 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s} \cdot \pi \text{ m}) = 6 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} + 3\pi \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (2.8)$$

Utilizando a aproximação $\pi \approx 3,14$, obtém-se o valor numérico para a ação na trajetória semicircular:

$$S_{\text{semi}} \approx 6 \text{ kg } \frac{\text{m}^2}{\text{s}} + 3(3,14) \text{ kg } \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 6 \text{ kg } \frac{\text{m}^2}{\text{s}} + 9,42 \text{ kg } \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 15,42 \text{ kg } \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (2.9)$$

Comparando as duas ações calculadas (para a trajetória retilínea, $S_{\text{real}} = 12 \text{ kg } \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, conforme equação (2.5)), verifica-se que:

$$S_{\text{semi}} \approx 15,42 \text{ kg } \frac{\text{m}^2}{\text{s}} > S_{\text{real}} = 12 \text{ kg } \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (2.10)$$

Assim, a trajetória composta apenas por segmentos retilíneos (2.5) possui uma ação significativamente menor do que a trajetória alternativa envolvendo um percurso curvo (2.8). Este cálculo simples exemplifica como, neste caso, a linha reta minimiza a ação total, corroborando a intuição do Princípio da Mínima Ação de Maupertuis. Embora inovadora, a ideia de Maupertuis não tinha uma prova matemática rigorosa para todos os casos e não foi imediatamente bem aceita pelos físicos da época. Somente com as formulações posteriores baseadas no cálculo variacional, de Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, sua ideia foi reformulada e, com William Hamilton, modernizada para a forma conhecida e utilizada atualmente (EULER, 1744; LAGRANGE, 1788; HAMILTON, 1834).

3 MECÂNICA LAGRANGEANA E PRINCÍPIO DE HAMILTON

A evolução do princípio da mínima ação se deu de forma concomitante a reformulação da mecânica clássica, a partir dos trabalhos de Euler e Lagrange. Tal abordagem se alicerçou em argumentos do cálculo variacional. As análises a seguir foram feitas com base nas referências (MARION; THORNTON, 2004; TAYLOR, 2005) e nas ideias originais de Euler e Lagrange. (EULER, 1744; LAGRANGE, 1788)

3.1 EXEMPLOS DA ABORDAGEM VARIACIONAL

A abordagem newtoniana da mecânica, embora intuitiva e eficaz em coordenadas cartesianas, encontra obstáculos em problemas cuja simetria exige o uso de outros sistemas de coordenadas. Nesses casos, a aplicação do formalismo newtoniano torna-se excessivamente complexa. Ademais, as forças de vínculo que surgem nesse tratamento (como a tração e a normal) representam incógnitas adicionais e, muitas vezes, desnecessárias ao sistema de equações.

Buscando superar essas dificuldades, Joseph-Louis Lagrange (1788) reformulou a mecânica clássica ao empregar conceitos de um ramo da matemática conhecido como cálculo variacional, que já era alvo de investigações de Leonhard Euler (LAGRANGE, 1788). Este campo da matemática dedica-se a encontrar os máximos e mínimos de grandezas definidas por integrais. Sob essa ótica, problemas físicos clássicos podem ser reenunciados como a busca por otimizar tais grandezas, como ocorre no problema do caminho percorrido pela luz.

3.2 PRINCÍPIO DE FERMAT NA ABORDAGEM VARIACIONAL

O problema, como já enunciado, é determinar o caminho que a luz percorre entre dois pontos fixos ao viajar em meios com índices de refração diferentes. De acordo com o princípio de Fermat, a grandeza a ser minimizada deverá ser o tempo de percurso. O intervalo de tempo dt que a luz leva para percorrer uma distância infinitesimal ds é dado por:

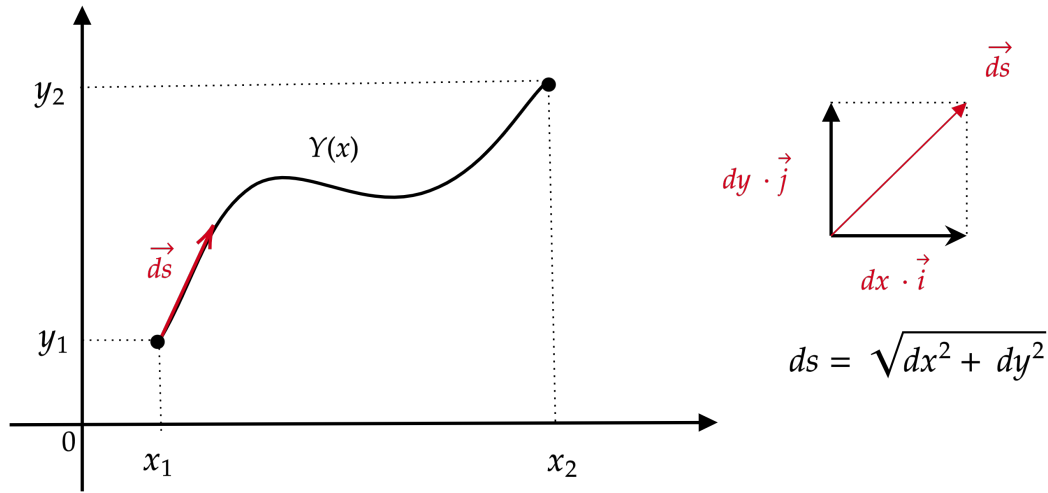
$$dt = \frac{ds}{v} \quad (3.1)$$

onde v é a velocidade da luz no meio. Essa velocidade é definida em função do índice de refração n e da velocidade da luz no vácuo c como:

$$v = \frac{c}{n} \quad (3.2)$$

Conforme ilustrado na Figura ??, o elemento de caminho infinitesimal ds ao longo da trajetória pode ser expresso pela relação pitagórica em coordenadas cartesianas:

Figura 7 – Distância entre dois pontos



Fonte: Autor.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (3.3)$$

Portanto, o tempo total de percurso será:

$$T = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int_1^2 n(x, y) ds = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} n(x, y) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (3.4)$$

A partir do exemplo, pode-se admitir que o problema fundamental do cálculo variacional é encontrar a função $y(x)$ que minimiza (ou maximiza) uma integral da forma:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx \quad (3.5)$$

Também conhecida como funcional.

3.3 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EULER LAGRANGE

O procedimento para a solução do problema variacional, concebido por Euler, consiste em adaptar o conceito de mínimo do cálculo diferencial. A premissa central é que, se uma curva $y(x)$ minimiza a integral S , qualquer variação infinitesimal a partir desta curva deve resultar em um valor maior ou igual para S .

Para formalizar esta ideia, define-se uma família de curvas vizinhas a $y(x)$ por meio de uma função de variação $\eta(x)$, ponderada por um parâmetro α :

$$Y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x) \quad (3.6)$$

onde α é um parâmetro real que indica a magnitude da deformação, e $\eta(x)$ é uma função arbitrária e diferenciável que define a forma da deformação. A curva original é recuperada quando $\alpha = 0$, ou seja, $Y(x, 0) = y(x)$.

Um requisito fundamental é que todas as curvas comparadas devem compartilhar os mesmos pontos de partida e chegada, o que impõe a seguinte condição de contorno sobre a função de variação $\eta(x)$:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (3.7)$$

Ao substituir $Y(x, \alpha)$ na integral funcional, esta se torna uma função de α , denotada por $S(\alpha)$:

$$S(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(Y(x, \alpha), Y'(x, \alpha), x) dx \quad (3.8)$$

onde $Y'(x, \alpha) = y'(x) + \alpha\eta'(x)$.

A condição para que a integral seja estacionária em $y(x)$ é que $S(\alpha)$ tenha um ponto estacionário em $\alpha = 0$. Matematicamente, isso significa que:

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.9)$$

A derivada de $S(\alpha)$ em relação a α é calculada aplicando-se a regra da cadeia ao integrando:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \alpha} \right) dx \quad (3.10)$$

As derivadas parciais de Y e Y' em relação a α são $\eta(x)$ e $\eta'(x)$, respectivamente. Substituindo-as na expressão anterior, resulta em:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta'(x) \right) dx \quad (3.11)$$

O segundo termo da integral é tratado por meio da integração por partes. Sendo $u = \frac{\partial f}{\partial Y'}$ e $dv = \eta'(x) dx$, tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta'(x) dx = \left[\frac{\partial f}{\partial Y'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) dx \quad (3.12)$$

Devido às condições de contorno $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, o termo de fronteira (avaliado nos limites) é nulo.

Substituindo este resultado e aplicando a condição de ponto estacionário para $\alpha = 0$ (onde $Y \rightarrow y$ e $Y' \rightarrow y'$), a expressão para a derivada se torna:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx = 0 \quad (3.13)$$

Para que a integral seja nula para uma função *arbitrária* $\eta(x)$ que satisfaça as condições de contorno, é necessário que o termo que multiplica $\eta(x)$ seja identicamente nulo.

Resulta assim na expressão final:

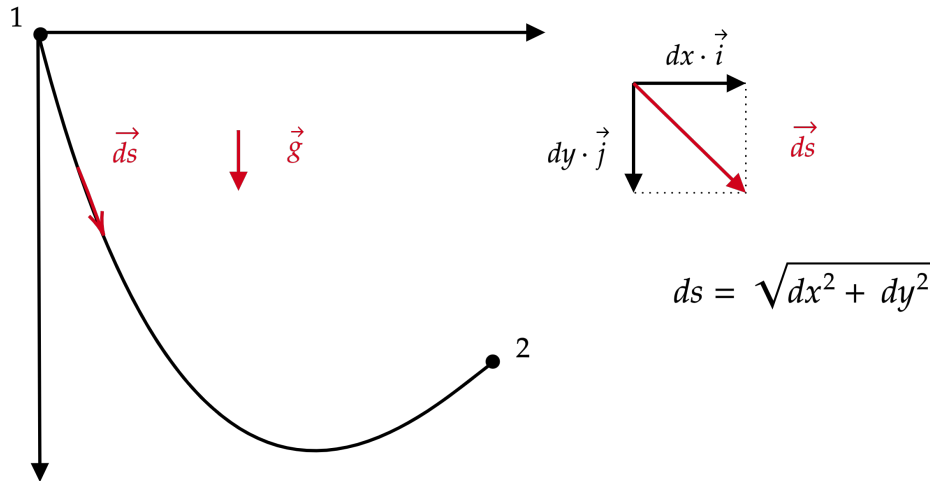
$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (3.14)$$

Esta é a equação de Euler-Lagrange. A solução do problema variacional resume-se, portanto, a encontrar a função $y(x)$ que satisfaz esta equação diferencial, dadas as condições de contorno.

3.4 ABORDAGEM VARIACIONAL DO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

Com o formalismo adequado em mãos, é possível atestar sua aplicação a partir da análise de um problema já conhecido, neste exemplo, a braquistócrona.

