



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS CORRENTE
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO *LATU SENSU* EM ENSINO DE MATEMÁTICA

NOELMA VIEIRA MARTINS DOS SANTOS

HABILIDADES MATEMÁTICAS: DIAGNÓSTICO E POSSÍVEIS ABORDAGESN
DE LIMITES NO INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ – CAMPUS CORRENTE

CORRENTE

2017

NOELMA VIEIRA MARTINS DOS SANTOS

HABILIDADES MATEMÁTICAS: DIAGNÓSTICO E POSSÍVEIS ABORDAGESN DE
LIMITES NO INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ – CAMPUS CORRENTE

Monografia apresentada como requisito parcial para
aprovação do curso de Pós-Graduação Latu Sensu em Ensino
de Matemática pelo Instituto Federal do Piauí – Campus
Corrente.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientadora: Prof.^a Esp. Renata Resende Ibiapina Braga

CORRENTE

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Santos, Noelma Vieira Martins dos.

S231h Habilidades Matemáticas: diagnóstico e possíveis abordagens de limites do Instituto Federal do Piauí – Campus Corrente/ Noelma Vieira Martins dos Santos. -2017.
49 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Matemática) -
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Corrente,
2017.

Orientador: Prof Esp. Renata Resende Ibiapina Braga

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Habilidades Matemáticas 3. Métodos
Matemáticos. 4.Santos, Noelma Vieira Martins dos Santos. I.Título.

CDD – 510

Elaborado por Tefischer Huanderson Soares e Sousa CRB3/1251

NOELMA VIEIRA MARTINS DOS SANTOS

HABILIDADES MATEMÁTICAS: Diagnóstico e possíveis abordagens de limites de uma
função no Instituto Federal do Piauí – Campus Corrente

Monografia apresentada como requisito parcial para
aprovação do curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Ensino
de Matemática pelo Instituto Federal do Piauí – Campus
Corrente.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientadora: Prof.^a Esp. Renata Resende Ibiapina Braga

APROVADO PELA BANCA EXAMINADORA EM 16 DE JUNHO DE 2017

BANCA EXAMINADORA

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar ao meu Deus, a ele toda honra e toda glória, por tudo que tens feito na minha vida. Senhor tu és a essência da minha felicidade! Obrigado meu Senhor!

Ao meu esposo Ildomar Ferreira, aos meus filhos; Jonas, Jelton e Jean, obrigado pelo apoio e compreensão.

Aos meus pais, às minhas irmãs, aos meus queridos colegas, aos meus professores, aos Coordenadores da Pós Graduação, à minha orientadora Prof.^a Esp. Renata Resende, aos licenciando em Matemática, os meus sinceros agradecimentos.

“É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota.” (Theodore Roosevelt)

RESUMO

Sendo o estudo dos limites essencial para um bom desempenho do estudante da licenciatura em matemática, vemos uma necessidade de envolvê-lo com esse assunto, por isso o tema proposto para esse projeto é Habilidades Matemáticas: Diagnóstico e possíveis abordagens de Limites no Instituto Federal do Piauí – Campus Corrente. Nessa pesquisa não trataremos de provar as propriedades existentes; e as demonstrações e teoremas serão usados quando necessário. Pois, a finalidade desta é conhecer um pouco da história dos limites, conhecer métodos e práticas de ensiná-los. O estudo de limites de uma função é uma introdução ao estudo das derivadas, integrais e o fundamento do cálculo diferencial, sendo assim é de suma importância o ensino desse conteúdo que para muitos é um marco ou um ponto culminante para continuar na licenciatura. Os participantes da pesquisa serão professores de matemática e física do Instituto Federal do Piauí – Campus Corrente, esses foram escolhidos por já ministrarem o assunto em discussão. Também participarão alunos da Licenciatura em Matemática, que já tenham começado o estudo sobre o cálculo diferencial. A obtenção dos dados será feita em etapas que consisti no primeiro instante na resolução de questionários abertos pelos compartes para explorar os conhecimentos prévios dos estudantes e algumas habilidades dos docentes. Na segunda etapa, o pesquisador juntamente com os estudantes que fazem parte do projeto irão observar os métodos e práticas de um professor de Matemática e de Física, em seus respectivos laboratórios e logo em seguida, os mesmos escreverão um resumo sobre o aprendizado. A terceira fase dependerá do resultado obtido na segunda etapa, pois será escolhida a técnica que se destacar mais, para análise das habilidades encontradas. Visamos conhecer métodos e práticas que ajudarão os estudantes a entender um pouco mais sobre a noção de limites, e assim alcançar as habilidades matemáticas necessárias para um bom desempenho da sua formação acadêmica.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Habilidades. Limites. Métodos. Práticas.

ABSTRACT

Being the study of limits essential for a good performance of the undergraduate student in mathematics, we see a need to involve him in this subject, so the proposed theme for this project is Mathematical Skills: Diagnosis and possible approaches to limits of a function in the Federal Institute of Piauí - Campus Corrente. In this research we will not try to prove the existing properties; And the demonstrations and theorems will be used when necessary. For the purpose of this is to know a little of the history of boundaries, to know methods and practices of teaching them. The study of limits of a function is an introduction to the study of derivatives, integrals and the basis of differential calculus, so it is of utmost importance to teach this content that for many is a milestone or culmination to continue in the degree. The research participants will be teachers of mathematics and physics of the Federal Institute of Piauí - Campus Corrente, these were chosen for already ministering the subject under discussion. Also attending students of the Mathematics Degree, who have already started the study on differential calculus. The data will be obtained in steps that consisted in the first moment in the resolution of questionnaires opened by the groups to explore the previous knowledge of the students and some abilities of the teachers. In the second stage, the researcher together with the students who are part of the project will observe the methods and practices of a teacher of Mathematics and Physics in their respective laboratories and soon they will write a summary about the learning. The third phase will depend on the result obtained in the second stage, since the technique that stands out more will be chosen for the analysis of the skills found. We aim to learn methods and practices that will help students to understand a little more about the notion of boundaries, and thus achieve the mathematical skills necessary for a successful performance of their academic training.

Keywords: Mathematics Teaching. Skills. Limits. Methods. Practices.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Reta Real.....	12
Figura 2 – Paradoxo de Zeno.....	13
Figura 3 – Demonstrações da Propriedade de Existência de Limite.....	17
Figura 4 – Juntas de expansão.....	18
Figura 5 – Questionário I para professores de Matemática e Física do Campus Corrente	20
Figura 6 – Questionário II para os Licenciando em Matemática.....	21
Figura 7 – Explicação do conteúdo pelo Professor.....	32
Figura 8 – Geogebra um software matemático.....	33
Figura 9 – Resolução da questão sobre Série de Fourier.....	33
Figura 10 – Relação de comprimento em função da temperatura.....	34
Figura 11 – Ministração da aula pela professora de Física.....	35
Figura 12 – Dilatômetro Linear do Ifpi-Campus Corrente.....	36
Figura 13 – Discentes participantes da aula prática.....	37
Gráfico 1 – Resposta da 2ª Questão para licenciando.....	25
Gráfico 2 – Resposta da 4ª Questão para licenciando.....	28
Quadro 1 – Nomenclatura dos Símbolos.....	15
Quadro 2 – As respostas de cada professor, obtidas das questões 1, 2, 3 e 4.....	22
Quadro 3 – Respostas das questões 5 e 6 do Questionário I.....	23
Quadro 4 – Respostas da 3ª Questão do questionário II.....	26
Quadro 3 – Respostas da 5ª Questão do questionário II.....	28
Quadro 4 – Respostas da 6ª Questão do questionário II.....	30

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	10
1.1 Objetivo Geral.....	11
1.2 Objetivos Específicos.....	11
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	11
2.1 Noções de Limites: Os Primórdios.....	11
2.2 Definições de Limites.....	15
3 LIMITES E APLICAÇÕES.....	17
3.1 Expansão Térmica dos corpos.....	17
4 METODOLOGIA.....	19
4.1 Instrumentos e etapas da coleta de dados.....	19
5 ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	21
5.1 Resultados do Questionário I para professores de Matemática e Física.....	22
5.2 Resultados do Questionário II para os Licenciando em Matemática.....	25
5.3 Relatos da aula no Laboratório de Matemática.....	31
5.4 Relatos da aula no Laboratório de Física.....	34
6 CONCLUSÃO.....	38
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	40
APÊNCIDES.....	41
APÊNDICE A – Questionário (I) para professores participantes do projeto.....	42
APÊNDICE B – Questionário (II) para licenciando em matemática.....	43
APÊNDICE C – Construção da Série de Fourier no Geogebra.....	44
APÊNDICE D – Série de Fourier construída pelo discente.....	44
APÊNDICE E – Medindo as temperaturas na saída e entrada de vapor.....	45
APÊNDICE F – Material confeccionado para as aulas nos laboratórios.....	45
ANEXOS	46
ANEXO A – Projeto Pedagógico da Licenciatura em Matemática / ponto (1.3)	47
ANEXO B – Matriz Curricular da Licenciatura em Matemática 2013.....	49
ANEXO C – Matriz Curricular da Licenciatura em Matemática 2015.....	49

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos limites de uma função é importante para o ensino da matemática, pois, é uma introdução ao estudo das derivadas, integrais e o fundamento dos cálculos diferenciais. Mas, o que significa limites de uma função? A palavra Limite segundo o Dicionário de Língua Portuguesa (Klug, 2010) vem do latim (*limite*-, «idem» “o mesmo”) que significa: linha que demarca a extensão de superfícies ou terrenos contíguos; marco; baliza; raia; fronteira ou linha que marca o fim de uma extensão espacial ou temporal.

