



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
PIAUI CAMPUS TERESINA CENTRAL**

**DEPARTAMENTO DE INDÚSTRIA, SEGURANÇA E PRODUÇÃO
CULTURAL CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

CARLOS ANDRÉ AQUINO ARAUJO

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA POR MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA
ANÁLISE ELÁSTICO LINEAR DE EIXOS ESCALONADOS MODELADOS
COMO VIGAS DE TIMOSHENKO.**

TERESINA

2025

CARLOS ANDRÉAQUINO ARAUJO

SIMULAÇÃO NUMÉRICA POR MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA
ANÁLISE ELÁSTICO LINEAR DE EIXOS ESCALONADOS MODELADOS
COMO VIGAS DE TIMOSHENKO.

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para
obtenção do diploma do Curso de Engenharia
Mecânica do Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí. Campus Teresina-
Central.

Orientador: Prof. Me. Antônio Ítalo Rodrigues
Pedrosa

Coorientador: Prof. Me. Ricardo Cardoso Soares

TERESINA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Araújo, Carlos André Aquino

A663s Simulação numérica por método de elementos finitos para análise elástico linear de eixo escalonado modelado como vigas de Timoshenko / Carlos André Aquino Araújo. - 2025.
99 f.: il. p&b.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica)
- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus
Teresina Central, 2025.

Orientador : Prof Me. Antônio Ítalo Rodrigues Pedrosa.

1. Métodos numéricos . 2. Programa computacional . 3. Teoria de vigas .
4. Análise linear. I.Título.

CDD - 620

Elaborado por Maria Rosismar Farias CRB 3/631

CARLOS ANDRÉ AQUINO ARAUJO

SIMULAÇÃO NUMÉRICA POR MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA
ANÁLISE ELÁSTICO LINEAR DE EIXOS ESCALONADOS MODELADOS
COMO VIGAS DE TIMOSHENKO.

Trabalho de Conclusão de Curso (monografia)
apresentado como exigência parcial para obtenção
do diploma do Curso de Bacharelado em
Engenharia Mecânica do Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus
Teresina Central.

Aprovada em: 22/12/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Antônio Ítalo Rodrigues Pedrosa (Orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Dr. Petteson Linniker Carvalho Serra
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Dr. Renato Lemos Cosse
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida e por estar presente em minha vida por meio de tudo que me cerca.

Aos meus pais, Henrique e Francisca que sempre se doaram, aconselharam e nos momentos felizes ou difíceis.

Aos meus irmãos Henrique Filho e Francisco pelo companheirismo e maiores amizades que já tive.

A toda minha família pelo apoio e incentivo pelo caminho da educação.

Aos meus amigos de curso e projeto de extensão Francisco Junior, Gean Carlos, Marcus Victor, João Lucas, Alai e Erick.

A minha namorada Camila pela paciência, conselhos e apoio em tudo que faço.

Aos professores do IFPI do Campus Teresina Central, em especial a meu orientador, Ítalo Pedrosa e coorientador, Ricardo Cardoso pelo auxílio, empenho, paciência, ensino e exemplo de profissionais.

Por último, agradeço aos professores da banca examinadora por fazerem parte desse momento tão esperado e importante.

RESUMO

Eixos de transmissão são elementos de máquinas que podem ser modelados como vigas com variados diâmetros ao longo de sua seção e devem ser dimensionados de acordo com as restrições de projeto. O proposto trabalho tem como objetivo aplicar o método dos elementos finitos na elaboração de uma rotina de cálculo programada em plataforma Matlab para análise elástico linear de eixos de transmissão de potência modelados como viga de Timoshenko, capaz de simular carregamento em eixos modelados com vigas de seção transversal continua como também para eixos modelados com vigas escalonadas (uma característica de eixos de transmissão) e fornecer valores de deflexões e inclinações obtidas sob condições típicas de carregamento externo e reações de apoio. O modelo de viga de Timoshenko foi escolhido para moldar o problema por ser mais vantajoso em certas aplicações, como por exemplo em vigas semiespessas. A teoria mencionada considera a contribuição do efeito de cisalhamento, não visto no modelo clássico de Euler-Bernoulli. Para validação do programa, foram analisados casos típicos de montagens de vigas e comparados com a solução analítica. Para completar a validação, foram analisados eixos com características escalonadas de uma caixa de redução de protótipo baja e comparados com os obtidos pelo programa comercial Ansys Mechanical APDL. Por fim, foram analisados os pontos de interesses para projeto dos mesmos eixos e validados em relação aos valores de referência da literatura.