Figura 8 – Representação da trajetória de 1 A 2



Fonte: Autor.

Solucionar esse problema é encontrar a curva $y(x)$ que minimize a integral do tempo de percurso. O tempo total de percurso é a integral do tempo infinitesimal dt , que é dado por $dt = ds/v$, onde ds é o elemento de comprimento do arco e v é a velocidade do objeto. Pela conservação de energia, partindo do repouso em $y = 0$, a energia cinética $\frac{1}{2}mv^2$ deve ser igual à perda de energia potencial mgy . Portanto, a velocidade é dada por:

$$v = \sqrt{2gy} \quad (3.15)$$

Para resolver o problema, é conveniente tratar y como a variável independente e o caminho como uma função $x(y)$. O elemento de comprimento do arco ds é então:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy = \sqrt{1 + x'^2} dy \quad (3.16)$$

onde $x' = dx/dy$. A determinação do caminho de tempo mínimo, a braquistócrona, inicia-se com a formulação da integral do tempo de percurso, T . Considerando que o objeto parte do repouso da origem e que a coordenada y é medida verticalmente para baixo, a velocidade v em qualquer ponto é dada pela conservação de energia:

$$v = \sqrt{2gy} \quad (3.17)$$

Tratando y como a variável independente, o caminho é descrito pela função $x(y)$. O elemento de comprimento de arco ds é, portanto:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy = \sqrt{1 + x'^2} dy \quad (3.18)$$

onde $x' = dx/dy$.

O tempo total de percurso, a ser minimizado, é a integral de $dt = ds/v$:

$$T = \int_0^{y_2} \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{2gy}} dy \quad (3.19)$$

Esta integral está na forma padrão para o cálculo das variações, com o integrando sendo:

$$f(x, x', y) = \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}} \quad (3.20)$$

O fator constante $1/\sqrt{2g}$ é omitido, pois não afeta a forma do caminho que minimiza a integral.

A equação de Euler-Lagrange para a função desconhecida $x(y)$ é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) = 0 \quad (3.21)$$

Como o integrando f não depende explicitamente de x , o termo $\partial f/\partial x$ é nulo. A equação de Euler-Lagrange simplifica-se, implicando que a quantidade $\partial f/\partial x'$ é uma constante:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}} = C \quad (3.22)$$

Define-se a constante como $C = 1/\sqrt{2a}$. Elevando a expressão ao quadrado e rearranjando para isolar x' , obtém-se:

$$x' = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}} \quad (3.23)$$

A solução para x é encontrada por integração em relação a y :

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{2a-y}} dy \quad (3.24)$$

Esta integral é resolvida utilizando a substituição paramétrica:

$$y(\theta) = a(1 - \cos \theta) \quad (3.25)$$

O resultado da integração para x é:

$$x(\theta) = a(\theta - \sin \theta) \quad (3.26)$$

Considerando a condição inicial de que o caminho começa em $x = 0, y = 0$, que corresponde a $\theta = 0$, a constante de integração é nula.

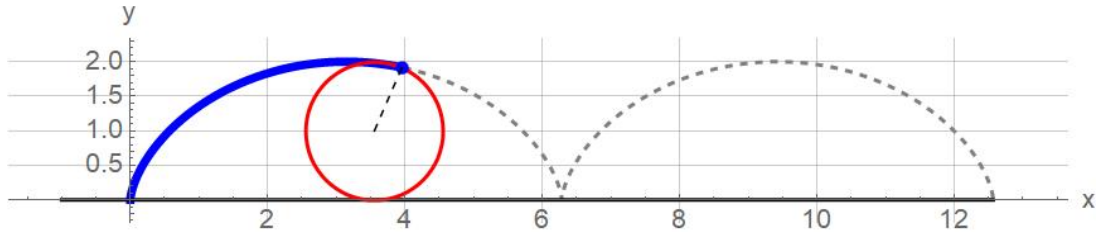
As equações paramétricas para o caminho de tempo mínimo, a braquistócrona, são:

$$x(\theta) = a(\theta - \sin \theta) \quad (3.27)$$

$$y(\theta) = a(1 - \cos \theta) \quad (3.28)$$

Esta curva é uma cicloide, a mesma curva encontrada por Bernoulli utilizando o princípio de Fermat.

Figura 9 – Curva cicloide gerada por circunferência de raio unitário



Fonte: Autor.

3.5 A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA DA MECÂNICA E O PRINCÍPIO DE HAMILTON

A partir do desenvolvimento do cálculo variacional previamente apresentado, Lagrange reformulou a mecânica clássica, superando as desvantagens do formalismo vetorial Newtoniano. Suas equações revelaram seu poder ao assumir a mesma forma em qualquer que seja o sistema de coordenadas além de eliminar as forças de vínculo, para isso o formalismo lagrangeano se utiliza apenas de quantidades escalares, as energias cinética e potencial.

As equações de movimento concebidas pelo método lagrangeano, retornam de forma inequívoca as mesmas do formalismo Newtoniano. A derivação da equação de Lagrange pode ser iniciada a partir do caso simples de uma única partícula de massa m , movendo-se em uma dimensão sob a ação de uma força $\vec{F}$. A segunda lei de Newton para este sistema é:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{x}} \quad (3.29)$$

A energia cinética da partícula, $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, possui as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad (3.30)$$

Comparando as equações, conclui-se que $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = F$. Se a força for conservativa, pode ser expressa como o gradiente negativo da energia potencial, $F = -\frac{dU}{dx}$. Como a energia potencial U geralmente não depende da velocidade $\dot{x}$, a derivada total pode ser substituída pela parcial, resultando em:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.31)$$

Esta equação pode ser reescrita de forma mais compacta ao se definir a função Lagrangiana, $\mathcal{L}$, como a diferença entre a energia cinética e a potencial:

$$\mathcal{L} = T - U \quad (3.32)$$

Considerando que U não depende de $\dot{x}$ e T tipicamente não depende de x , as derivadas parciais da Lagrangiana são $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}$ e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$. A substituição destas relações na equação anterior leva diretamente à equação de Lagrange para a partícula:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad (3.33)$$

Para uma partícula em três dimensões, a lei de Newton $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ se decompõe em três equações cartesianas, e o mesmo argumento pode ser aplicado a cada coordenada, resultando em três equações de Lagrange análogas.

As muitas aplicações das equações de Lagrange para mecânica podem ser observadas de forma adequada nas referências (LEMOS, 2007), (LANDAU; LIFSHITZ, 1976).

3.6 A FORMA MODERNA DO PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO

É notável a equivalência formal entre as equações resultantes da formulação Lagrangiana, referenciadas em 3.33, e as equações de Euler-Lagrange, mostradas em 3.14. Uma vez que estas últimas resultam da intenção de minimizar (ou tornar estacionária) a integral 3.5, pode-se estabelecer uma conexão direta, definindo a seguinte integral:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (3.34)$$

O caminho real que uma partícula percorre entre dois pontos em um dado intervalo de tempo, de t_1 a t_2 , é aquele para o qual a integral 3.34 é estacionária. A essa integral deu-se o nome de Ação, e a forma moderna do seu princípio de minimização, que continua o desenvolvimento iniciado por Maupertuis em 1740, recebeu o nome de **Princípio de Hamilton**, por ter sido enunciada pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton (1834–1835).

O Princípio de Hamilton representa um marco não apenas para a mecânica clássica, mas para a Física como um todo. Seus resultados foram generalizados para áreas tão distintas quanto a óptica, a mecânica celeste e até mesmo a mecânica quântica. Seu poder de unificação é considerado por muitos físicos como um dos resultados mais importantes de toda a ciência moderna (LEMOS, 2007). A profundidade e a abrangência deste princípio foram sintetizadas pelo físico Max Planck:

O princípio da mínima ação se impõe em toda a Física como a mais alta lei, a qual, a partir de um ponto de vista superior, governa todos os processos na natureza. (PLANCK, 1949, p. 80, tradução nossa).

4 BASES PEDAGÓGICAS

4.1 A FÍSICA NO ENSINO MÉDIO

O Ensino de Física no Brasil, em especial, no Ensino Médio, enfrenta desafios históricos em suas abordagens que frequentemente se mostram insuficientes para obtenção de uma aprendizagem significativa por parte dos alunos, como preconiza a BNCC. Parte dessa problemática reside no apelo excessivo a um estudo mecânico e dedicado a memorização de fórmulas e lemas, onde o resultado é priorizado em prol do entendimento pleno dos conceitos. Marco Antonio, um dos principais pesquisadores sobre o tema no país, diferencia a aprendizagem que resulta desse modelo daquela que deveria ser o objetivo final do processo educativo. Para o autor, a simples capacidade de aplicar fórmulas não constitui um aprendizado real, mas sim uma aquisição superficial e volátil. (MOREIRA, 2011)

A aprendizagem mecânica é aquela na qual o aprendiz não consegue estabelecer relações substantivas e não-arbitrárias entre o novo conhecimento e aquele que ele já possui. O conhecimento assim adquirido fica isolado em sua estrutura cognitiva. Já a aprendizagem significativa é aquela na qual o novo conhecimento relaciona-se de maneira substantiva e não-arbitrária com o conhecimento já existente na estrutura cognitiva do sujeito. (MOREIRA, 2011, p. 20).

Essa abordagem mecânica citada por Moreira, é também ponto de crítica na pesquisa de Paulo Freire (educador e filósofo brasileiro) que nomeiou esse modelo como "educação bancária". Nesse contexto, o educador "deposita" o conhecimento em um educando passivo, que tem a tarefa de memorizar e repetir o conteúdo sem uma reflexão crítica sobre seu significado ou aplicação no mundo. Freire descreve essa dinâmica como uma forma de opressão que nega o diálogo e a construção conjunta do saber. (FREIRE, 1987).

Na concepção bancária da educação, o saber é uma doação dos que se julgam sábios aos que julgam nada saber. Doação que se funda numa das manifestações instrumentais da ideologia da opressão — a absolutização da ignorância, que constitui o que chamamos de alienação da ignorância, segundo a qual esta se encontra sempre no outro. (FREIRE, 1987, p. 58).

De maneira mais específica, sobre o Ensino de Física, o autor Prietecola adverte sobre uso inadequado da estrutura matemática como forma algorítmica, descolocada dos conceitos físicos. Segundo o mesmo, a exibição dos resultados sem a presença de uma provocação investigativa por trás, desvirtua os alunos do real sentido da ciência, deixando exposto para eles apenas uma visão deformada do conhecimento.

(PIETROCOLA, 2002). Diante dessas problemáticas, a busca por uma aprendizagem significativa, a superação de um modelo educacional bancário e a necessidade de ressignificar o papel da matemática, torna-se evidente que qualquer proposta didática inovadora precisa de uma ferramenta teórica para reestruturar o conhecimento científico para o ambiente escolar. A Teoria da Transposição Didática de Yves Chevallard oferece esse arcabouço, conforme detalhado a seguir.