Em Matemática limites vem acompanhado da palavra função ou variável, sendo que limite de uma função (num ponto de acumulação do seu domínio) é o elemento do conjunto de chegada, que é aproximado tanto quanto se queira por valores da função tomados em pontos arbitrários do domínio, desde que estejam suficientemente próximos do ponto de acumulação considerado. Limite de uma variável é o valor fixo do qual uma grandeza variável pode aproximar-se indefinidamente (Klug, 2010).

Para se chegar a uma noção do que são limites de uma função, precisa-se em primeiro lugar entender que limites são utilizados para se estudar um intervalo de um determinado acontecimento ou espaço de tempo. Vários autores já falaram sobre o assunto, como D’Alembert (1783), Huygens (1695) e Cauchy (1857), pois desde os primórdios os estudos dos limites encantavam os matemáticos assim como o estudo do infinito.

Sendo o estudo dos limites fundamental para a compreensão de conceitos matemáticos e fenômenos que ocorrem com frequência na natureza vemos, portanto, a necessidade de envolver o discente de licenciatura em matemática neste assunto. Também foi feita uma análise do desenvolvimento de um dos itens, citados no Projeto Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática – Campus Corrente / 2013. (Anexo I).

O item (1.3) do Projeto Pedagógico discorre sobre o potencial do Instituto Federal do Piauí (IFPI) – Campus Corrente, no que tange a formação de professores para atuarem na educação básica. “Fomentar atividades científicas desde a produção de textos, **práticas laboratoriais**, práticas de ensino, modelos explicativos e projetos de investigação, relacionados com a atuação docente e com a aplicabilidade dos conhecimentos científicos e **tecnológicos** na compreensão do mundo natural e das relações sociais; por isso o tema proposto é *Habilidades Matemáticas: Diagnóstico e possíveis abordagens de limites de uma função*”.

1.1 Objetivo Geral

- Observar e analisar métodos e práticas de ensino sobre limites de uma função, aplicados pelos professores do Instituto Federal do Piauí – Campus Corrente, participantes da pesquisa. Que conduzam à obtenção de habilidades matemáticas e compreensão da noção de limites.

1.2 Objetivos Específicos

- Verificar a viabilidade dos métodos e práticas de ensino que conduzam à compreensão das noções de limites;
- Analisar nas atividades e experiências laboratoriais as habilidades matemáticas necessárias para um bom desempenho da formação acadêmica e do futuro docente.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Abordaremos aqui um breve histórico sobre o estudo dos limites, desde os primórdios, suas primeiras ideias, abrangendo os Conjuntos Numéricos, a Teoria dos Conjuntos, Funções e algumas das definições de limites de uma função, para a introdução do assunto citado.

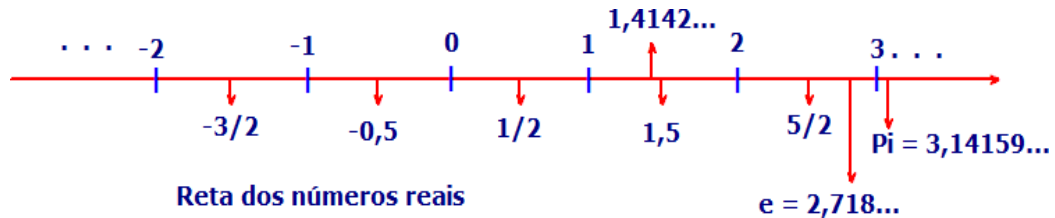
2.1 Noções de Limites: Os Primórdios

Analisando quando é que o discente tem o primeiro contato com a noção de limites, observamos que é nos primeiros anos do ensino fundamental quando ele passa a estudar os Conjuntos Numéricos. A Teoria dos conjuntos tem como precursor o matemático alemão Georg Cantor que viveu entre 1845 – 1919. Para Cantor, Segundo ROONEY, 2012:

O conjunto dos inteiros positivos e o conjunto dos inteiros negativos são infinitos, mas são conjuntos equivalentes, pois há um inteiro negativo correspondente a cada inteiro positivo. Como Cantor rapidamente percebeu (e outros, incluindo Galileu havia percebido antes dele), cada número natural pode ser elevado ao quadrado, assim há um conjunto infinito de números naturais e um conjunto infinito de seus quadrados. (ROONEY, 2012, pg.194).

Com isso, Cantor, “desenvolveu um conceito de números **transfinitos** que reconhecia diferentes tamanhos de infinito”. E quando lemos diferentes tamanhos de infinito, lembramos que limites são intervalos ou pedaços desse infinito. E é na **Reta Real** onde podemos observar todos os Conjuntos Numéricos, os intervalos e as dízimas periódicas, veja um exemplo de reta numérica:

Figura 1 – Reta Real



Fonte: Site/**Blog do Enem**. Disponível em: < <http://blogdoenem.com.br/enem-2013-operacoes-em-r-matematica> >. Acesso em: 05 mar. 2016.

Se tomarmos como exemplo o número um (1) na reta real, podemos ressaltar que existem valores tanto pela direita como pela esquerda que vão se aproximando desse número. Citamos alguns exemplos dessas aproximações tendendo ao número um (1) no intervalo entre zero (0) e o número dois (2) onde podemos observar que esses números são infinitos.

Pela esquerda: 0,1/ 0,01/ 0,999(...)99 e todo e qualquer número da forma (zero (0), vírgula (,) e qualquer outro número).

Pela direita: 1,01/ 1,0001/ 1,999(...)99 e todo e qualquer número da forma (um (1), vírgula (,) e qualquer outro número).

Nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio começa um estudo mais detalhado dessa “noção de limite”. Já temos o **Plano Cartesiano**, as coordenadas com os seus pares ordenados e o estudo das funções e as suas representações nos seus respectivos **gráficos**, já sendo possível analisar os pontos de máximo e mínimo das funções. Temos também um estudo mais detalhado da função polinomial e das operações com polinômios essenciais para o estudo dos limites de uma função.

As primeiras ideias sobre o conceito de função surgiram no início do século XVII, vejamos alguns como, Zenão de Eleia (450 a.C), ele propôs o Paradoxo de Zeno expresso na Figura 2.



Figura 2 – Paradoxo de Zeno

Fonte – Ilustração do livro: A História da Matemática (ROONEY, 2012, pg. 82)

No Paradoxo ele diz que: “Não importa quanto uma unidade possa ser subdividida ela nunca expressa o contínuo que vemos na vida real”. Zenão tentou explicar algumas relações infinitesimais, mas, apenas piorou a situação (ROONEY, 2012, pg.83). Como para explicar o “absurdo de se lidar com unidades inteiras, mesmo que pequenas”. Segundo Rooney (2012, pg. 153), o Paradoxo de Zeno não pode ser resolvido usando o cálculo, mas, pode ser expresso, dividindo o movimento contínuo em pequenos movimentos. Observe como ficou:

Usando d para representar a distância que a tartaruga andou desde o ponto de partida, e t para representar o tempo que se passou temos uma sequência de tempos e distâncias correspondentes, $(t_1, t_2, t_3, \dots$ e $d_1, d_2, d_3, \dots)$ a velocidade com que a tartaruga se move é uma função de tempo e distância e da taxa de mudança de posição da tartaruga. Sua velocidade durante um intervalo de dois tempos, t_1 e t_2 , é dada por: $\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$ (ROONEY, 2012, pg. 153)

A conclusão do Paradoxo de Zeno é que Aquiles nunca conseguirá alcançar a tartaruga, mesmo que a distância entre eles seja pequena e Aquiles seja 10 vezes mais veloz que ela, observamos a dificuldade com o Cálculo Infinitesimal (NUSSENZVEIG,2002, pg.35).

Essas dificuldades estavam relacionadas com a formulação dos conceitos básicos do Cálculo Infinitesimal (como limite, derivada e integral), que nasceram precisamente da análise do problema do movimento. [...] A dificuldade básica dos Gregos estava em entender que a soma de uma série infinita de intervalos de tempo que tendem a zero rapidamente (em progressão geométrica) pode ser finita. (NUSSENZVEIG, 2002, pg.35)

Outro paradoxo, mas esse envolvendo movimento bidimensional e que inclui casos importantes, como por exemplo, o movimento dos projéteis estudado por Galileu e outros que abrangem movimento em queda livre, é o paradoxo do caçador e do macaco (NUSSENZVEIG,2002, pg.41).

[...] O caçador aponta para o macaco pendurado num galho; ao ver o clarão de disparo, o macaco se assusta e cai, mas isto não o salva, porque a aceleração da gravidade atua da mesma maneira sobre ele e a bala, no movimento de queda livre, e o desvio vertical da bala e do macaco, em relação à linha de mira original, é o mesmo. (NUSSENZVEIG,2002, pg.41).

Esses e mais outros paradoxos e conceitos foram apresentados para explicar funções, cálculos infinitesimais como os limites, derivadas, integrais e até mesmo o infinito, mesmo que muitas vezes frustrados em seus resultados e ideologias, como vimos no paradoxo de zeno; mas que de certa forma ajudaram a construir as definições que temos hoje.

Outros filósofos estudaram as funções, o infinito e os limites neles existentes, como D'Alembert (1717 – 1783), Huygens (1629 – 1695), Cauchy (1789 – 1857) e outros. Para D'Alembert (*apud* BOURCHTEIN, 2010, pg. 73), “Um valor é dito ser o limite de um outro valor quando o segundo pode se aproximar do primeiro dentro de algum valor dado, de qualquer modo pequeno, embora o segundo valor nunca possa exceder o valor ao qual se aproxima.