Palavras-Chave: Métodos numéricos; Programa Computacional; Teoria de Vigas; Análise linear.

ABSTRACT

Transmission shafts are machine elements that can be modeled as beams with varying diameters along their length and must be dimensioned according to design constraints. The present work aims to apply the Finite Element Method to develop a calculation routine programmed in the Matlab platform for linear elastic analysis of power transmission shafts modeled as Timoshenko beams. The program is capable of simulating loading on shafts modeled either with continuous cross-section beams or with shafts modeled with stepped beams (a characteristic of transmission shafts) and provides deflection and slope values under typical external loading conditions and support reactions. The Timoshenko beam model was chosen because it offers advantages in certain applications, such as semi-thick beams. This theory considers the shear effect contribution, which is not seen in the classical Euler-Bernoulli model. For program validation, typical beam assembly cases were analyzed and compared with the analytical solution. Additionally, to complete the validation, shafts with stepped characteristics from a Baja prototype reduction gearbox were analyzed and benchmarked against results obtained using the commercial program Ansys Mechanical APDL. Finally, design points of interest for these shafts were evaluated and validated with reference values from the literature.

Keywords: Numerical methods; Computational Program; Beam theory; Linear analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Configuração de montagem de um eixo rotativo com múltiplos elementos acoplados.....	19
Figura 2 -Viga engastada sob efeito de flexão	21
Figura 3 – Forças e momentos representados no diagrama de corpo livre do elemento de viga em corte.	24
Figura 4 - Inclinação da viga devido a tensão de cisalhamento observada na teoria de viga de Timoshenko.	26
Figura 5 - Representação da descontinuidade na Inclinação da viga sob carga concentrada.....	31
Figura 6 - Padrões clássicos adotados de sentido do deslocamento do elemento de viga.....	32
Figura 7 - Padrões adotados para sentido de deslocamento do elemento de viga para aplicação do MEF.	33
Figura 8 - Transformação do carregamento distribuído em carregamento pontual aplica nos nós.	40
Figura 9 - Esquema de execução do programa desenvolvido.....	46
Figura 10 - Representação esquemática das configurações de vinculações e carregamentos para os casos estudados.....	47
Figura 11 - Representação esquemática dos elementos da caixa de redução do protótipo IFPI Baja.....	61
Figura 12 - Caixa de redução do sistema de transmissão do potótipo Baja.....	62
Figura 13 - Representação esquemática dos carregamentos e restrições ao eixo de entrada tratado como viga e sua representação 2D do escalonamento do eixo.	63
Figura 14 - Representação esquemática dos carregamentos e restrições ao eixo intermediário tratado como viga e sua representação 2D do escalonamento do eixo.	63
Figura 15 - Representação esquemática dos carregamentos e restrições ao eixo de saída tratado como viga e sua representação 2D do escalonamento do eixo.	64
Figura 16 - Comparativo entre a solução do MEF e soluções analíticas para viga bi apoiada com carregamento distribuído constante ao longo da viga – Deflexão caso 1.	69

Figura 17 - Comparativo entre a solução do MEF e soluções analíticas para viga engastada com carregamento distribuído constante ao longo da viga – Deflexão caso 2.....	70
Figura 18 - Comparativo entre a solução do MEF e soluções analíticas para viga bi apoiada com carregamento pontual aplicado ao meio do comprimento da viga – Deflexão caso 3.....	71
Figura 19 - Comparativo entre a solução do MEF e soluções analíticas para viga engastada com carregamento pontual aplicado na extremidade livre – Deflexão caso 4.	72
Figura 20 - Convergência da solução computacional para solução analítica – Análise da deflexão.....	73
Figura 21 - Comparativo entre a solução do MEF e solução analítica para viga bi apoiada com carregamento pontual aplicado ao meio da viga – Inclinação caso 1..	75
Figura 22 - Comparativo entre a solução do MEF e solução analítica para viga engastada com carregamento pontual aplicado à extremidade livre da viga – Inclinação caso 2.....	76
Figura 23 - Comparativo entre a solução do MEF e solução analítica para viga bi apoiada com carregamento distribuído constante ao longo da viga – Inclinação caso 3.	76
Figura 24 - Comparativo entre a solução do MEF e solução analítica para viga engastada com carregamento distribuído constante ao longo da viga – Inclinação caso 4.....	77
Figura 25 - Convergência da solução computacional para solução analítica – Análise da inclinação.	78
Figura 26 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Mechanical APDL Ansys para deflexão do eixo de entrada da caixa de redução.	79
Figura 27 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Mechanical APDL Ansys para deflexão do eixo intermediário da caixa de redução.	80
Figura 28 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Mechanical APDL Ansys para deflexão do eixo de saída da caixa de redução.	80
Figura 29 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Ansys Mechanical APDL para deflexão do eixo de saída da caixa de redução.	81