4.2 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DE CHEVALLARD

A Teoria da Transposição Didática (TD), desenvolvida por Yves Chevallard (1991), oferece uma análise sistemática das transformações que um determinado saber sofre para se tornar um objeto de ensino. Sua premissa é a de que o conhecimento bruto passa por processos de Refinamento até chegar na etapa de ser ensinado.(CHEVALLARD, 1991).De forma mais específica as ideias que se apoiaram em sua formação como matemático, fornecem um estudo sistemático da passagem do conhecimento do ambiente acadêmico para o ensino básico, e vem penetrado cada vez mais em teoridas desenvolvidas na didática contemporânea. De acordo com Halté:

Como é possível que uma teoria – a transposição didática – enterrada no turbilhão das teses produzidas nas ciências humanas e depois exumada pela didática da matemática, tenha penetrado, a partir desta última, em todas as comunidades didáticas? Como acontece que, atualmente, todo trabalho de pesquisa em didática encontre-se na contingência, quer de requisitá-la, quer de abandoná-la, de integrá-la, ou, de uma forma ou de outra, de explorá-la, criticando-a, refinando-a, completando-a?
(HALTÉ, 2008, p. 117).

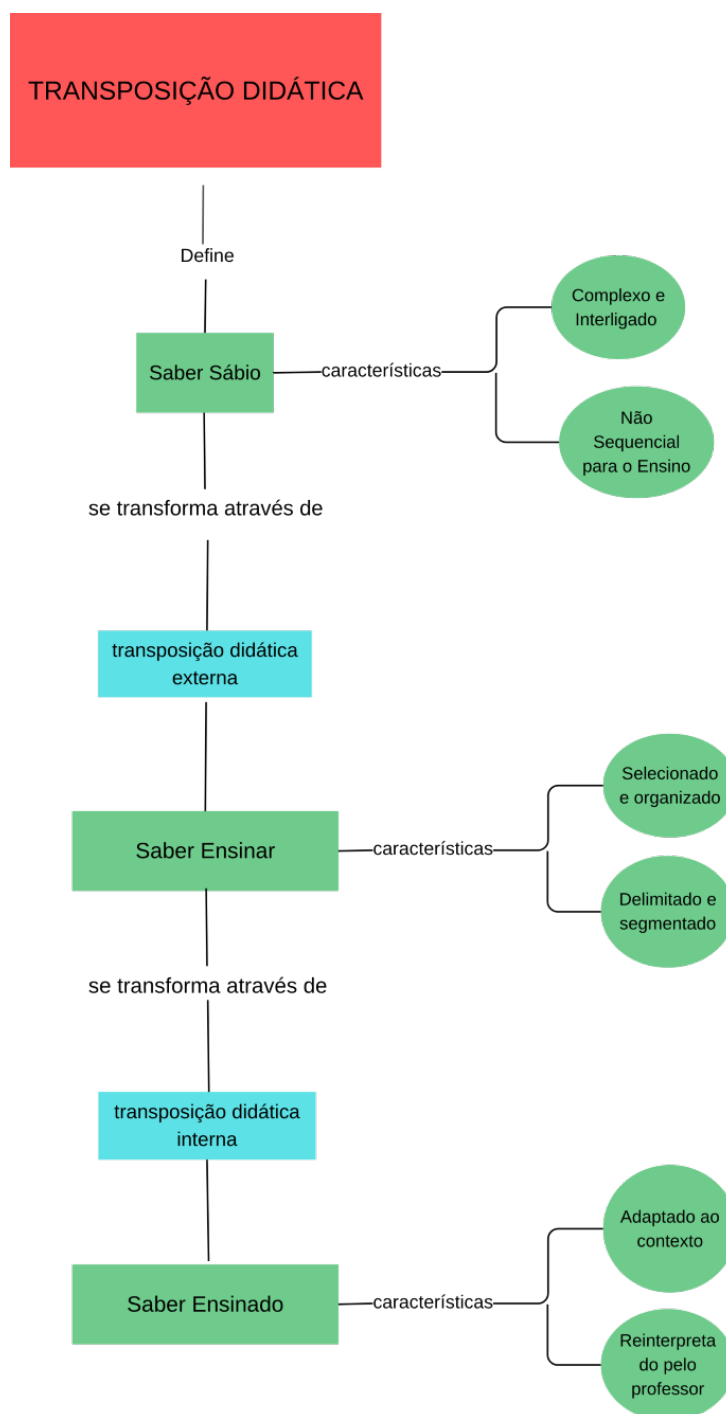
Dentre os processos de transformação, de acordo com a (TD) ao primeiro deles é denominado *Saber Sábio* que é o saber produzido pela comunidade científica e acadêmica, caracterizado por ser inserido em uma rede teórica complexa, conectado a problemas e contextos que lhe dão sentido. Ele não foi concebido com a finalidade de ser ensinado, mas sim de produzir novos conhecimentos. Para ser ensinado, este saber Sábio passa por um processo de refinamento e adaptação, denominado transposição didática externa. Essa primeira etapa de adaptação é realizada por um conjunto de atores e instituições que (CHEVALLARD, 1991) denomina noosfera um termo que engloba desde os formuladores de políticas curriculares e autores de livros didáticos até especialistas que "traduzem"o saber acadêmico para um formato didático. O resultado desse processo é o *Saber a Ensinar* (savoir à enseigner), que é o saber oficializado nos currículos e programas escolares. Durante essa etapa, o conhecimento sofre diversas modificações:(CHEVALLARD, 1991)

- Descontextualização e Recontextualização: O saber é retirado de seu contexto original de pesquisa e inserido em um novo contexto, o escolar, com novas lógicas e finalidades .
- Despersonalização: As marcas do produtor do conhecimento (as dúvidas, os erros, o percurso histórico da descoberta) são apagadas, e o saber passa a ser apresentado como um texto de conhecimento atemporal e acabado.
- Programabilidade: O saber é organizado em uma sequência lógica e progressiva, dividido em capítulos, unidades e exercícios, de modo a permitir uma "progressão de aprendizagens"

Após lapidado, o Saber a Ensinar se torna a referência da realização da prática do professor. Entretanto, esse processo de adaptação não se encerra nessa etapa. Dentro do ambiente escolar, observando as nuances e individualidades das turmas e de seus alunos, o professor realiza a transposição didática interna sendo esta, aquela em que o docente escolhe os exemplos trabalhados, as analogias utilizadas, adaptando o nível de dificuldade para o melhor entendimento da turma. Transformando assim o Saber a ensinar no *Saber Ensinado* (*savoir enseigné*), que é o objeto de conhecimento que efetivamente circula durante a aula.

A transposição didática interna se torna uma etapa crucial para o processo de aprendizagem do aluno, nesse sentido o professor deverá se tornar um , nas palavras do autor, vigilante epistemológico tendo em vista que o mesmo deve mediar as distâncias entre o Saber Sábio e o Saber Ensinado, para que não se perca muito do necessário da teoria. Nesse sentido Marriana Bosch, pesquisadora e colaboradora de Chevallard cunha o termo *monumentalismo do saber* que se refere ao apelo ao saber como um monumento a ser visitado (como capítulos de um livro por exemplo) sem que o aluno entenda o porquê da sua existência (BOSCH *et al.*, 2020). O mapa conceitual a seguir sintetiza todas as etapas principais para a realização da TD:

Figura 10 – Mapa conceitual da (TD)



Fonte: Autor.

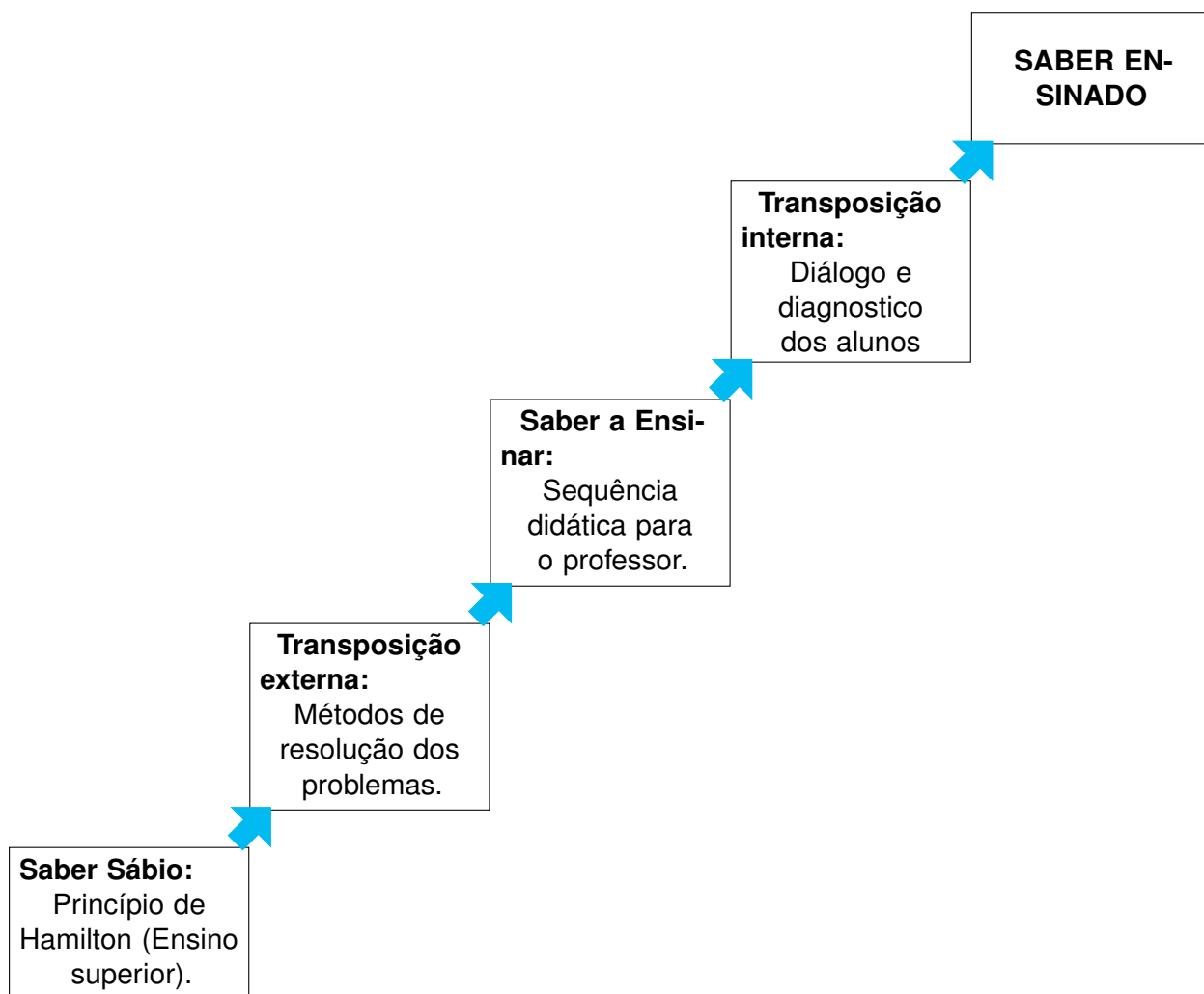
5 METODOLOGIA

Alinhada às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o aprofundamento do pensamento científico, a presente pesquisa adota uma abordagem qualitativa, focada no desenvolvimento de um recurso didático para professores do Ensino Médio. O propósito central do material é possibilitar a abordagem do Princípio de Hamilton de forma conceitual e qualitativa, explorando a riqueza de seus resultados por meio da análise de dois problemas clássicos: a trajetória da luz (Lei de Snell) e a curva Braquistócrona.