Mas, para o filósofo inglês, Hobbes (1588 – 1679) o estudo dos limites, tem também outro significado, que é o resultado da incapacidade do homem em calcular o infinito, como muitos naquela época tentaram (BARRETO, 2003).

[...] Quando dizemos que alguma coisa é infinita queremos apenas dizer que não somos capazes de conceber os limites e fronteiras da coisa designada, não tendo concepção da coisa, mas de nossa própria incapacidade. (BARRETO, 2003, pg. 187)

Hoje, vemos que a ideia de Hobbes estava equivocada, pois o estudo dos limites vai muito mais além do que um simples conceito matemático. Como já vimos ele é a base do cálculo diferencial, o estudo dos limites é o estudo do próprio infinito. Mas naquela época esse estudo foi motivo de muitas tentativas frustradas de muitos matemáticos em explicar a essência do universo ou pelo menos onde começa e termina alguma coisa, e se não conseguiram encontrar o fim (infinito) eles aproximaram com os limites.

2.2 Definições de Limites

No quadro I a seguir listamos os nomes dos símbolos utilizados aqui, estes foram nomeados para facilitar o entendimento da definição.

Símbolo	Como se lê
ϵ	Épsilon
δ	Delta
$\Leftrightarrow$	Se, e somente se
$\in$	Pertence
$\rightarrow$	Implica
$\exists$	Existe
$\forall$	Para todo
∞	Infinito

Quadro 1 – Nomenclatura dos Símbolos

São muitos os autores que falam sobre o estudo dos limites de uma função, desde as primeiras ideias, até às definições que vemos hoje, como, D'Alembert (1783), Huygens (1695) e Cauchy (1857), mas para essa pesquisa ficaremos com as definições de Iezzi (2013), em Fundamentos da Matemática Elementar, “Um estudo sobre limites, derivadas e noções de integral” e Guidorizzi (2014), que trazem uma linguagem de melhor entendimento e que abrangem todo o nosso público alvo.

A definição de limites segundo Iezzi (2013, pg. 25), diz que seja I um intervalo aberto ao qual pertence o número real a . Seja f uma função definida para $x \in I - \{a\}$. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é L e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$. A definição em símbolos segundo Iezzi (2013) é a seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Lembramos aqui do intervalo na reta real quando usamos os símbolos: $] [$, $[]$ (colchetes) para identificar se um conjunto está aberto ou fechado. No caso dos limites esse intervalo I é aberto. Também vemos a ideia de distância no $|x - a|$, (módulo de $x - a$). No Paradoxo de Zeno, observamos a velocidade com que a tartaruga se move que é uma função de tempo e distância e que a sua velocidade durante um intervalo de dois tempos, t_1 e t_2 , é dada por: $\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$ (ROONEY, 2012). Essa expressão é muito usada na Física, pois o estudo dos limites não abrange apenas a matemática, mas diversas áreas do conhecimento.

Para o estudo do limite de uma função o importante não é o valor exato da questão, mas são os resultados encontrados durante o processo de aproximações desse valor, que vem tanto pela direita como pela esquerda. Como afirma Iezzi (2013) dizendo que “É importante ter sempre em mente no cálculo de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ que interessa o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a e não o que ocorre com f quando $x = a$ ”. Esses comportamentos dos limites da função podem ser observados em gráficos, onde se podem analisar os limites laterais, e quando um limite tende ao infinito.

Definição segundo Guidorizzi (2014), diz que “Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f . Dizemos que f tem limite L , em p , se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$ ”. Diz que esse número L , “que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$. Expresso em símbolo, temos:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ (0 < |x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Observa-se que Guidorizzi, apresenta o estudo da função, abrangendo o seu domínio, onde, podemos analisar a propriedade de existência de um limite, analisando também, a função em contínua e não contínua, mas que satisfaz à definição de existência de um limite. (GUIDORIZZI, 2014, p. 71). Veja na Figura 3 a seguir:

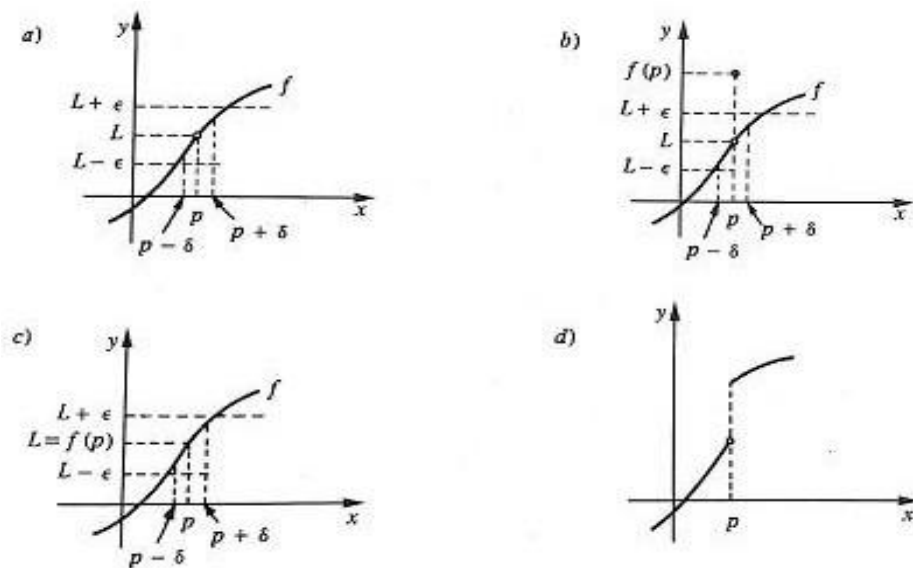


Figura 3 – Demonstrações da Propriedade de Existência de Limite
Fonte: Guidorizzi, Hamilton Luiz. 2014, pg. 71.

Na situação (a) da Figura 3, f não está definida em p , mas existe L que satisfaz a propriedade de existência, na situação (b) f está definida em p , mas não é contínua em p , entretanto existe L satisfazendo, na situação (c), f é contínua em p , assim, $L = f(p)$ satisfaz, e na situação (d), não existe L satisfazendo a propriedade em p . (GUIDORIZZI, 2014, p. 71). Ressaltamos, que a pesquisa não se ocupa em provar as propriedades existentes; mas é necessário sempre que possível expor algumas para um melhor esclarecimento.

3 LIMITES E APLICAÇÕES

São várias as atividades na natureza e em espaços modificados pelo homem, em que podemos observar as aplicações de limites, mas, para análise foi escolhida a Expansão Térmica.

3.1 Expansão Térmica dos corpos

Quando um corpo recebe ou cede calor, mudanças podem ocorrer em sua propriedade física e estrutural. Por exemplo, a temperatura do corpo pode aumentar ou diminuir, ao mesmo tempo em que ele se expande ou contrai, ou o corpo pode se fundir ou vaporizar, enquanto sua temperatura permanece constante.

Em grandes construções é comum se observar que os engenheiros projetam pontes e rodovias com juntas de expansão para permitir pequenas variações de comprimento, resultante da variação de temperatura (ver Figura 4).



Figura 4 – Juntas de expansão

Fonte: SiteBrasilecola, Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/upload/conteudo/images/deformacao-termica-sofrida-pelos-trilhos.jpg>> Acesso em 04 de maio 2017

Quando se aquece um sólido, suas dimensões geralmente aumentam. A este aumento das dimensões de um sólido, devido ao aquecimento, chamamos de dilatação térmica. Considere um longo bastão de comprimento L à temperatura T . Quando a temperatura de um sólido varia de ΔT , a variação do comprimento, $\Delta L/L$, é proporcional ΔT :

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta T \quad (1)$$

Onde α , é chamado de **coeficiente de dilatação térmico linear**. Tomando o limite quando $\Delta L \rightarrow 0$ e $\Delta T \rightarrow 0$, temos.

$$\lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \Delta T$$

Assim:

$$\frac{dL}{L} = \alpha \cdot dT \quad (2)$$

Integrando (2), temos:

$$\int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \int_{T_0}^T \alpha \cdot dt$$

A solução das integrais nos fornece:

$$L = L_0 \cdot e^{\alpha \Delta T} \quad (3)$$

Usando a expansão para $e^{\alpha \Delta T}$, teremos:

$$e^{\alpha \Delta T} = 1 + \frac{(\alpha \Delta T)^1}{1!} + \frac{(\alpha \Delta T)^2}{2!} + \frac{(\alpha \Delta T)^3}{3!} + \dots + \frac{(\alpha \Delta T)^n}{n!}$$

Desprezando os termos de ordem maior que 1, temos que:

$$e^{\alpha \Delta T} = 1 + \alpha \cdot \Delta T \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3), teremos que o comprimento L será dado por:

$$L = L_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T) \quad (5)$$

4 METODOLOGIA

O seguinte trabalho é uma pesquisa qualitativa, bibliográfica e de natureza exploratória, tem o propósito de conhecer mais o tema estudado, que é “Noção de Limites”. Não trata de provar as propriedades existentes; mas as demonstrações e teoremas são usados quando necessário. Pois, a finalidade da pesquisa é conhecer um pouco da história dos limites, conhecer métodos e práticas de ensiná-los e assim envolver o licenciando em Matemática com essas habilidades.

Os participantes da pesquisa são 5 professores de Matemática e 2 de Física do Instituto Federal do Piauí – Campus Corrente, esses foram escolhidos por já ministrarem o assunto em discussão, também participam discentes da Licenciatura em Matemática, que já começaram o estudo sobre o cálculo diferencial. Sendo 6 do Módulo IV, 6 do Módulo VI e 13 do Módulo VII.