Figura 30 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Ansys Mechanical APDL para inclinação do eixo de entrada da caixa de redução.	82
Figura 31 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Ansys Mechanical APDL para inclinação do eixo intermediário da caixa de redução.	83
Figura 32 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Ansys Mechanical APDL para inclinação do eixo de saída da caixa de redução.	83
Figura 33 - Convergência entre solução do programa desenvolvido	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de referências para deflexão de componentes anexos ao eixo. .20	20
Tabela 2 - Valores de referência para inclinações de máximas permissíveis para rolamentos de esferas.....20	20
Tabela 3 - Condições de contorno para eixo bi-apoiado com carregamento distribuído ao longo de seu comprimento.....48	48
Tabela 4 - Condições de contorno para eixo engastado em um extremo e livre no outro com carregamento distribuído ao longo de seu comprimento.....51	51
Tabela 5 - Condições de contorno para eixo bi apoiado com carregamento pontual aplicado no centro da viga.....54	54
Tabela 6 - Condições de contorno para eixo engastado em um extremo e livre na outra, com carregamento pontual na extremidade livre.57	57
Tabela 7 - Dados de geometria e propriedades mecânicas dos casos estudados....58	58
Tabela 8 - Dados de vinculações dos eixos para os casos de estudos.59	59
Tabela 9 - Dados de carregamento dos eixos para cada caso de estudo.....59	59
Tabela 10 - Carregamentos sobre eixos da caixa de redução do protótipo IFPI Baja.64	64
Tabela 11 - Dados de entrada no programa para geometria e propriedades mecânicas do eixo de entrada.....65	65
Tabela 12 - Dados de entrada no programa para geometria e propriedades mecânicas do eixo intermediário.66	66
Tabela 13 - Dados de entrada no programa para geometria e propriedades mecânicas do eixo de saída.66	66
Tabela 14 - Dados de vinculações para os eixos da caixa de redução do protótipo IFPI Baja.....66	66
Tabela 15 - Dados de carregamentos sobre os eixos da caixa de redução.....67	67
Tabela 16 - Diferenças percentuais entre a solução do programa desenvolvido e a solução analítica pela teoria de Timoshenko da linha elástica para uma malha de 20 elementos.....74	74
Tabela 17 - Diferenças percentuais entre a solução do programa desenvolvido e a solução do analítica pela Teoria de Euler-Bernoulli para uma malha de 20 elementos.....74	74

Tabela 18 - Diferenças percentuais entre a solução do programa desenvolvido e a solução do analítica pela Teoria de Euler-Bernoulli para simulação das inclinações dos eixos para uma malha de 20 elementos.....	78
Tabela 19 - Diferenças percentuais na simulação da deflexão máxima dos eixos para uma malha de 100 elementos.	82
Tabela 20 - Diferenças percentuais na simulação da inclinação máxima dos eixos para uma malha de 100 elementos.	85
Tabela 21 - Análise da deflexão nos pontos de interesses no eixo de entrada.....	85
Tabela 22 - Análise da deflexão nos pontos de interesses do eixo intermediário.	86
Tabela 23 - Análise da deflexão nos pontos de interesses do eixo de saída.	86