Tendo em vista que o Princípio da Mínima Ação não é um tópico abordado no Ensino Médio, dado o seu elevado nível de abstração e o formalismo matemático inacessível a essa modalidade, a escolha destes problemas se mostrou estratégica. Eles foram selecionados por sua capacidade de servir como pontes epistemológicas, permitindo que o poder unificador do princípio seja evidenciado sem a necessidade do cálculo variacional. Para tanto, as soluções foram cuidadosamente adaptadas para que pudessem ser desenvolvidas utilizando apenas o ferramental matemático já presente na grade curricular dos alunos, evitando assim a barreira imposta por tópicos como o cálculo diferencial e integral.

A fundamentação teórica que norteia a elaboração de toda a sequência didática é a Teoria da Transposição Didática de Yves Chevallard. Esta teoria oferece o arcabouço para analisar e estruturar o processo de transformação do "saber sábio" o Princípio de Hamilton em seu rigor acadêmico em um "saber a ensinar" acessível e significativo para o contexto escolar. Com o intuito de capacitar o docente, a pesquisa se propôs a apresentar os principais desenvolvimentos históricos e os resultados teóricos essenciais, permitindo que o professor reconheça os limites e as potencialidades de sua prática pedagógica ao realizar esta adaptação. O quadro a seguir delimita as etapas do processo de elaboração do material, em consonância com as fases da Transposição Didática.

Figura 11 – Fluxograma representando o processo de transposição Didática no contexto do trabalho.



Fonte: Autor.

A primeira etapa metodológica consistiu no estudo aprofundado do embasamento teórico apresentado nas seções anteriores, visando uma compreensão geral do Princípio de Hamilton e seu desenvolvimento histórico (Saber Sábio). A etapa subsequente correspondeu à elaboração da sequência didática, representando o "Saber a Ensinar". Este momento configura a transposição didática externa, conforme referida pela TD, e o procedimento central foi encontrar formas de adaptação e tratamento dos conceitos e resultados para o contexto do Ensino Médio, privilegiando abordagens qualitativas e acessíveis, baseando-se em referências como (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2011).

Por fim, a etapa final desta pesquisa foi a construção dos instrumentos avaliativos (Apêndice B), concebidos como ferramentas para auxiliar o professor na mediação com os alunos (transposição interna) e na avaliação do processo de aprendizagem. A construção do Saber Ensinado em sala de aula, objetivo final do processo didático, é a meta principal que se espera facilitar ao docente que se utilizar desta proposta.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com objetivo de fornecer ao professor meios para a abordagem do princípio de Hamilton no Ensino Médio e partir do exposto sobre a TD, as seções a seguir visam discriminar os resultados obtidos em cada etapa do processo de transições dos saberes, ou seja, com o Saber Sábido adquirido, como se deu o processo de refinamento para atingir Saber Ensinar, além de discutir as sugestões para a realização da transposição interna para o professor.

6.1 TRANSPOSIÇÃO EXTERNA: SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA TRAJETÓRIA DA LUZ

Uma vez reconhecido o Saber Sábido, o principal desafio didático reside na adaptação do conceito e do formalismo matemático necessários para se obter a solução dos problemas. Para contornar o obstáculo imposto pela abordagem ancorada no cálculo variacional, a estratégia adotada foi postular um princípio fundamental que pudesse ser assumido como válido para os casos estudados. Em especial, as soluções dos problemas aqui apresentados foram desenvolvidas assumindo o Princípio de Fermat como uma lei intrínseca que governa ambos os fenômenos.

A sequência didática foi estruturada de forma a apresentar o Princípio de Fermat não como um postulado isolado, mas como uma consequência advinda de um princípio mais fundamental e unificador: o Princípio de Hamilton. Para tal, o contexto histórico e a evolução natural destes princípios é o ponto inicial da primeira aula. Sendo assim, ambos os princípios representam uma lei de economia na natureza, sendo o de Fermat apenas o caso específico dessa lei de economia no contexto da luz.

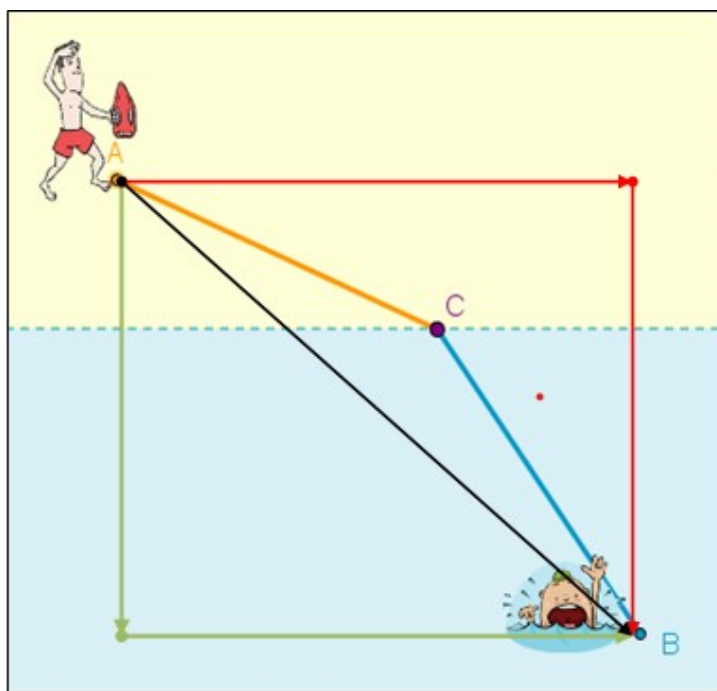
A abordagem do problema da trajetória da luz, como ponto de partida, levanta obstáculos epistemológicos cruciais que a presente proposta didática visa superar. Tais desafios, que nortearam a construção do material, podem ser resumidos nos seguintes pontos:

- **Interpretação conceitual:** Como traduzir a ideia de "tempo mínimo" percorrido pela luz de uma forma que seja intuitiva e acessível, superando a abstração do conceito?
- **Acessibilidade matemática:** De que forma é possível deduzir a Lei de Snell a partir do Princípio de Fermat, utilizando exclusivamente as ferramentas matemáticas já dominadas pelos alunos no Ensino Médio?

Para superar tais obstáculos, recorre-se a uma analogia para a trajetória da luz, conhecida como o problema do salva-vidas. Atribui-se a um salva-vidas na praia (ponto

A) a tarefa de resgatar um banhista que se afoga na água (ponto B) no menor tempo possível. Este problema é perfeitamente análogo ao da trajetória da luz, pois o percurso total é dividido entre dois meios nos quais a velocidade de deslocamento é diferente.

Figura 12 – Representação do problema do salva-vidas

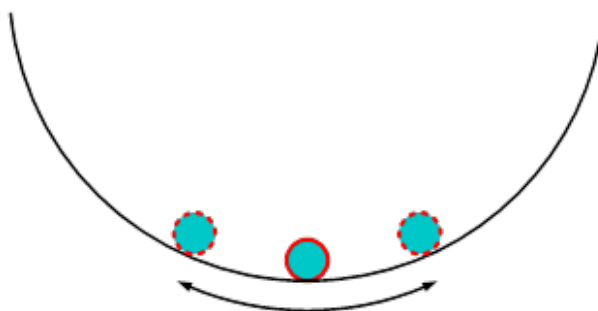


Fonte: Adaptado de: Formação Matemática de Nadadores Salvadores - Publicado pelo Atractor na Gazeta da Matemática (2003).

A solução para este problema não é trivial. Tendo em vista que a velocidade do salva-vidas na areia é maior, percorrer o caminho em linha reta (a menor distância) implicaria em passar mais tempo no meio mais lento (a água). Durante essa análise inicial, a sequência didática propõe que o professor instigue os alunos com questionamentos, a fim de induzi-los a raciocinar sobre essa troca. Tal analogia leva imediatamente à conexão com o Princípio de Fermat, justificando que, ao se assumir o tempo mínimo como pressuposto, é natural esperar uma trajetória diferente de uma linha reta.

A abordagem proposta nesta pesquisa para a solução do problema utiliza uma ideia adaptada do cálculo diferencial: a estabilidade de um ponto de mínimo. Quando um sistema se encontra em um estado de mínimo, pequenas variações nos parâmetros não alteram, em primeira aproximação, o valor dessa condição. A analogia visual utilizada para aproximação dos alunos é a de uma pequena esfera no fundo do poço de uma rampa, que sempre retorna ao seu ponto de equilíbrio para pequenos deslocamentos.

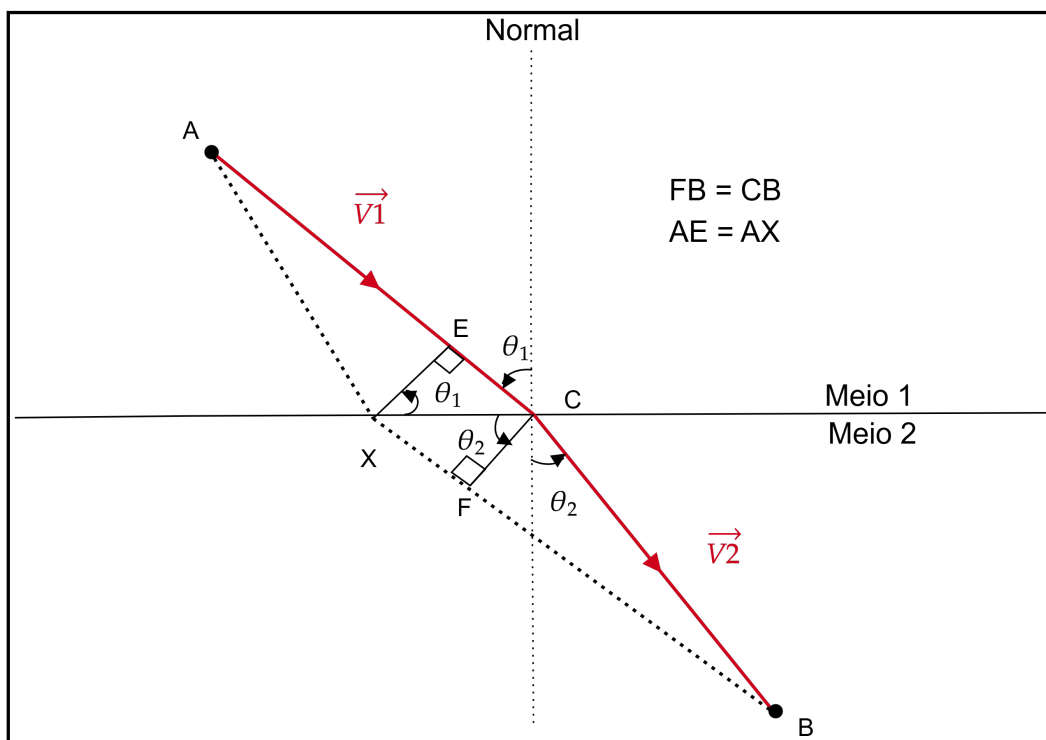
Figura 13 – Esfera em um poço



Fonte: Autor.