4.1 Instrumentos e etapas da coleta de dados

A obtenção dos dados foi feita em etapas que consistiram no primeiro instante na resolução de um questionário aberto pelos compartes, sendo questionário I para professores e questionário II para os discentes.

Na segunda etapa, o pesquisador juntamente com os compartes do projeto observou os métodos e práticas de cada professor, em seus respectivos laboratórios. E por último a análise

das habilidades encontradas. Segue os questionários I e II e em seguida os resultados obtidos respectivamente.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI
CAMPUS CORRENTE
Projeto



Habilidades Matemáticas: Um estudo sobre limites e suas aplicações

QUESTIONÁRIO I / PROFESSORES

1. Professor (a) qual a área que você leciona?
☐ Matemática ☐ Física
2. Já lecionou sobre limites de uma função ou assuntos que envolveram limites?
☐ Sim! ☐ Não!
3. Qual a metodologia que você utilizou ou utilizaria para ensinar limites de uma função? Comete sobre a metodologia escolhida.
☐ Métodos práticos ☐ Aula tradicional
4. Você conhece alguma atividade extraclasse que envolve limites?
☐ Se a resposta for sim, então qual? _____
☐ Não!
5. Qual atividade prática ou experiência laboratorial envolvendo limites você realizaria para a introdução da noção de limites?

6. De acordo com a questão anterior, cite o nome de alguma propriedade que pode ser observada durante essa atividade prática ou experiência laboratorial.

7. Assinatura do professor (a) participante da pesquisa:

 (ASSINATURA OPCIONAL)

Figura 5 – Questionário I para professores de Matemática e Física do IFPI campus Corrente

As questões presentes no questionário I tiveram como objetivos identificar a área de atuação do professor, assim como, conhecer a metodologia utilizada para exposição do conteúdo em discussão. E nas demais questões encontramos nas práticas e experiências laboratoriais algumas habilidades para o ensino-aprendizagem dos limites de uma função.



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PIAUÍ - CAMPUS CORRENTE

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Instituto Federal De Educação, Ciência E Tecnologia Do Piauí – IFPI

CAMPUS CORRENTE

Projeto



Habilidades Matemáticas: Um estudo sobre limites e suas aplicações

QUESTIONÁRIO II / LICENCIANDO EM MATEMÁTICA

1. Qual módulo da Licenciatura em Matemática você está cursando?

() Módulo
2. Você tem noção do que é o estudo dos limites de uma função?

() Sim!
() Não!
3. Dê uma breve definição do que você entende por Limite de uma Função:
4. Você já participou de alguma aula prática em laboratórios de Matemática ou de Física?

() Se sim, então qual foi o assunto estudado? _____

() Não!
5. Qual a sua expectativa em participar desse projeto envolvendo atividades e experiências laboratoriais?
6. Cite o nome de alguma propriedade relacionada aos limites de uma função:
7. Assinatura do licenciando participante da pesquisa:

(ASSINATURA OPCIONAL)

Figura 6 – Questionário II para os Licenciando em Matemática

No questionário II, tivemos acesso aos conhecimentos prévios do licenciando em Matemática sobre limites de uma função, também, às opiniões sobre as aulas teóricas e práticas laboratoriais no decorrer da sua formação acadêmica.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

As aulas teóricas são indispensáveis para conhecermos determinados assuntos, mas, existem aqueles que precisam vir acompanhadas das aulas práticas para que, o educando possa visualizar e analisar de forma favorável à construção desse conhecimento, sendo essa construção um dos resultados esperados. Também se propõe conhecer métodos de cada professor com suas habilidades e práticas nos laboratórios de matemática e física, que ajudarão os estudantes a entender um pouco mais sobre esse conteúdo. Pois, sendo o estudo dos limites

essencial para um bom desempenho do discente da Licenciatura em Matemática, vemos uma necessidade de envolvê-lo com esse assunto, tendendo além das técnicas adquiridas proporcionarmos uma maior abrangência do conhecimento.

5.1 Resultados do Questionário I para professores de Matemática e Física

As respostas de cada professor, obtidas das questões 1, 2, 3 e 4 (questionário I) que segue em apêndice I, foram expostas no Quadro 2, e também os mesmos foram nomeados de **P.1, P.2, P.3...**, pela ética da pesquisa.

1. Professor (a) qual a área que você leciona?	
(05) Matemática	(02) Física
2. Já lecionou sobre limites de uma função ou assuntos	
(06) Sim!	(.01.) Não!
3. Qual a metodologia que você utilizou ou utilizaria para ensinar limites de uma função? Comete sobre a metodologia escolhida.	
(02) Métodos práticos	(07) Aula tradicional
P.5 – Em geral, uso definições e propriedades dos limites, e em seguida mostrar a aplicação dele nas diversas áreas baseadas na ideia intuitiva de limites. Normalmente o conteúdo de limites é um tema básico para que se possam desenvolver outros como calculo diferencial e integral, bem como comportamento de funções e séries.	
Observação: 01 professor escolheu as duas opções.	
4. Você conhece alguma atividade extraclasse que envolve limites? Se a resposta for sim, então qual?	
(04) Sim!	(03) Não!
P.3 – Dilatação térmica dos corpos, movimentos em queda livre em superfícies próximas à terra. P.5 – Aplicações em outras áreas da matemática, mas principalmente na física. P.7 – O uso de softwares com simplicidade e aplicações no estudo de fenômenos naturais, por exemplo na física.	

Quadro 2 – As respostas de cada professor, obtidas das questões 1, 2, 3 e 4 (questionário I)

Analisando as respostas dos professores, quanto às aulas práticas ou teóricas, observamos que a maioria escolheu as aulas teóricas, mas tomando como base o item (3.1), do Projeto Pedagógico que discorre sobre o potencial do Instituto Federal do Piauí (IFPI) –

Campus Corrente, no que tange a formação de professores para atuarem na educação básica. “Fomentar atividades científicas desde a produção de textos, práticas laboratoriais, práticas de ensino. Existe uma pequena ruptura, onde acarreta prejuízos para a formação do futuro professor. Mas esse problema já foi solucionado na grade curricular de 2015, onde temos, aulas de Laboratório de Matemática.

No Quadro 3, a seguir, traz as respostas das questões 5 e 6 do Questionário I, onde encontramos nas práticas e experiências laboratoriais algumas habilidades para o ensino – aprendizagem dos limites de uma função, e algumas atividades envolvendo suas propriedades.

5. Qual atividade prática ou experiência laboratorial envolvendo limites você realizaria para a introdução da noção de limites?	
P.1	<i>Utilizaria uma atividade com o geogebra, no laboratório de informática. Utilizaria ainda a construção de tabelas que se aproximariam do valor da abscissa desejado.</i>
P.2	<i>A experiência onde um recipiente teria uma fonte de água e uma saída, como uma torneira inserida e que após a fonte começar a derramar água no recipiente nota-se que a coluna de água começa a crescer, até que a vazão na saída seja igual à vazão de entrada, devido ao aumento da pressão, então notamos que nesse caso, quando $t \rightarrow \infty$, a altura da coluna de água se mantém constante.</i>
P.3	<i>Movimentos em queda livre (superfícies próximas à terra). Dilatação térmica dos sólidos</i>
P.4	<i>1. Determinação de valores de funções com o Excel usando aproximações. 2. Aproximação da velocidade de um móvel com o auxílio de um cronômetro de volta.</i>
P.5	<i>Duas que sempre realizo são: - Ideia de velocidade instantânea, a partir da definição de velocidade média. - Ideia da soma de Riemann, para o cálculo de área.</i>
P.6	<i>Tente sair da sala; um aluno está dentro da sala de aula e o professor coloca o seguinte desafio: “você, aluno só poderá a cada segundo andar a metade da distância entre você e a saída. Quanto tempo levaria para sair da sala?”.</i>
P.7	<i>A mesma citada no item anterior que é o uso de softwares com simplicidade e aplicações no estudo de fenômenos naturais, por exemplo na física</i>

6. De acordo com a questão anterior, cite o nome de alguma propriedade que pode ser observada durante essa atividade prática ou experiência laboratorial.	
P.1	<i>A propriedade de que a soma dos limites é o limite da soma dos termos de uma função.</i>
P.2	<i>O professor não respondeu!</i>
P.3	<i>Podemos citar como uma das propriedades, o poder de dilatação existente na matéria. Seu comportamento para variadas condições de temperatura, pressão e volume</i>
P.4	<i>Todas envolvem a compreensão do uso do diferencial de x, ou do incremento de x.</i>
P.5	<i>Propriedade de soma de funções e séries.</i>
P.6	<i>Noção de Limites.</i>
P.7	<i>O uso de softwares com simplicidade e aplicações no estudo de fenômenos naturais, por exemplo na física</i>

Quadro 3 – Respostas das questões 5 e 6 do Questionário I

Dentre as atividades práticas que se destacaram na pesquisa temos: Movimentos em queda livre, para superfícies próximas à terra, relacionando tempo e distância; Recipiente com uma fonte de água e uma saída, mostrando uma função de tempo e volume; Tente sair da sala, essa atividade usada para o estudo da noção de limites, mostra também uma relação de tempo e distância; o Geogebra que é um Software matemático, onde o manuseio do geogebra para demonstração de funções foi a atividade escolhida para a aula no laboratório de matemática.

Encontramos também o Dilatômetro Linear, para a dilatação térmica dos sólidos, sendo que esse experimento foi o escolhido para a aula no laboratório de física; e o Excel, outro Software matemático para determinação de funções usando aproximações.