LISTA DE SIMBOLOS

u_x, u_y, u_z	Componentes do deslocamento da viga
θ	Rotação da seção transversal da viga associada a flexão
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Deformações específicas
σ_x	Tensão normal
M_z	Momento fletor
A	Área da seção transversal da viga
I_z	Momento de inércia em relação ao eixo z
$v(x)$	Deflexão vertical da viga
E	Módulo de elasticidade
Q_y	Esforço cortante
q	Carga transversal aplicada a viga
φ	Rotação total da viga associada ao cisalhamento e a flexão
τ_{xy}	Tensão de cisalhamento
k	Fator de correção da área transversal da viga
k_c	Fator de correção da área circular transversal da viga
G	Módulo de rigidez ou de cisalhamento
v_1 e v_2	Deslocamentos nodais dos elementos finitos de viga
θ_1 e θ_2	Inclinações devido ao momento fletor do elemento finito de viga
γ	Distorção devido ao cisalhamento
U	Energia de deformação do elemento finito de viga
Δ^*	Deslocamento virtual

f_e	Vetor carga nodal do elemento finito de viga
K_e	Matriz de rigidez do elemento finito de viga
u_e	Vetor deslocamentos nodais do elemento de viga
q_e	Vetor carga nodal equivalente do elemento finito de viga
K_g	Matriz global de rigidez
F_g	Vetor carregamento externo global
u_g	Vetor deslocamentos global

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	OBJETIVO GERAL	17
1.1.1	Objetivos específicos	18
2	REFERENCIAL TEÓRICO	19
2.1	EIXOS MODELADOS COMO VIGAS	19
2.2	TEORIA DE VIGA DE EULER-BERNOULLI	21
2.3	TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO	25
2.4	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	29
2.5	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO	30
2.5.1	Dedução da matriz de rigidez	32
2.5.2	Dedução do Vetor Cargas Nodais	39
2.6	PROGRAMAS MATLAB E ANSYS MECHANICAL APDL	42
3	METODOLOGIA	43
3.1	ASPECTOS DA ROTINA COMPUTACIONAL	43
3.1.1	Pré-processamento	43
3.1.2	Processamento	44
3.1.3	Pós-processamento	45
3.2	ESTUDO DE CASOS DE EIXOS COM SOLUÇÃO ANALÍTICA CONHECIDA 46	
3.2.1	Eixo bi apoiado com carregamento distribuído aplicado ao longo de seu comprimento	48
3.2.2	Eixo engastado em um extremo e livre no outro com carregamento distribuído ao longo de seu comprimento	50
3.2.3	Eixo bi apoiado com carregamento pontual aplicado no centro da viga	52
3.2.4	Viga engastada em um extremo e livre no outro, com carregamento pontual na extremidade livre	56
3.3	FORMULAÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA DOS CASOS ESTUDADOS	58
3.4	ESTUDO DE CASO DE EIXOS ESCALONADOS	60
3.4.1	Eixos da caixa de redução do protótipo veicular baja	60
3.4.2	Formulação dos dados de entrada para análise dos eixos da caixa de redução do protótipo baja	65
4	RESULTADOS	68

4.1	ANÁLISE NUMÉRICA DOS CASOS COM SOLUÇÃO ANALÍTICA CONHECIDA.....	68
4.2	ANÁLISE NUMÉRICA EM EIXOS ESCALONADOS DA CAIXA DE REDUÇÃO	79
4.3	ANÁLISE DA DEFLEXÃO NOS PONTOS DE INTERESSE DOS EIXOS DA CAIXA DE REDUÇÃO.....	85
5	CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	87
5.1	CONCLUSÃO	87
5.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUTOS	88
	REFERÊNCIAS.....	89
	APENDICE A – ESTRUTURA DO CÓDIGO SCRIPT EM MATLAB.....	92
	APENDICE B – DIMENSÕES DOS EIXOS	99

1 INTRODUÇÃO

De acordo com Budynas e Nisbett (2011), eixos de transmissão são elementos máquina de seção transversal circular, responsável por transmitir torque e movimento entre componentes de um sistema mecânico, tais como motores, polias, engrenagens e seu dimensionamento passa por alguns aspectos de projeto como a geometria, a concentração de tensão, os critérios de fadiga e os critérios de rigidez.