Essa mesma condição deve ser obedecida por uma trajetória de tempo mínimo. Isso significa que, para variações infinitesimais, uma trajetória vizinha à ótima deve ter, aproximadamente, o mesmo tempo de percurso. Essa premissa transforma o problema em uma questão solúvel por meio de uma análise geométrica, impondo que o tempo ganho ao encurtar infinitesimalmente uma parte do trajeto deve ser igual ao tempo perdido por alongar infinitesimalmente a outra parte. A figura 14 a seguir ilustra a situação descrita, onde a linha contínua representa a trajetória ótima ($A \rightarrow C \rightarrow B$) e a tracejada, uma trajetória vizinha ($A \rightarrow X \rightarrow B$). A escala da figura está exagerada para uma melhor visualização da configuração geométrica.

Figura 14 – A trajetória ótima (contínua) e uma trajetória vizinha (tracejada) utilizada na derivação geométrica da Lei de Snell



Fonte: Autor.

Denotando como v_a a velocidade da luz no primeiro meio (ar) e v_v a velocidade

no segundo meio (vidro), a condição que iguala os tempos infinitesimais Δt entre as duas trajetórias é:

$$\frac{\overline{EC}}{v_a} = \frac{\overline{XF}}{v_v} \quad (6.1)$$

A partir da geometria da figura 14, e considerando o deslocamento infinitesimal $\overline{XC}$, os segmentos de reta $\overline{EC}$ e $\overline{XF}$ podem ser escritos em função dos ângulos θ_1 e θ_2 (ângulo de incidência e refração, respectivamente):

$$\overline{EC} = \overline{XC} \sin(\theta_1) \quad (6.2)$$

e

$$\overline{XF} = \overline{XC} \sin(\theta_2) \quad (6.3)$$

Substituindo as expressões dos segmentos (6.2) e (6.3) na equação de igualdade de tempos (6.1), obtemos:

$$\frac{\overline{XC} \sin(\theta_1)}{v_a} = \frac{\overline{XC} \sin(\theta_2)}{v_v} \quad (6.4)$$

Cancelando o termo comum $\overline{XC}$ e rearranjando a equação, chega-se ao resultado conhecido como Lei de Snell, expressa em termos das velocidades nos dois meios:

$$\frac{\sin(\theta_1)}{v_a} = \frac{\sin(\theta_2)}{v_v} \quad (6.5)$$

O resultado embora conhecido pelos alunos é dessa forma obtido a partir de um princípio Variacional. A conclusão desse procedimento, é que esse caminho percorrido pela luz é aquele em que minimiza a ação conforme indica o princípio de Hamilton, conexão que deverá ser enfatizada pelo professor, com o resultado obtido.

6.2 TRANSPOSIÇÃO EXTERNA: SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

Para a solução do problema da braquistócrona, surgem alguns problemas epistemológicos :

- **Interpretação conceitual:** Como suprimir a interpretação de que o menor caminho entre dois pontos sempre será uma linha reta?
- **Acessibilidade matemática:** De que forma é possível deduzir qual a curva que otimiza o tempo sem a utilização do cálculo variacional diretamente?

Para esse problema, que deverá ser avaliado de forma sequencial ao da trajetória da luz, a idéia principal proposta para o professor é a utilização da solução publicada por Bernoulli (ou parte dela) que faz uso do princípio de Fermat como

argumento. Tal escolha se apoia no fato de que o aluno já conhecerá os resultados obtidos para a luz a partir desse princípio, além de saber (por ter sido apresentado na aula de contexto histórico) que tal conexão entre os problemas instigou em Maupertuis a ideia de começar a pensar em um princípio mais geral. Ideia que posteriormente levou ao princípio de Hamilton.

Para resolver Bernoulli abstraiu que a trajetória de uma partícula de 1 até 2 no menor tempo, funcionaria como um feixe de luz se movendo entre meios com índices de refrações diferentes, de forma que a velocidade variaria continuamente. Utilizando ainda o fato de que na ausência de atrito a energia se conserva, Bernoulli chegou na expressão:

$$\frac{\sin(\theta_n)}{\sqrt{2gy}} = K \quad (6.6)$$

Que corresponde a equação de uma cicloide. Essa equivalência deverá ser exposta pelo professor, pois a partir daí a prova só poderia ser feita mediante uso de cálculo diferencial. A solução proposta por Bernoulli pode ser avaliada com mais detalhes na seção 2.2 desta pesquisa.

6.3 SABER ENSINAR: SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A construção da sequência didática, aqui exposta como a etapa do Saber Esinar, fora feita apoiada principalmente no que preconiza BNCC sobre as temáticas apresentadas, além de se apoiar em um grande enfoque em discussões e na compreensão dos problemas, conforme indica a literatura. O objetivo fora o de possibilitar a abordagem do princípio de Hamilton no Ensino médio, garantindo ao professor um guia para montagem de seu planejamento. O quadro a seguir representa os alinhamentos entre a proposta e algumas habilidades da BNCC.

Quadro 1: Alinhamento da proposta didática com as habilidades da BNCC.

CÓDIGO	Habilidade da BNCC	Relação com a Proposta Didática
EM13CNT101	Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, transformações e conservações em sistemas que envolvem quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos.	Princípios de Fermat/Hamilton: descrevem e preveem sistemas físicos via energia e otimização (tempo/ação).
EM13CNT102	Realizar previsões, avaliar intervenções e/ou construir protótipos de sistemas produtivos que visem ao aumento de eficiência, sustentabilidade ou otimização de recursos e/ou processos.	Princípios variacionais (Fermat/Hamilton/Braquistócrona): focam na otimização (tempo/ação mínimos, caminho rápido), alinhando-se a esta habilidade.
EM13CNT201	Analisar e discutir modelos, teorias e leis propostos em diferentes épocas e culturas para comparar distintas explicações sobre o surgimento e a evolução da Vida, da Terra e do Universo, e compreender os fundamentos epistemológicos das Ciências da Natureza.	Abordagem histórica/conceituada: discute a evolução das ideias científicas e os fundamentos epistemológicos da Física (leis gerais/unificadoras).
EM13CNT301	Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos (desenhos, esquemas, tabelas, gráficos, mapas, equações, simulações computacionais, entre outros) para investigar fenômenos (...), como os relacionados (...) ao movimento, luz (...).	Aplicação: modelagem matemática de fenômenos (luz, braquistócrona), elaboração de hipóteses e previsões com matemática acessível ao Ensino Médio.

Fonte: Autor.

De forma mais específica, uma característica central da sequência didática apresentada, foram as sugestões de aulas dialogadas, a partir de perguntas disparadoras visando a participação e o engajamento constante da turma. Neste modelo, a participação dos estudantes é intencionalmente promovida e utilizada como um dos principais instrumentos de avaliação formativa. Através das respostas e discussões, o professor pode aferir a compreensão da turma em tempo real, identificar concepções alternativas e mediar a aprendizagem de forma responsiva. Esta abordagem pedagógica, intrínseca ao material desenvolvido, fundamenta-se na premissa de que o conhecimento se constrói na interação e no diálogo, uma concepção amplamente defendida por Paulo Freire (1987).

6.4 SABER ENSINADO: QUESTIONÁRIOS

De acordo com a TD, o Saber Ensinado, efetivamente construído em sala de aula, resulta de um processo de mediação do professor conhecido como transposição interna. No âmbito desta pesquisa, a elaboração da Sequência Didática representa a etapa anterior, o Saber a Ensinar: um objeto de ensino estruturado, planejado e adaptado pelo docente para ser apresentado aos alunos.

Para instrumentalizar a transposição interna, o diálogo e a interação diagnóstica em sala, o Apêndice B foi concebido como uma ferramenta avaliativa de duas etapas. A primeira parte consiste em um questionário de sondagem de conhecimentos prévios, a ser aplicado antes do início da sequência, visando mapear o repertório conceitual dos estudantes. A segunda parte, a ser aplicada ao final, retomam alguns dos questionamentos iniciais, afim de comparar as abordagens e aferir como o princípio de Hamilton pode ser inserido nas explicações dos fenômenos. A análise dos resultados de ambos os instrumentos oferece ao professor subsídios para refletir sobre sua prática e refinar a transposição didática em futuras aplicações.

6.5 DISCUSSÕES ADICIONAIS

De forma mais específica os problemas da trajetória da luz e da braquistócrona foram selecionados como eixos centrais da proposta por dois motivos principais: primeiro, por sua conexão histórica intrínseca, que remonta ao Princípio de Fermat e marca o início do desenvolvimento dos problemas de otimização; segundo, pelo fato de ambos permitirem abordagens qualitativas, com ferramentas matemáticas acessíveis à modalidade de ensino indicada. As análises desses problemas foram acompanhadas dos contextos históricos que se sucederam até a formulação moderna do Princípio de Hamilton.

Destaca-se ainda que nesta pesquisa o formalismo matemático foi apresentado ao docente de modo a manter o rigor necessário para o entendimento da teoria e do cálculo variacional, assim como as referências basilares foram indicadas para estudos mais aprofundados. Para adaptar os problemas indicados, cujas soluções gerais estão ancoradas no formalismo variacional, recorreu-se a analogias e argumentos qualitativos elaborados com base nas referências (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2011) para a trajetória da luz e na solução de Bernoulli, (BERNOULLI, 1697) para a curva Braquistócrona. O objetivo foi simplificar a obtenção de seus resultados e, ao mesmo tempo, reafirmar a unificação destes pelo Princípio de Hamilton.

Essa simplificação, embora aparente ser uma supressão do arcabouço matemático, é uma escolha didática deliberada. Ela permite ao aluno focar no essencial: reconhecer que ambos os problemas são governados por uma lei de otimização mais geral que conecta áreas distintas da natureza. Isso o habilita a refletir sobre problemas

adicionais que podem ser analisados sob essa mesma perspectiva.(??)