Durante a visita aos laboratórios de Matemática e física, observamos, diversos aparelhos para experimentos e trabalhos científicos e que a maioria deles não são utilizados, onde o discente e futuro professor não tem contato com esses materiais, que com certeza iam ser uma grande ferramenta para suas aulas práticas e trabalhos que envolvem a matemática.

5.2 Resultados do Questionário II para os Licenciando em Matemática

As respostas obtidas pelos licenciando foram expostas e nomeados de **L.1, L.2, L.3...**, pela ética da pesquisa.

1ª Questão

Qual módulo da Licenciatura em Matemática você está cursando

IV módulo (6 discentes)	VI módulo (6 discentes)	VII módulo (13discentes)
--------------------------	---------------------------	----------------------------

Todos os licenciando da pesquisa já haviam cursando a disciplina de Cálculo Diferencial com uma Variável no módulo II, Cálculo Integral com uma Variável no módulo III e Cálculo Diferencial e Integral com Várias Variáveis no módulo IV. E alguns dos discentes do módulo VII, estavam finalizando o estudo das Equações Diferenciais.

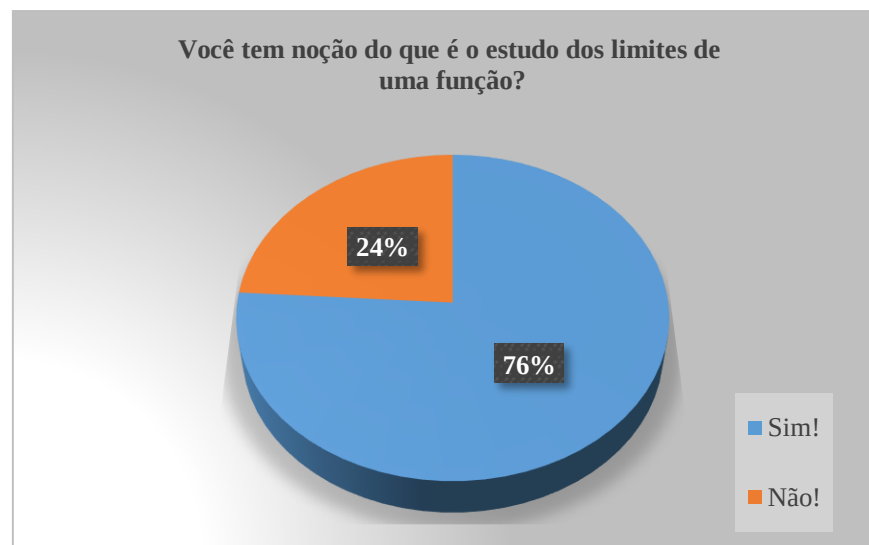


Gráfico 1 – Resposta da 2ª Questão para licenciando

A maioria dos discentes responderam que tinham noção do que é o estudo dos limites, mas, ainda existem aqueles que não conseguiram entender de fato o que esse estudo abrange ou o que é limite de uma função.

Dê uma breve definição do que você entende por Limite de uma Função (os licenciando foram nomeados de L1, L2, L3..., pela ética da pesquisa).	
L.1	É o comportamento de uma determinada função quando a mesma se aproxima de um certo ponto.
L.2	Limite é o estudo do comportamento de uma função que tende a um determinado valor (este pertence a um intervalo aberto).
L.3	Limite de uma função é o valor que se aproxima de um número, mas não chega nele.
L.4	Função de uma variável $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$; quando tomamos valores de x “tão próximos quanto queremos” de x, teremos “uma boa aproximação para $f(x)=L$ ”, ou seja “ limite de $f(x)$ quando x tende a α é igual a L.
L.5	É o estudo do que está acontecendo com uma função quando ela se aproxima de um ponto fixo.
L.6	O limite de uma função é que ele existe quando tanto pela direita quanto pela esquerda.
L.7	O limite é definido como uma função tendendo a um ponto tende a zero pela direita e pela esquerda, assim sendo fazemos aproximar para encontrar o limite tendendo este no ponto o mais próximo da raiz.
L.8	Dada uma função $f(x)=ax+b$, o limite é relacionado ao valor que a variável x assume.
L.9	O limite de uma função diz (mostra) o comportamento de uma função. Tipo, quais os valores de y, quando x é igual a: x, y e z, qual é o valor de uma variável em relação à outra.
L.10	É a capacidade que uma função tem em assumir valores em relação a outro valor, ou seja, x igual a um y qualquer, para obter um valor de z qualquer.
L.11	São valores do domínio de uma função quando se aproxima de um ponto ou pela direita ou pela esquerda.
L.12	Quando uma função possui um limite, esse limite é para mostrar o comportamento dessa função é como se fosse o intervalo onde ela se comporta.
L.13	Limite é um valor de máximo ou mínimo para uma função quando aplicado em um determinado ponto.

L.14	Limite é algo que podemos usar para determinar um problema que parece impossível que não tem fim. Por exemplo séries de sequência numérica.
L.15	O discente não respondeu
L.16	Seja uma função definida sobre um intervalo aberto que contém. O limite tem o objetivo de determinar o comportamento de uma função à medida em que ela se aproxima de algum valor.
L.17	Serve para determinar o comportamento de uma função quando se aproxima de alguns valores.
L.18	Limite é o comportamento de uma função quando a variável tende a um certo valor.
L.19	O discente não respondeu
L.20	Dizemos que uma função $f(x)$ tem um limite A , quando $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = A$.
L.21	Limite de uma função, estuda o comportamento de uma função que se aproxima de um ponto ao qual não se toca, assim podendo ser estudado esses valores entre essa função e o ponto.
L.22	O discente não respondeu
L.23	Não lembro
L.24	Não lembro
L.25	O discente não respondeu

Quadro 4 – Respostas da 3ª Questão do questionário II

Observa-se por algumas respostas dadas pelos discentes que realmente existem aqueles que responderam corretamente, muitos não conseguiram expressar a definição de limites. E houve outros que não lembraram deixando em branco essa questão. E essa dificuldade em entender de fato o que é o limite de uma função ocasiona pontos que prejudicam ao bom desempenho da licenciatura; como já vimos, o estudo dos limites de uma função é de suma importância para o ensino da matemática, pois, é uma introdução ao estudo das derivadas, integrais e o fundamento dos cálculos diferenciais.

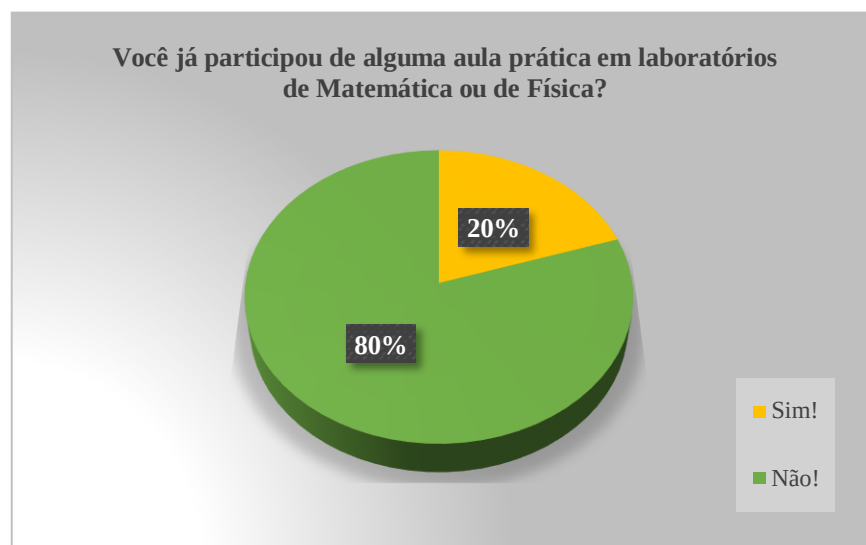


Gráfico 2 – Resposta da 4ª Questão para licenciando

A 4ª questão tem o objetivo de investigar o uso e a importância do laboratório de Matemática e Física para o licenciando em Matemática nas aulas práticas. Podemos observar que desde a implantação do curso no ano de 2010, a matriz curricular tem passado por mudanças e ajustes favoráveis, mas, como os discentes entrevistados seguem a matriz curricular de 2013, não participaram dessas mudanças presentes na matriz de 2015, que apresenta no módulo III, “Laboratório de Ensino de Matemática” e no módulo IX “Tópicos de Física”. Seguem em anexo as matrizes de 2013 e 2015.

Qual a sua expectativa em participar desse projeto envolvendo atividades e experiências laboratoriais	
L.1	Uma aprendizagem significativa, uma vez que, trabalharemos com uma pesquisa descritiva e experimental, ou seja, teoria e prática.
L.2	Posso dizer que é sempre bom participar de toda atividade que nos traga um conhecimento a mais.
L.3	Participar de uma aula diferenciada e aprender mais sobre limites.
L.4	Ampliar minha concepção acerca dos conceitos de limite, somando a isso, obter um leque maior de aplicações de limites.
L.5	A expectativa que tenho é que vai ser uma experiência interessante e enriquecedora, porque nunca presenciei algo parecido.
L.6	Que obtenha lucros em aprendizagem pelo fato de se deparar ao contato com o conteúdo.