Conforme Norton (2011), eixos de transmissão podem ser modelados como vigas e ter sua análise de flexão e inclinação realizadas por meio das teorias conhecidas da literatura. Segundo o mesmo autor, é necessário considerar o critério de rigidez (deflexão linear e deflexão angular) para definição ou limitação de alinhamento do eixo com os componentes aplicados, como por exemplo engrenagens e rolamentos.

Segundo Borges, Silva Júnior, Santos e Lima (2024), a teoria de viga de Euler-Bernoulli é mais facilmente aplicável para análise elástico linear em vigas retas prismáticas onde a deformação por cisalhamento é desprezível para vigas esbeltas, considerando apenas os efeitos da flexão devido a tensão normal para deformação.

Segundo Torres (1999), a teoria de viga de Timoshenko difere da Teoria de viga de Euler-Bernoulli por considerar a parcela primária de deformação devido a tensão de cisalhamento, admitindo-se que seções planas e normais ao eixo permanecem planas após a flexão, mas não necessariamente normais ao eixo deformado.

Budynas e Nisbett (2011), apontam a utilização de métodos numéricos e sua aplicação em programas computacionais para análise de deflexão em eixos por tornar o processo célere e menos tedioso ao analisar múltiplos pontos de interesse. Nesse sentido, Souza (2019) indica o Método dos Elementos Finitos (MEF) como possibilidade na aplicação numérica por ser vastamente utilizado em solução de problemas estruturais. Segundo Rade (2011) dentre as principais vantagens do MEF em relação a outros métodos numéricos tem-se que elementos de diferentes formas e tamanhos podem ser associados para discretizar geometrias complexas; a possibilidade de divisão do meio contínuo em regiões para facilitar a modelagem

de problemas envolvendo domínios não homogêneos; o método pode ser formulado matricialmente, facilitando sua aplicação computacional.

Conforme explica Dias *et al.* (2010), o método dos elementos finitos (MEF) consiste em um método numérico no qual um problema genérico que envolve meios contínuos, através da análise de partes discretizadas, pode-se obter uma descrição matemática de seu comportamento. Cada elemento discretizado ou elemento finito e suas leis matemáticas contribuem para análise e solução do problema global.

Ao combinar a teoria de viga de Timoshenko com a versatilidade do MEF, é possível desenvolver soluções para análise deflexão de vigas. A mesma versatilidade permite que condições geométricas como por exemplo o escalonamento presente em eixos, sejam trabalhadas dentro de um ambiente computacional.

Ao utilizar a teoria aplicada ao método numérico, o engenheiro consegue desenvolver seu projeto com agilidade e confiabilidade, economizando tempo e evitando erros de cálculos. Com uma ferramenta computacional dedicada, o projetista pode buscar otimizações de seu projeto.

Para tanto visa-se desenvolver uma rotina computacional em linguagem de script que utilize o MEF e o modelo de viga de Timoshenko que seja capaz de retornar o comportamento da linha elástica de eixos escalonados tratados como vigas.

1.1 OBJETIVO GERAL

Formular uma rotina computacional para análise de deflexão de eixos de transmissão modelados como viga de Timoshenko com seções escalonadas ou não, aplicar e validar o modelo por meio de comparação com análises realizadas no software Ansys Mechanical APDL e soluções analíticas.

1.1.1 Objetivos específicos

- Desenvolver uma rotina computacional em linguagem de script Matlab para simulação e análise elástico linear de eixos modelados como viga de seções transversais constante e seções escalonadas;
- Desenvolver uma rotina computacional capaz de processar dados de entradas, fornecendo informações tais como deslocamento e inclinações nodais e apresentar em forma gráfica para o usuário;
- Analisar casos típicos de configurações de eixos tratados como vigas e comparar com soluções obtidas pelos métodos analíticos;
- Aplicar o programa desenvolvido em projeto real de eixos de uma caixa de redução do protótipo estudantil baja e comparar com a solução dada pelo software comercial Ansys Mechanical APDL;
- Avaliar o projeto real dos eixos estudados quanto suas restrições de projeto.