É fundamental salientar, contudo, que a sequência didática não deve ser encarada como um roteiro fechado ou um encerramento da discussão sobre a temática. Pelo contrário, ela foi concebida como um ponto de partida. Nesse sentido, o papel do professor como vigilante epistemológico é essencial para mediar futuros debates e aprofundamentos, adaptando o conteúdo à realidade de sua turma.(CHEVALLARD, 1991)

Como sugestão para trabalhos futuros, a aplicação prática desta proposta didática em sala de aula se impõe como o próximo passo natural. Tal implementação permitiria validar sua eficácia e coletar dados empíricos sobre a recepção e o aprendizado dos estudantes.

Ademais, no que tange ao conteúdo, os problemas aqui estudados representam apenas uma fração do vasto alcance dos princípios variacionais. A discussão sobre a catenária, intencionalmente sugerida na questão quatro do Apêndice B, é um exemplo claro de desdobramento temático possível.(MARION; THORNTON, 2004)

De forma análoga, a última questão de ambos os questionários (respondida no Apêndice C) foi estrategicamente escolhida para demonstrar a amplitude da abordagem por princípios de minimização, como o de Hamilton. Notavelmente, a solução deste problema foi obtida através de duas formas, a primeira utilizando cálculo diferencial, e a segunda através de analogias diretas com o Princípio de Fermat e a Lei de Snell, contornando a necessidade de um formalismo que fugiria ao escopo do Ensino Médio. Isso reforça o potencial pedagógico da proposta, ao conectar diferentes áreas da Física através de um conceito unificador.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa, fundamentada em uma análise criteriosa da literatura sobre o Ensino de Física e a TD de Chevallard, buscou apresentar uma proposta didática para que o professor possa abordar o Princípio de Hamilton no Ensino Médio. Espera-se que os materiais aqui desenvolvidos contribuam em uma dupla dimensão: para o docente, ao oferecer novos métodos e discussões que enriqueçam sua prática pedagógica; e para o aluno, ao apresentá-lo a uma das leis mais fundamentais da natureza, permitindo-lhe reconhecer padrões unificadores e desenvolver uma curiosidade genuína sobre o funcionamento do universo.

Por fim, esta pesquisa se consolida como uma contribuição prática ao debate sobre a modernização do currículo de Física. Ao demonstrar a viabilidade de uma abordagem qualitativa e conceitual para um tema da fronteira do conhecimento, o material aqui desenvolvido reforça que o Ensino Médio pode e deve ser um espaço para discussões profundas sobre a natureza da ciência. Espera-se que esta proposta sirva como um convite para que outros educadores ousem explorar novos temas, reafirmando o papel da escola não apenas como um local de transmissão de saberes, mas como um ambiente de formação de cidadãos com uma visão de mundo mais ampla, crítica e unificada.

REFERÊNCIAS

BERNOULLI, J. Solutio problematum fraternorum, de curvis isoperimetris & brachystochronis, &c. **Acta Eruditorum**, p. 211–217, Mai 1697. Disponível em latim. Disponível em: <<https://archive.org/details/actaeruditorum169716leip>>. Acesso em: 15 out. 2025.

BOSCH, M. *et al.* (Ed.). **Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook**. London: Routledge, 2020.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996. ISBN 978-8521200227.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné**. 2. ed. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

EULER, L. **Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes**. Lausanne & Geneva: Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, 1744. Disponível em: <<https://archive.org/details/methodusinvenie00eulegoog>>. Acesso em: 20 out. 2025.

FERGUSON, J. A brief survey of the history of the calculus of variations and its applications. **arXiv preprint math/0402357**, 2004. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/math/0402357>>. Acesso em: 28 set. 2025.

FERMAT, P. d. **Œuvres de Fermat**. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1891–1922. Volume 2 (Correspondência). Disponível em: <<https://archive.org/details/oeuvresdeferma02ferm>>. Acesso em: 02 out. 2025.

FEYNMAN, R. P.; HIBBS, A. R. **Quantum Mechanics and Path Integrals**. New York: McGraw-Hill, 1965. ISBN 978-0070206502.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman Lectures on Physics, Vol. I**. New millennium. New York: Basic Books, 2011. v. 1.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

GOLDSTEIN, H.; JR., C. P. P.; SAFKO, J. L. **Classical Mechanics**. 3rd. ed. San Francisco, CA: Addison Wesley, 2002. ISBN 978-0201657029.

HAMILTON, W. R. On a general method in dynamics; by which the study of the motions of all free systems... **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, p. 247–308, 1834. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1834.0017>>. Acesso em: 21 out. 2025.

IRODOV, I. E. **Problems in General Physics**. Moscow: Mir Publishers, 1988. ISBN 978-5030008004.

LAGRANGE, J.-L. **Méchanique Analytique**. Paris: Veuve Desaint, 1788. Disponível em: <<https://archive.org/details/meychaniqueanal00lagr>>. Acesso em: 20 out. 2025.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Mechanics**. 3rd. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1976. v. 1. (Course of Theoretical Physics, v. 1). Reimpressão.

LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007. ISBN 978-85-88325-72-2.

MARION, J. B.; THORNTON, S. T. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. 5th. ed. Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole, 2004.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa: a teoria e textos complementares**. São Paulo: Livraria da Física, 2011. ISBN 978-85-7861-112-7.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica, Volume 4: Ótica, Relatividade e Física Quântica**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2014.

PIETROCOLA, M. A matemática como estruturante do conhecimento físico. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 19, n. 1, p. 93–114, 2002. Disponível em: <<https://repositorio.usp.br/item/001262297>>. Acesso em: 15 out. 2025.

SILVA, A. P. B. da; MARTINS, R. d. A. Maupertuis e o princípio mecânico de ação mínima: uma análise crítica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 4, p. 625–638, 2007. Análise histórica do princípio de Maupertuis (1744/1746). Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/rbef/a/xcgFzf99tHVdDtTJ65WycjQ>>. Acesso em: 10 out. 2025.

TAYLOR, J. R. **Classical Mechanics**. Sausalito, California: University Science Books, 2005.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA**SEQUÊNCIA DIDÁTICA: O PRINCÍPIO DE HAMILTON NO ENSINO MÉDIO****AULA 1: A História das Leis de Economia da Natureza e o Princípio de Hamilton**

CONTEÚDO:	Apresentação do desenvolvimento histórico dos problemas de otimização: do Princípio do Mínimo Caminho de Heron, passando pelo Princípio do Tempo Mínimo de Fermat, o desafio da Braquistócrona, a ideia de "Ação" de Maupertuis, até a formulação do Princípio de Hamilton.
OBJETIVOS:	- Reconhecer a recorrência das "leis de economia" na natureza ao longo da história da Física. - Compreender a evolução histórica das propostas de solução para os problemas de otimização. - Avaliar a conexão entre o Princípio de Fermat e o Princípio de Hamilton como um caso particular de um princípio unificador.
RECURSOS:	Projektor(opcional), lousa.

ETAPAS / ATIVIDADES DA AULA	
1. Introdução (aprox. 10 min):	Perguntas disparadoras para a turma: "Qual o caminho mais rápido entre dois pontos? É sempre uma linha reta? Vocês acham que a natureza busca 'economizar' alguma coisa em seus processos?".
2. Desenvolvimento (aprox. 25 min):	Exposição dialogada sobre a evolução da análise dos problemas de otimização, utilizando uma linha do tempo visual para apresentar os principais cientistas e suas contribuições (Heron, Fermat, Bernoulli, Maupertuis e Hamilton).
3. Fechamento / Sistematização (aprox. 10 min):	Síntese dos contextos avaliados com a construção de um mapa conceitual simples na lousa, conectando os problemas históricos ao Princípio de Hamilton e estabelecendo o objetivo das próximas aulas.
Avaliação (aprox. 15 min):	Observação da participação e das respostas dos alunos às perguntas disparadoras. Aplicação das questões de diagnóstico de conhecimentos prévios (conforme Apêndice B da monografia).

AULA 2: O Problema da Trajetória da Luz e a Lei de Snell

CONTEÚDO:	O Princípio do Tempo Mínimo de Fermat. A Lei de Snell. Analogia do problema do salva-vidas. Dedução geométrica da Lei de Snell sem uso de cálculo variacional.
OBJETIVOS:	- Aplicar o Princípio de Fermat para resolver o problema da trajetória da luz. - Utilizar a analogia do salva-vidas para construir uma intuição sobre a otimização do tempo em diferentes meios. - Deduzir a Lei de Snell a partir de argumentos geométricos.
RECURSOS:	Lousa, projetor(opcional) para exibir as figuras da analogia e da dedução (Figuras 11 e 13 da monografia).

ETAPAS / ATIVIDADES DA AULA	
1. Introdução (aprox. 5 min):	Retomada da Aula 1, focando no Princípio de Fermat. Apresentação do "problema do salva-vidas", questionando a turma sobre qual seria a trajetória mais rápida para o resgate.
2. Desenvolvimento (aprox. 30 min):	Condução da dedução geométrica da Lei de Snell na lousa, baseada na premissa de que uma trajetória vizinha à ótima deve ter aproximadamente o mesmo tempo de percurso (conforme seção 5.1 da monografia).
3. Fechamento / Sistematização (aprox. 10 min):	Discussão final, enfatizando que a conhecida Lei de Snell pode ser entendida como uma consequência de um princípio de otimização, que por sua vez é um caso particular do Princípio de Hamilton.
Avaliação (aprox.15 min):	Análise das hipóteses levantadas pelos alunos para o problema do salva-vidas e acompanhamento do raciocínio durante a dedução na lousa.

AULA 3: A Braquistócrona - Conectando Luz e Mecânica

CONTEÚDO:	O problema da Braquistócrona. A solução de Johann Bernoulli por analogia com o Princípio de Fermat. Relação entre velocidade e altura (Conservação de Energia). A curva cicloide.
OBJETIVOS:	- Compreender o enunciado e a relevância do problema da Braquistócrona. - Aplicar criativamente o raciocínio da refração da luz para modelar um problema de mecânica. - Reconhecer o poder unificador dos princípios variacionais.
RECURSOS:	Projeto para exibir a curva cicloide (Figura 8 da monografia) e, se possível, vídeos de demonstrações práticas da Braquistócrona.

ETAPAS / ATIVIDADES DA AULA	
1. Introdução (aprox. 10 min):	Apresentação do desafio da Braquistócrona: "Qual deve ser o formato de uma rampa para que um objeto deslize de um ponto a outro no menor tempo possível?". Brainstorming e registro das hipóteses dos alunos (reta, arco, etc.).
2. Desenvolvimento (aprox. 25 min):	Exposição da solução de Bernoulli, conforme seção 5.2 da monografia: tratar a partícula em queda como um "raio de luz" atravessando meios com índices de refração continuamente variáveis. Usar a conservação de energia para relacionar a velocidade à altura ($v = \sqrt{2gy}$).
3. Fechamento / Sistematização (aprox. 10 min):	Apresentação da cicloide como a curva solução. Discussão sobre como um princípio da Óptica foi fundamental para resolver um problema da Mecânica, reforçando o poder unificador do Princípio da Mínima Ação.
Avaliação (aprox. 15 min):	Qualidade dos argumentos dos alunos durante as perguntas iniciais. Acompanhamento da compreensão da analogia proposta por Bernoulli.