L.7	A expectativa é que possa ver um estudo mais profundo envolvendo o próprio limite.
L.8	As melhores possíveis, até porque durante todo esse tempo de curso, nunca tivemos experiências acadêmicas com o laboratório.
L.9	Espero encontrar algo interessante que me estimule a pensar em fazer algo diferente em relação à matemática. Visando meu TCC.
L.10	Espero rever limites pois não obtive conhecimento de limites quando cursando, pois foi oferecido em horário especial, por essa razão estou interessado.
L.11	Tenho uma boa expectativa pois entendo que seja muito pertinente este projeto assim como as atividades que serão abordadas nele.
L.12	A expectativa é boa, as aulas se tornarão mais proveitosas e prazerosas.
L.13	São as melhores tendo em vista que as experiências práticas sempre ajuda a dominar um conteúdo.
L.14	Espero que venha a cobrir as necessidades dos alunos que não tem esse conhecimento e não sabe como aplicar essa ideia de limites em um laboratório.
L.15	Será um projeto de muito interesse de todos os alunos, pois diferencia. Uma aula rotineira pode tornar bem mais interessante no laboratório.
L.16	Aprender sobre onde se aplica a ideia de limites em atividades laboratoriais.
L.17	As melhores possíveis, pois tenho vontade de adquirir diversas experiências com laboratórios.
L.18	De melhorar o aprendizado com aulas práticas.
L.19	É importante, pois ajuda a entender melhor quando há uma visualização de onde usar o que se ensina na sala de aula.
L.20	São boas já que não tive nenhuma experiência em laboratórios.
L.21	O discente não respondeu
L.22	Na atualidade, o uso destes novos equipamentos tecnológicos, ajuda a facilitar e a compreender tal assunto. Exemplo, sólidos geométricos na geometria, com o uso de alguns softwares, como o google sketchup.
L.23	O discente não respondeu

L.24	O discente não respondeu
L.25	O discente não respondeu

Quadro 5 – Respostas da 5ª Questão do questionário II

Analisando as respostas da 5ª questão, se observa que as maiorias do licenciado, num total de 84% (oitenta e quatro por cento) dos entrevistados, almejam por algo diferente ou de vivenciar a matemática na prática.

Cite o nome de alguma propriedade relacionada aos limites de uma função	
L.1	O limite da soma; ao calcularmos limite de polinômios, uma divisão de polinômios, tomamos no numerador o termo de maior expoente e fazemos o mesmo para o denominador e calculamos o limite.
L.2	Pode ser citado o limite da soma ou da diferença até teoremas como o do confronto, do valor médio, entre outros.
L.3	Não me lembro de nenhuma propriedade.
L.4	Enunciado de uma propriedade: “o limite da soma é a soma dos limites”. Teorema: Teorema do confronto, teorema do valor médio, e etc.
L.5	Não me recordo dos nomes das propriedades, só das aplicações como: no valor intermediário, teste de continuidade de uma função, definição da derivada, definição da integral e outras.
L.6	Propriedade das somas dos limites.
L.7	Limite de uma função expoente $\frac{1}{x}$, limite de uma função constante, logaritmo.
L.8	Ponto médio
L.9	O limite das somas é a soma dos limites.
L.10	Quando x tende a zero da uma indeterminação.
L.11	Teorema fundamental do cálculo.
L.12	Não me recordo bem. Limite superior e inferior, etc.
L.13	O discente não respondeu
L.14	O limite da soma é a soma dos limites.

L.15	Limite da soma.
L.16	O limite da soma é a soma dos limites.
L.17	Máximo e mínimo. Limite finito e infinito.
L.18	O discente não respondeu
L.19	O discente não respondeu
L.20	Não me recordo de nenhuma infelizmente.
L.21	Propriedade do quociente
L.22	O discente não respondeu
L.23	Não lembro
L.24	O discente não respondeu
L.25	O discente não respondeu

Quadro 6 – Respostas da 6ª Questão do questionário II

Na 6ª questão a maioria dos discente não tiveram domínio sobre as propriedades dos limites e outros nem tentaram responder à questão, o objetivo era apenas para saber a gravidade significativa do estudo dos limites e o grau de conhecimento do cálculo.

5.3 Relatos da aula no Laboratório de Matemática

A aula teve início com a explanação do conteúdo pelo professor de Matemática, o assunto escolhido foi Séries de Fourier, nome dado em homenagem à Jean Baptiste Fourier (1766-1830), que fez estudos voltados para as séries trigonométricas e que tem a seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a^0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sen \frac{2n\pi x}{T} \right)$$

Onde:

$\left(\frac{2n\pi x}{T} \right)$, indica que, f é periódica com período T

Os termos, a_0 ; a_n ; b_n ; n , são os coeficientes de f

Se a função $f(x)$ é ímpar, chamamos de Série de Fourier dos senos, em que:

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx$$

Se a função $f(x)$ é par, chamamos de Série de Fourier dos cossenos, em que:

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx$$

As demonstrações das Séries de Fourier, são complexas e requerem conhecimentos específicos, mas o professor, explicou de forma sucinta e clara, aonde os limites de uma função estão presentes dentro da série de Fourier. (Figura 7)

Após o esclarecimento dos pontos principais da Série de Fourier no quadro, o professor passou para a parte prática, usando o **Geogebra** que é um software matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo, o nome Geogebra é a junção da palavra geometria com a palavra álgebra.

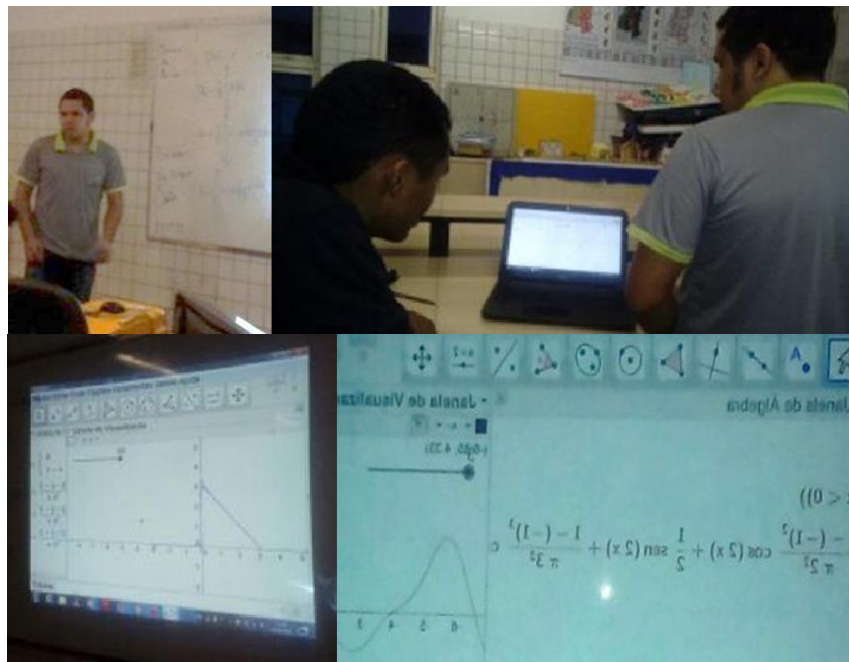


Figura 7 – Explicação do conteúdo pelo Professor

No Geogebra é possível observar vários intervalos no gráfico, que manualmente seria impossível. E para as aulas práticas de Matemática é uma importante ferramenta didática, para auxiliar o docente.

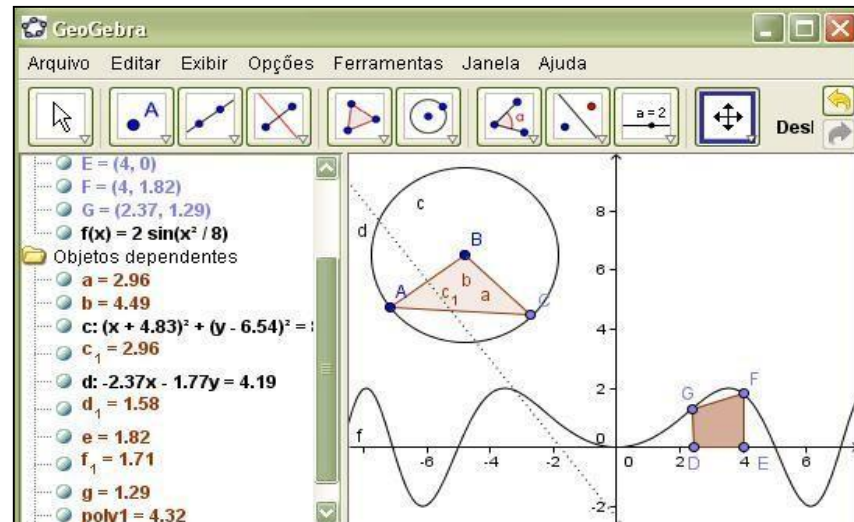


Figura 8 – Geogebra um software matemático

Fonte: Site **Geogebra e as séries de Fourier**, Disponível em: < http://www.mat.ufrga.br/ppgem/produto_didatico/objetos/vandoir_stormowski/imagens/geoge.jpg > Acesso em 03 maio de 17.

Em seguida, foi a vez dos discente responderem às questões e expressar os resultados em gráficos utilizando o Geogebra, onde pode-se notar o entusiasmo de todos os presentes em chegar o resultado da questão, para expor a Série de Fourier no gráfico.



Figura 9 – Resolução da questão sobre Série de Fourier

As demais imagens, com os resultados obtidos serão expostas como apêndices, onde observa-se o momento da construção das Séries de Fourier pelos licenciando.