AULA 4: Sistematização Final, Avaliação e Discussão

CONTEÚDO:	Revisão geral da sequência: Princípio de Hamilton, Princípio de Fermat, Lei de Snell e Braquistócrona. Conexão entre os conceitos. Aplicação de questionário de consolidação.
OBJETIVOS:	- Sistematizar o conhecimento construído ao longo da sequência didática. - Avaliar a compreensão conceitual dos problemas e do poder unificador do Princípio de Hamilton. - Incentivar a reflexão sobre a natureza da ciência e a beleza das leis Físicas.
RECURSOS:	Lousa, questionários impressos (conforme Apêndice B da monografia).

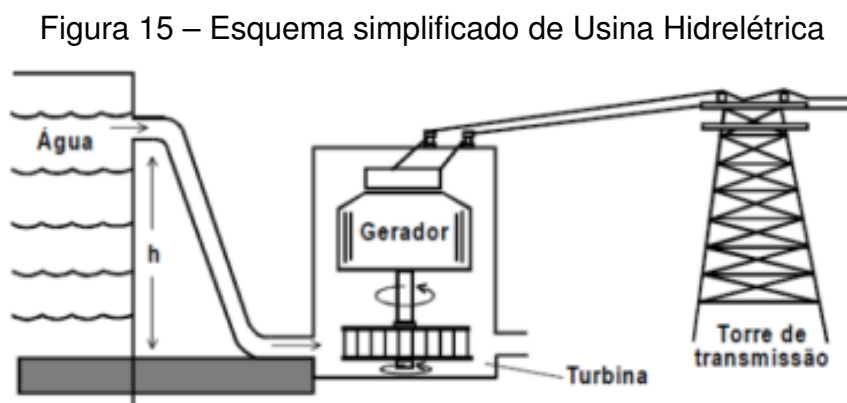
ETAPAS / ATIVIDADES DA AULA	
1. Introdução (aprox. 5 min):	Breve revisão da jornada das últimas aulas, construindo um mapa conceitual na lousa que conecte: Hamilton → Fermat → Luz (Snell) → Mecânica (Braquistócrona).
2. Desenvolvimento (aprox. 25 min):	Aplicação da segunda parte do questionário (exercícios de consolidação do Apêndice B) para que os alunos testem o que aprenderam.
3. Fechamento / Sistematização (aprox. 15 min):	Discussão coletiva das respostas do questionário, esclarecendo dúvidas. Roda de conversa final sobre as percepções dos alunos: "A forma de vocês enxergarem as leis da Física mudou após essas aulas? O que mais surpreendeu?".
Avaliação (aprox. 15 min):	Análise das respostas do questionário de consolidação para diagnosticar o aprendizado (Saber Ensinado). Qualidade dos argumentos e reflexões na discussão final.

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIOS DIAGNÓSTICOS E AVALIATIVOS

QUESTIONÁRIO 1: SONDAGEM DE CONHECIMENTOS PRÉVIOS

1. Com suas próprias palavras, o que você entende por "energia"?

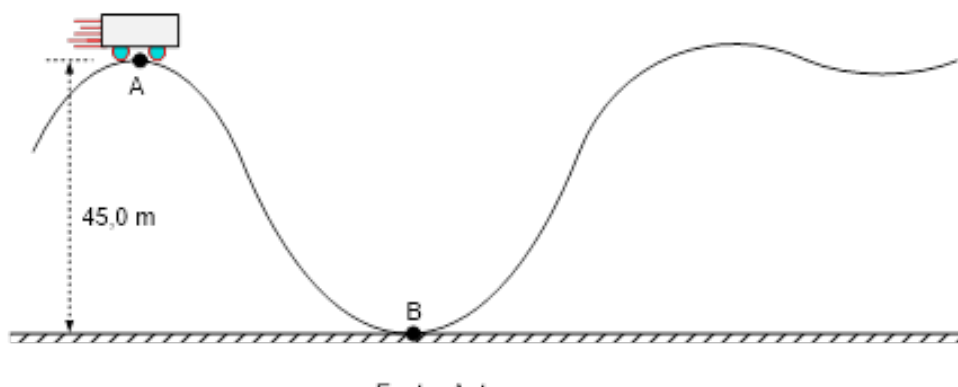
2. A figura ilustra uma usina hidrelétrica. Descreva as principais transformações de energia que ocorrem para que a água do reservatório gere eletricidade.



Fonte: FIP-Moc Medicina (2019/1).

3. Um carrinho de 200 kg parte do repouso no ponto A, a 45 metros de altura. Desprezando atritos, calcule a velocidade do carrinho ao passar pelo ponto B (nível do solo), usando o princípio da conservação da energia mecânica ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Figura 16 – Ilustração da situação da montanha-russa



Fonte: Autor.

- a) 15 m/s
 - b) 25 m/s
 - c) 30 m/s
 - d) 45 m/s
 - e) 900 m/s
4. Ao olhar para um lápis dentro de um copo com água, temos a impressão de que ele está "quebrado". Qual o nome desse fenômeno óptico e por que ele acontece (qual a causa física básica)?

Figura 17 – "lápis quebrado"

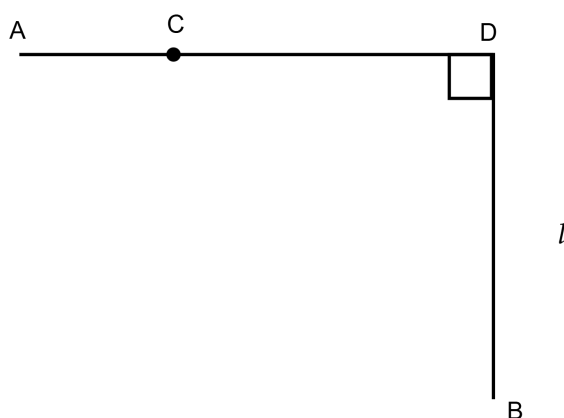


Fonte: Autor.

-
-
5. Um carro parte de um ponto A em uma estrada reta para chegar a um ponto B, localizado em um campo a uma distância perpendicular l da estrada. A velocidade do carro na estrada é $v_1 = \eta v$ e no campo é $v_2 = v$ (onde $\eta > 1$). Para chegar a B, o carro percorre a estrada até um ponto C e então entra no campo, como mostra a figura. Seja x a distância CD (onde D é o ponto na estrada mais próximo de B).

Determine, qual deve ser a distância x para que o tempo total de percurso (tempo t_{AC} + tempo t_{CB}) seja o menor possível.

Figura 18 – Trajetória do carro da estrada (ponto A) ao campo (ponto B)

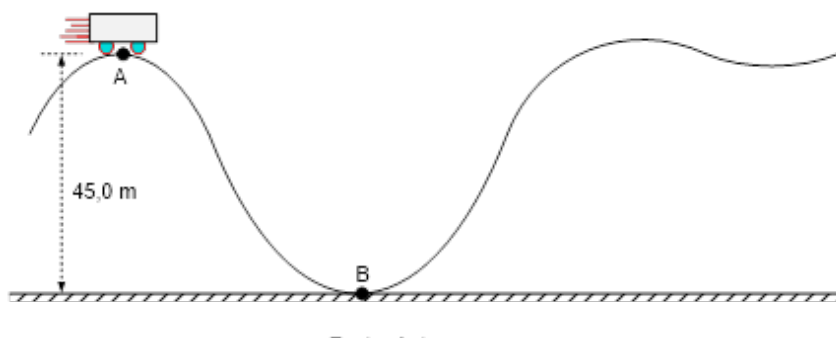


Fonte: Adaptado de Irodov, I.E., Problemas de Física Geral.

QUESTIONÁRIO 2: REVISITANDO CONCEITOS PÓS-SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1. Considere novamente a situação do carrinho na montanha-russa.

Figura 19 – Ilustração da situação da montanha-russa



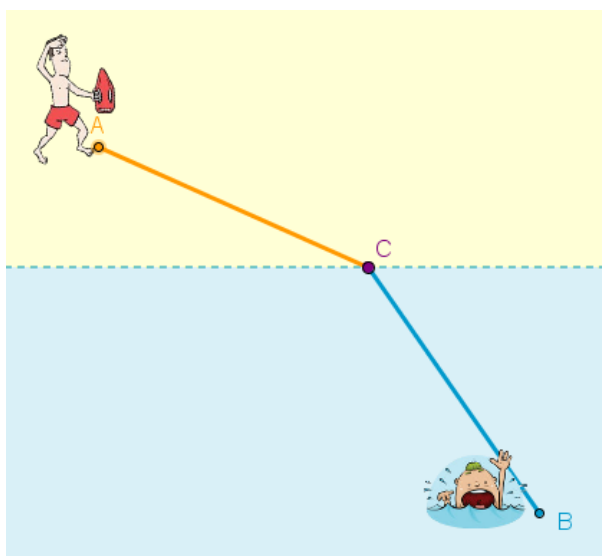
Fonte: Autor.

- Do ponto de vista da Mecânica Newtoniana, como explicaríamos resumidamente por que o carrinho ganha velocidade ao descer? (Dica: pense em termos de forças).
- Usando a ideia de Conservação de Energia, como explicamos o aumento da velocidade? Qual dessas explicações (Newton vs. Conservação) você considera mais direta para calcular a velocidade final, como feito no Questionário 1?
- Com base no que foi discutido nas aulas sobre "princípios de economia" e o Princípio da Mínima Ação, por que podemos dizer que a trajetória real seguida pelo carrinho (deslizando sem atrito) é, de alguma forma, a trajetória "mais eficiente" ou "mais natural" entre o ponto A e o ponto B? Que grandeza associada à energia está sendo otimizada ao longo do percurso real?

2. Durante as aulas, vimos que a forma de pensar a Física mudou. Newton focava nas *causas* instantâneas do movimento (forças). Pensadores como Maupertuis, Lagrange e Hamilton buscaram princípios mais gerais, olhando para a trajetória como um todo. Explique com suas palavras qual foi a principal mudança de perspectiva introduzida pelos "princípios de economia" (como o Princípio da Mínima Ação) em comparação com a abordagem de Newton.

3. Lembre-se do fenômeno do lápis que parece quebrado na água (refração) e da analogia do salva-vidas.

Figura 20 – Ilustração da situação do salva-vidas



Fonte: Formação Matemática de Nadadores
Salvadores - Publicado pelo Atrator na Gazeta da
Matemática (2003).