5.4 Relatos da aula no Laboratório de Física

A ministração da aula prática no laboratório de física, foi conduzida pela professora de Física do Instituto Federal do Piauí – Campus Corrente. A explanação do conteúdo sobre Dilatação Térmica dos Sólidos, foi iniciada partindo da ideia de limites, quando a temperatura de um sólido varia de ΔT , a variação do comprimento, $\Delta L / L$, é proporcional a ΔT ; a demonstração está no ponto (3.1) do capítulo 3 desse trabalho. Então, temos que:

$$\lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \Delta T \rightarrow \text{O comprimento } L \text{ que será dado por: } L = L_0 + \alpha \cdot \Delta T$$

Lembramos aqui, dos estudos da Física no Ensino Médio, em que mostravam as transformações dos estados sólidos, líquidos e gasosos, quando sofrem aquecimento ou resfriamento, ocasionando a agitação das moléculas que formam os corpos. Quando ocorre o aquecimento resulta na dilatação térmica, e resfriando, as moléculas são diminuídas resultando na contração térmica. Podemos observar, que, a dilatação linear ou térmica dos sólidos, é uma relação de comprimento em função da temperatura do corpo. Onde pode ser observado no gráfico da figura 10.

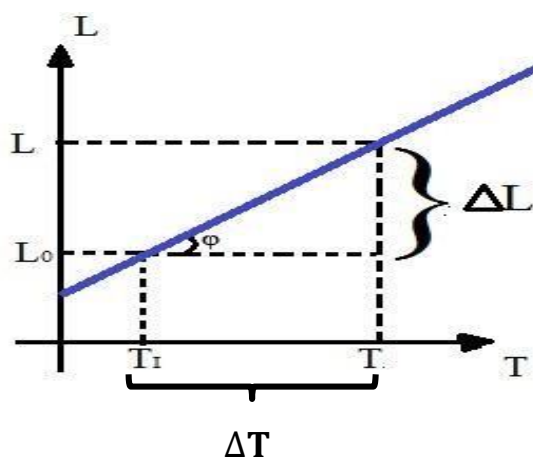


Figura 10: Relação de comprimento em função da temperatura
 Fonte: Site Mundo Educação, Disponível em <<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/upload/conteudo/representa/20linear.jpg>> Acesso em 17 de maio 17.

Segundo o site Mundo Educação [S.l.: s.n] 2017, “A variação da temperatura é calculada pela diferença entre a temperatura final e a inicial: $\Delta T = T - T_0$, e da mesma forma, podemos calcular a variação de comprimento causada por essa variação da temperatura: $\Delta L = L - L_0$ ”. Onde resulta na **Lei da dilatação linear**: $\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$, em que a letra grega α (alfa), representa o **coeficiente de dilatação linear** do material que constitui a barra e assume um valor específico para cada tipo de material. E a sua unidade de medida é o grau **Celsius recíproco** ($^{\circ}\text{C}^{-1}$).

Para a experiência no laboratório o material escolhido foi o latão, onde o discente tinha que determinar o coeficiente de dilatação linear, utilizando o dilatômetro linear, seguindo as orientações da ministrante.



Figura 11: Ministração da aula pela professora de Física

Iniciando o experimento medimos o comprimento inicial da barra de latão L_0 , determinamos a temperatura inicial T_0 , em seguida, ativamos a fonte de calor e aguardamos atingir a temperatura máxima, para medi-la nos pontos de entrada e saída do vapor. Conforme os dados coletados determinamos a variação de comprimento ΔL , e a variação de temperatura ΔT , sofrida pela barra de latão. Concluindo, determinou-se o coeficiente de dilatação linear α .

Os dados obtidos foram:

$$L_0 = 90 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$T_0 = 28^{\circ}\text{C} \quad / \quad T = 78^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta L = 67 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$\Delta T = T - T_0 = 78 - 28 = 50^\circ\text{C}$$

$$\alpha = ? \text{ (coeficiente de dilatação linear)}$$

Substituindo os valores na Lei da dilatação linear, temos:

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$67 \times 10^{-5} = 90 \times 10^{-3} \cdot \alpha \cdot 50$$

$$\frac{67 \times 10^{-5}}{4500 \times 10^{-3}} = \alpha$$

$$0,0149 \times 10^{-2} = \alpha$$

Assim, temos:

$$\alpha = 14,9 \times 10^{-5}$$

Em seguida, passamos para parte prática, utilizando o dilatômetro linear, que é um aparelho que serve para medir a dilatação térmica dos sólidos, ele possui um medidor de dilatação, dividido em centésimo de milímetro e uma escala milimetrada, pois, para analisar a dilatação não é possível sem ajuda desse medidor que acompanha o dilatômetro linear. Veja na Figura 12, o dilatômetro linear do Ifpi-Campus Corrente.



Figura 12: Dilatômetro Linear do Ifpi-Campus Corrente

Os discentes ficaram bastante impressionados e atentos a todo o processo do experimento, e mais um objetivo foi alcançado, que é o de envolver os discentes com o assunto

estudado. Onde em suas palavras podemos perceber o quanto essa aula foi importante para a formação dos mesmos, que diz: ” Gostei muito de ver a matemática sendo aplicada, pois, fica até melhor para compreendermos o assunto, e fica mais interessante, pois, é algo que você mesmo está construindo”. Em outra fala, um discente descreve que: “ A Matemática se torna até mais fácil, quando visualizada, e a aula se torna mais construtiva e menos cansativa, quando juntamos a teoria com a prática”. E todos os outros discursos dos discentes foram favoráveis.

Muitas vezes, ao ministrar uma aula de Matemática, o professor se depara com a seguinte pergunta: “Onde vou utilizar essa conta? ” Ou outra, bem conhecida que é: “ Para que serve isso? ”. E na aula prática o professor conseguiu responder a essas questões, sem deixar dúvidas.



Figura 13: Discentes participantes da aula prática

Outras fotos desse momento, seguem em apêndices, onde mostram o momento da medição das temperaturas na saída e entrada de vapor, e o material confeccionado para as anotações das aulas nos laboratórios.

6 CONCLUSÃO

O professor de Matemática, precisa além dos conhecimentos específicos para solucionar problemas ou mesmo resolver questões da matemática pura. É preciso estar preparado para transmitir de forma clara, para que o estudante possa entender o conteúdo. Pois nem sempre um bom licenciando em matemática, que resolve todos as questões durante a sua formação é capaz de passar o conhecimento adquirido.

A preparação necessária para desenvolver estratégias de ensino ou habilidades para trabalhar em uma sala de aula tem que ser adquirida na própria formação acadêmica, pois, aprendemos observando os nossos professores, que com certeza vão ser um exemplo para o futuro professor.

O presente trabalho foi dividido em etapas, e em cada uma obtemos resultados favoráveis à construção do conhecimento. Começamos com a pesquisa bibliográfica sobre a noção de limites de uma função, abrangendo desde os primórdios com a reta numérica, as funções e as definições de limites. Para análise das aplicações, tomamos como exemplo, a expansão térmica dos corpos em juntas de expansão, ocasionada da dilatação térmica.

No questionário para os discentes tivemos acesso além dos conhecimentos prévios, também, às opiniões sobre as aulas teóricas e práticas e a importância destas para a formação acadêmica. Onde eles puderam expressar os seus anseios pelo ensino da Matemática, e os obstáculos enfrentados durante o período da licenciatura.

No questionário aplicado aos professores compartes do projeto, encontramos exemplos de como ensinar limites através de atividades práticas e experiências laboratoriais, como por exemplo, a utilização do Geogebra (software matemático), determinação de valores de funções com o Excel, usando aproximações. Outra atividade prática interessante para a introdução do estudo dos limites e que tem por nome “**Tente sair da sala**”, onde o aluno só poderá a cada segundo, andar a metade da distância entre ele e a saída e dizer quanto tempo levaria para sair da sala de aula. E outras atividades relacionadas.

A última etapa, foi levar os discentes para aulas práticas nos laboratórios de Matemática e de Física. Sendo que, no laboratório de Matemática tiveram acesso ao Geogebra, para construção de algumas Séries de Fourier, onde tivemos êxitos e objetivos alcançados. Finalizamos essa etapa no laboratório de Física, realizando uma experiência com o dilatômetro

linear, em que mais um objetivo foi alcançado, que é o de envolver os discentes com o assunto estudado.

Ao fim desse trabalho, concluímos que, a formação acadêmica começa pela análise das habilidades de cada professor em sala de aula. As aulas teóricas, às vezes necessitam ser acompanhadas além de exercícios de fixação, com algumas atividades práticas para auxiliar o futuro professor com um leque de conhecimentos e métodos de ensino.

Vimos que, o Instituto Federal do Piauí – Campus Corrente, desde a implantação da licenciatura em Matemática no ano de 2010 (dois mil e dez), tem passado por mudanças favoráveis ao ensino nessa região. E que no decorrer desses anos a grade curricular tem passado por alterações necessárias para um bom desempenho dos discentes. Os professores são profissionais competentes, onde pudemos observar e analisar as habilidades dos mesmos, e durante as conversas vimos a preocupação em escolher a melhor metodologia para passar os conteúdos, sem ter prejuízo na carga horária.

A sugestão para as aulas práticas, já está presente na nova grade curricular 2015, que são as aulas de Laboratório de Matemática, e que antes do projeto não tínhamos conhecimento, onde com certeza, serão aulas enriquecedoras e uma fonte de habilidades para os novos profissionais da Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMORIM, LÍlian Isabel Ferreira. **A (re)construção do conceito de limite do cálculo para a análise** [manuscrito]: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática / LÍlian Isabel Ferreira Amorim. – Ouro Preto, 2011.

BARRETO FILHO, Benigno. SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática aula por aula – III. Série.** – 1. Ed. – São Paulo: FTD, 2003.

BOURCHTEIN, Lioudmila. BOURCHTEIN, Andrei. **Análise Real** – Funções de uma variável real: Limites, continuidade, diferenciabilidade. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2010.