- Qual grandeza o salva-vidas (e a luz, segundo o Princípio de Fermat) está tentando minimizar ao escolher uma trajetória que não é uma linha reta entre os pontos inicial e final?
- Explique por que, tanto para o salva-vidas quanto para a luz, o caminho que minimiza essa grandeza não é a linha reta que representa a menor distância. Qual a condição Física que causa o desvio?
- Como a ideia de minimizar essa grandeza ajuda a entender por que o lápis parece quebrado dentro d'água?

4. O problema da Catenária estuda a forma que um fio flexível assume quando suspenso por dois pontos sob a ação da gravidade. Usando as ideias de "economia na natureza" discutidas, explique por que essa forma específica (e não uma parábola ou outra curva) pode ser considerada a solução "mais estável" ou "mais econômica" encontrada pelo fio. Qual grandeza Física você acha que a natureza está minimizando para que o fio atinja esse estado de equilíbrio?

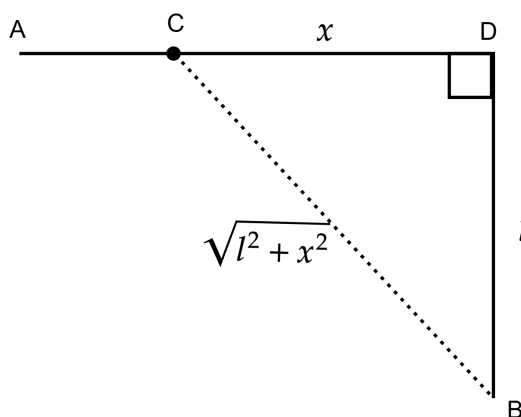
Figura 21 – Catenária entre postes



Fonte: Wikipedia.

5. Considere o mesmo problema do Questionário 1, onde um carro busca o caminho de tempo mínimo entre a estrada (meio rápido, $v_1 = \eta v$) e o campo (meio lento, $v_2 = v$).

Figura 22 – Trajetória de tempo mínimo para o carro



Fonte: Adaptado de Irodov, I.E., Problemas de Física Geral.

- a) Agora, explique como este problema é análogo ao Princípio de Fermat para a refração da luz, que foi discutido nas aulas.

- b) Identifique qual parte do problema (estrada ou campo) corresponde ao meio mais refringente (menor velocidade) e qual corresponde ao meio menos refringente (maior velocidade).

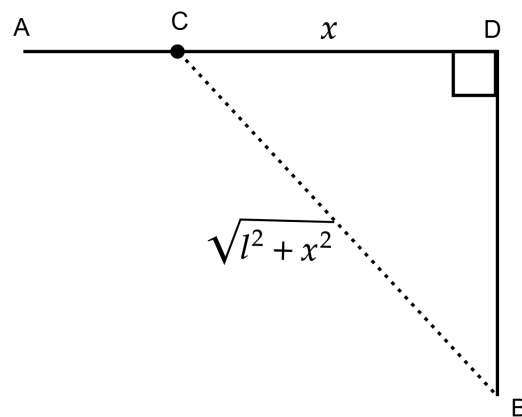
- c) Aplicando diretamente a Lei de Snell ($\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$), determine qual a distância x para que o tempo total de percurso seja mínimo. (Dica: O carro se move *ao longo* da estrada, qual é o ângulo de incidência θ_1 em relação à normal?)

APÊNDICE C – SOLUÇÃO DO ÚLTIMO PROBLEMA DOS QUESTIONÁRIOS

Este problema do questionário diagnóstico apresenta um desafio intencional. Trata-se de uma questão adaptada da coletânea de problemas do físico soviético I. E. Irodov, um material de referência conhecido mundialmente por seu alto rigor e por ser amplamente utilizado no ensino superior de física e engenharia. (IRODOV, 1988)

A solução direta deste tipo de problema exige o uso de cálculo diferencial, um tópico que não pertence ao escopo curricular do Ensino Médio. A inclusão da questão justifica-se, portanto, não pela expectativa de uma solução formal, mas para instigar o aluno e ilustrar a potência de métodos alternativos. A situação-problema é ilustrada na imagem a seguir:

Figura 23 – Trajetória de tempo mínimo para o carro



Fonte: Adaptado de Irodov, I.E., Problemas de Física Geral.

SOLUÇÃO 1: CÁLCULO DIFERENCIAL

O tempo total de percurso t é a soma do tempo na estrada (t_1) e o tempo no campo (t_2).

O tempo t_1 (trecho AC) é:

$$t_1 = \frac{\text{distância}_{AC}}{v_1} = \frac{D_{total} - x}{\eta v} \quad (\text{C.1})$$

A distância percorrida no campo (trecho CB) é a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos l e x :

$$\text{distância}_{CB} = \sqrt{l^2 + x^2} \quad (\text{C.2})$$

O tempo t_2 (trecho CB) é:

$$t_2 = \frac{\text{distância}_{CB}}{v_2} = \frac{\sqrt{l^2 + x^2}}{v} \quad (\text{C.3})$$

O tempo total $t(x)$ é a função que se quer minimizar:

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{D_{total} - x}{\eta v} + \frac{\sqrt{l^2 + x^2}}{v} \quad (C.4)$$

Para encontrar o tempo mínimo, deriva-se $t(x)$ em relação a x e iguala-se a zero (condição de ponto crítico):

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{D_{total}}{\eta v} \right) - \frac{x}{\eta v} + \frac{(l^2 + x^2)^{1/2}}{v} \right] = 0 \quad (C.5)$$

O primeiro termo é uma constante e sua derivada é zero. Aplicando a regra da potência e a regra da cadeia:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\eta v} + \frac{1}{v} \cdot \left[\frac{1}{2} (l^2 + x^2)^{-1/2} \cdot (2x) \right] = 0 \quad (C.6)$$

Simplificando:

$$-\frac{1}{\eta v} + \frac{x}{v\sqrt{l^2 + x^2}} = 0 \quad (C.7)$$

$$\frac{x}{v\sqrt{l^2 + x^2}} = \frac{1}{\eta v} \quad (C.8)$$

Cancelando v e isolando o termo com x :

$$\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = \frac{1}{\eta} \quad (C.9)$$

Para resolver para x , elevam-se ambos os lados ao quadrado:

$$\frac{x^2}{l^2 + x^2} = \frac{1}{\eta^2} \quad (C.10)$$

$$\eta^2 x^2 = l^2 + x^2 \quad (C.11)$$

$$\eta^2 x^2 - x^2 = l^2 \implies x^2(\eta^2 - 1) = l^2 \quad (C.12)$$

$$x = \frac{l}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \quad (C.13)$$

Esta é a distância x que minimiza o tempo total de percurso, resolvida usando cálculo.

SOLUÇÃO 2: ANALOGIA COM O PRINCÍPIO DE FERMAT (LEI DE SNELL)

Após o estudo do princípio de mínima ação e do princípio de Fermat, espera-se que o aluno seja capaz de identificar a similaridade entre o problema descrito e o problema da refração luminosa. Através das seguintes analogias, questão é facilmente resolvida:

- Estrada $\equiv$ Meio 1 (Meio rápido), $v_1 = \eta v$.
- Campo $\equiv$ Meio 2 (Meio lento), $v_2 = v$.

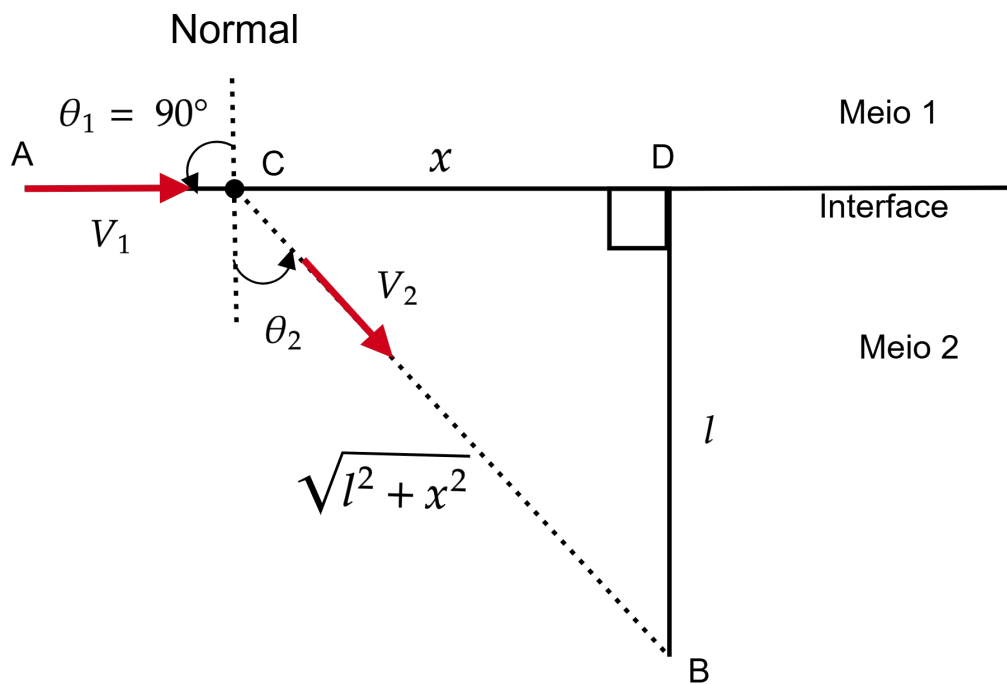
- Trajetória AC $\equiv$ Raio incidente.
- Trajetória CB $\equiv$ Raio refratado.

O Princípio de Fermat estabelece que a trajetória de tempo mínimo obedece à Lei de Snell:

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} \quad (\text{C.14})$$

Onde θ_1 e θ_2 são os ângulos medidos em relação à normal (a linha perpendicular à interface). A figura 24 ilustra a analogia utilizada.

Figura 24 – Representação da analogia utilizando lei de Snell



Fonte: Autor.

- Ângulo θ_1 (Estrada): O carro se move ao longo da estrada (trajetória AC). A trajetória é paralela à interface. O ângulo entre o raio incidente e a normal (CD) é, portanto, 90° .

$$\theta_1 = 90^\circ \quad (\text{C.15})$$

- Ângulo θ_2 (Campo): Este é o ângulo da trajetória CB com a normal. Pela geometria do triângulo retângulo CDB, obtém-se:

$$\sin \theta_2 = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} \quad (\text{C.16})$$

Substituindo estes valores na Lei de Snell:

$$\frac{\sin(90^\circ)}{\eta v} = \frac{\sin \theta_2}{v} \quad (\text{C.17})$$

Como $\sin(90^\circ) = 1$:

$$\frac{1}{\eta v} = \frac{\sin \theta_2}{v} \implies \sin \theta_2 = \frac{1}{\eta}$$

Substituindo as expressões para $\sin \theta_2$ e $1/\eta$:

$$\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = \frac{1}{\eta} \tag{C.19}$$

Esta é exatamente a mesma condição (C.9) encontrada pela derivada, e leva à mesma solução (C.13).