BOULOS, Paulo. **Cálculo Diferencial e Integral.** Volume 1, Makron Books, São Paulo, 1999.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, vol. 1, – 5. Ed. [Reimpr.]. – Rio de Janeiro: LTC, 2014.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar** – Conjuntos e Funções. – 9ª ed. São Paulo: Atual, 2013, v.1.

KLUG, Melânia B. **Língua portuguesa: minidicionário escolar.** – Blumenau, Vale das Letras, 2010. 352 p.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física básica.** / H. Moysés Nussenzveig – 4ª edição – São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática** – Desde a criação das pirâmides até a exploração de infinito. São Paulo: M. Books do Brasil Ltda., 2012.

RYAN, Mark. Traduzido por: DIELLE, Marcia. **Cálculos para leigos.** – 2.ed. – Rio de Janeiro: Alta Books, 2011.

SANTOS, Maria Bethânia S. dos. **Um olhar para o conceito de limite:** sua constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre o seu ensino e aprendizado. Tese de doutorado em Educação Matemática – PUC/SP, 2013.

YOUSSEF, Antônio Nicolau. **Matemática: Ensino Médio.** Volume único. Antônio Nicolau, Elizabeth Sodré e outros. São Paulo: Scipione. 2011.

SITES

BLOG DO ENEM. Disponível em: < <http://blogdoenem.com.br/enem-2013-operacoes-em-matematica>>. Acesso em: 05 mar. 2016.

MUNDO EDUCAÇÃO, Disponível em <<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/upload/conteudo/representa/20linear.jpg>> Acesso em 17 de maio 17.

BRASIL ESCOLA, Disponível em <<http://brasilescola.uol.com.br/upload/conteudo/images./deformação-termica-sofrida-pelos-trilhos.jpg>> Acesso em 04 de maio 2017

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário (I) para professores participantes do projeto



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI
CAMPUS CORRENTE
Projeto



Habilidades Matemáticas: Um estudo sobre limites e suas aplicações

QUESTIONÁRIO I / PROFESSORES

1. Professor (a) qual a área que você leciona?
☐ Matemática ☐ Física
2. Já lecionou sobre limites de uma função ou assuntos que envolveram limites?
☐ Sim! ☐ Não!
3. Qual a metodologia que você utilizou ou utilizaria para ensinar limites de uma função? Comete sobre a metodologia escolhida.
☐ Métodos práticos ☐ Aula tradicional
4. Você conhece alguma atividade extraclasse que envolve limites?
☐ Se a resposta for sim, então qual? _____
☐ Não!
5. Qual atividade prática ou experiência laboratorial envolvendo limites você realizaria para a introdução da noção de limites?

6. De acordo com a questão anterior, cite o nome de alguma propriedade que pode ser observada durante essa atividade prática ou experiência laboratorial.

7. Assinatura do professor (a) participante da pesquisa:

(ASSINATURA OPCIONAL)

APÊNDICE B – Questionário (II) para Licenciando em Matemática



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Instituto Federal De Educação, Ciência E Tecnologia Do Piauí – IFPI
CAMPUS CORRENTE
Projeto



Habilidades Matemáticas: Um estudo sobre limites e suas aplicações

QUESTIONÁRIO II / LICENCIANDO EM MATEMÁTICA

1. Qual módulo da Licenciatura em Matemática você está cursando?
() Módulo
2. Você tem noção do que é o estudo dos limites de uma função?
() Sim! () Não!
3. Dê uma breve definição do que você entende por Limite de uma Função:

4. Você já participou de alguma aula prática em laboratórios de Matemática ou de Física?
() Se sim, então qual foi o assunto estudado? _____
() Não!
5. Qual a sua expectativa em participar desse projeto envolvendo atividades e experiências laboratoriais?

6. Cite o nome de alguma propriedade relacionada aos limites de uma função:

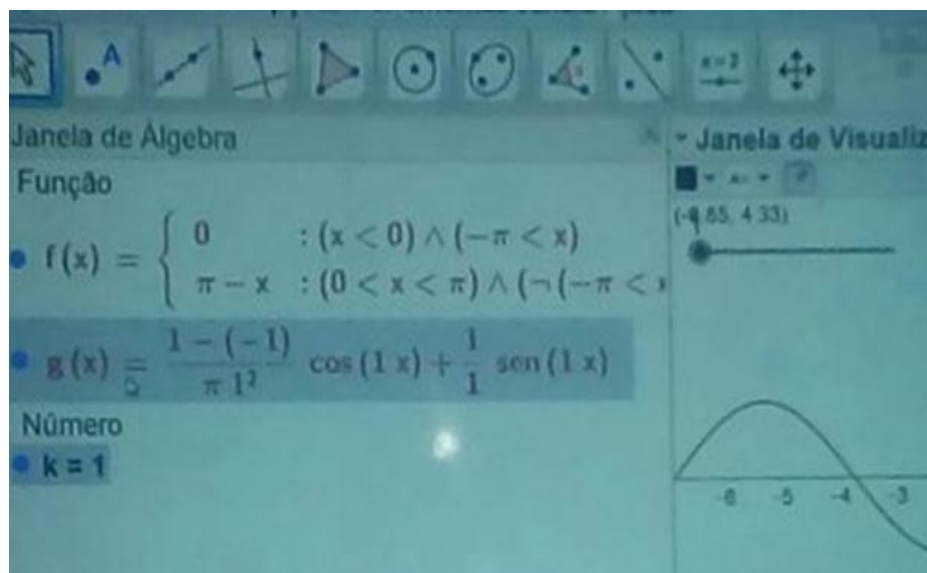
7. Assinatura do licenciando participante da pesquisa:

(ASSINATURA OPCIONAL)

APÊNDICE C – Construção da Série de Fourier no Geogebra



APÊNDICE D – Série de Fourier construída pelo discente



APÊNDICE E – Medindo as temperaturas na saída e entrada de vapor



APÊNDICE F – Material confeccionado para as aulas nos laboratórios.



ANEXOS

ANEXO A – Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática – Campus Corrente / 2013 (Ponto 1.3)

1.3 Potencial IFPI para formação de professores para atuarem na educação básica.

Atualmente, o IFPI vem atuando na área de Formação de Professores, com cursos nas áreas de Física, Matemática, Química e Biologia, a fim atender às demandas estaduais e municipais para atuarem na Educação Básica, desde 2002. O propósito de tais cursos, além de suprir a carência de profissionais nestas áreas, também se deve ao fato de proporcionar aos futuros professores uma formação voltada para o uso de tecnologias no ensino e sua aplicação, bem como a possibilidade de um currículo voltado para a pesquisa e a prática no campo das Ciências.

Assim, nos últimos concursos na Educação, foi obtido um ótimo desempenho por parte dos egressos, bem como no campo da pós-graduação Lato Sensu e Stricto Sensu, confirmando o potencial deste Instituto para formação de professores em ambos os campos, do Ensino e da Pesquisa.

2. OBJETIVOS

2.1 Geral

- Formar professores para a Educação Básica, preparados e comprometidos com a aprendizagem dos alunos, estimulados a pesquisar e a investir na própria formação, na área da docência para o Ensino Fundamental e Médio, por meio do curso de graduação em Licenciatura em Matemática;
- Proporcionar conhecimentos sistematizados do pensamento matemático, dos processos sócio educacionais, psicológicos e pedagógicos, **desenvolvendo habilidades específicas** para atuar de forma crítica e reflexiva na Educação Básica, assim como para prosseguir estudos em cursos de Pós-Graduação em nível de Especialização, Mestrado e Doutorado.

2.2 Específicos

- Oferecer, ao longo do processo de formação, situações de aprendizagem que levem o futuro professor à vivência de situações que facilitarão a associação entre o conhecimento adquirido e a prática profissional;
- Desenvolver a prática pedagógica do licenciando no Ensino Fundamental (Ciências) e Médio (nas áreas específicas) de forma contextualizada, por meio do aprofundamento teórico dos conteúdos com as atividades didáticas, para uma aprendizagem significativa;

- Promover condições para a elaboração de projetos voltados para o ensino fundamental e médio coerentes com os novos Parâmetros Curriculares Nacionais e com a práxis educativa, com consequente melhoria do ensino da Matemática;
- Fornecer subsídios tecnológicos de ensino, compatíveis com o nível de complexidade dos conteúdos de Matemática;
- Fomentar atividades científicas desde a produção de textos, **práticas laboratoriais**, práticas de ensino, modelos explicativos e projetos de investigação, relacionados com a atuação docente e com a aplicabilidade dos conhecimentos científicos e tecnológicos na compreensão do mundo natural e das relações sociais;
- Propiciar alternativas de avaliação da aprendizagem como um processo contínuo, tendo em atenção o discente como sujeito ativo, cognitivo, afetivo e social;
- Divulgar o saber científico e tecnológico, particularmente alguns conteúdos básicos que funcionam como parâmetros de abordagem da realidade e como instrumento para entender e resolver as questões problemáticas da vida cotidiana, com ênfase nas questões éticas relativas ao ambiente natural;
- Mostrar a Ciência como uma atividade humana e contextualizada, desenvolvendo, assim, atitudes positivas, facilitadoras de inserção na sociedade atual;
- Conscientizar o acadêmico acerca das questões étnico sociais, tais como, africanidades, problemas indígenas e ambientais. Com o propósito de um melhor atendimento a essas demandas sociais.
- Oferecer ao longo do processo de formação, situações de aprendizagem que leve o futuro professor a vivencia de situações que facilitarão a lidar com a Educação de Jovens e Adultos, bem como, a desenvolver uma prática que não só integre, mas inclua a pessoa com deficiência.

ANEXO B – Matriz Curricular da Licenciatura em Matemática 2013