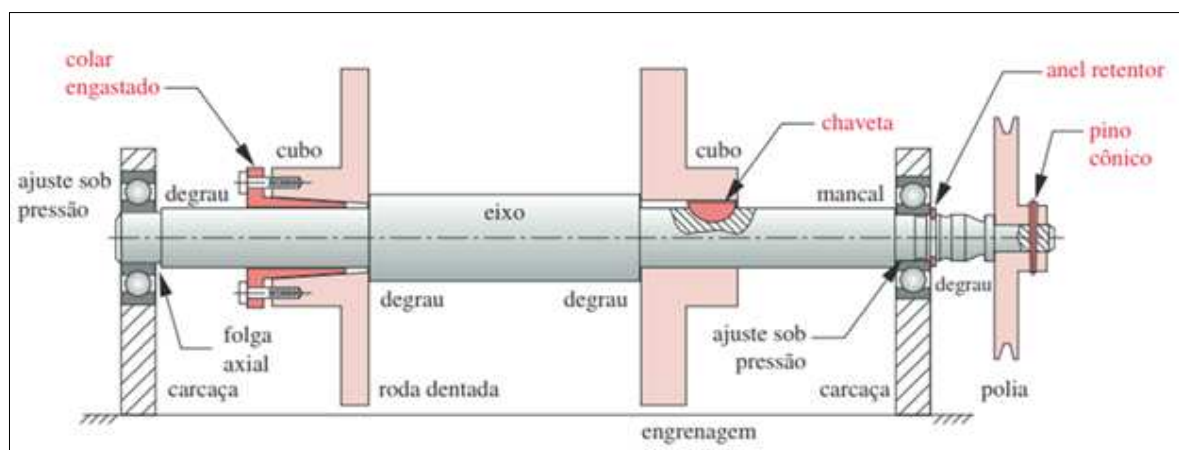
2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 EIXOS MODELADOS COMO VIGAS

De acordo com Norton (2011), eixos de transmissão são elementos comuns em mecanismos de quase toda máquina rotativa, com a função de transmitir movimento e torque de um ponto a outro. Logo, o projetista de máquinas se depara com a tarefa de projeto de eixos, frequentemente.

Segundo Norton (2011), eixos podem ser montados sobre mancais em configurações bi apoiadas ou em balanço, dependendo da configuração da máquina. Normalmente sofrem cargas de torção (devido ao torque transmitido) e flexão (devido às cargas transversais de elementos como engrenagens). Essas cargas ocorrem de forma cíclica a cada volta do eixo, sendo que o projeto se volta inicialmente para carga de fadiga. A Figura 1 ilustra a montagem de um eixo bi apoiado com uma parte de seu corpo em balanço, acomodando outros elementos descritos.

Figura 1 - Configuração de montagem de um eixo rotativo com múltiplos elementos acoplados.



Fonte: Norton (2011).

No projeto mecânico, eixos rotacionais ou fixos devem ser modelados como

vigas para análise de deflexão e inclinação, sendo assim necessário conhecimentos da geometria inicial. Por isso, Budynas e Nisbett, (2011) recorda que as dimensões dos pontos críticos definidas pelos critérios de fadiga e concentração de tensão devem ser admitidas como dados iniciais na análise da deflexão do eixo.

As deflexões devem ser analisadas nos pontos de interesses e comparadas com as deflexões permissíveis dos componentes anexos ao eixo (Budynas, Nisbett, 2011). Tais medidas podem ser consultadas em catálogos de rolamentos e engrenagens ou de acordo com restrições de projeto. A Tabela 1 indica valores típicos para deflexões e inclinações permissíveis para engrenagens.

Tabela 1 - Valores de referências para deflexão de componentes anexos ao eixo.

Engrenagens retas	Limites de deflexões
P < 4 dentes/cm	0,25mm
5 < P < 8	0,125mm
9 < P < 20	0,075mm

Fonte: Adaptado Budynas e Nisbett (2011).

Segundo Mott (2018), a recomendação numérica para limites de deflexão é de 0,005' (0,127mm) e inclinação de 0,003° (0,00523rad) para engrenagens industriais médias.

De acordo com SKF (2015) em catálogo, os limites típicos de desalinhamento angular para rolamentos de esferas se limitam aos valores apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Valores de referência para inclinações de máximas permissíveis para rolamentos de esferas.

Rolamentos de esferas	Limites de inclinações
Dispostos em montagem do tipo "O"	$\leq 2'$ ou ≤ 0.0005817764 rad
Dispostos em montagem do tipo "X"	$\leq 4'$ ou ≤ 0.00116355 rad

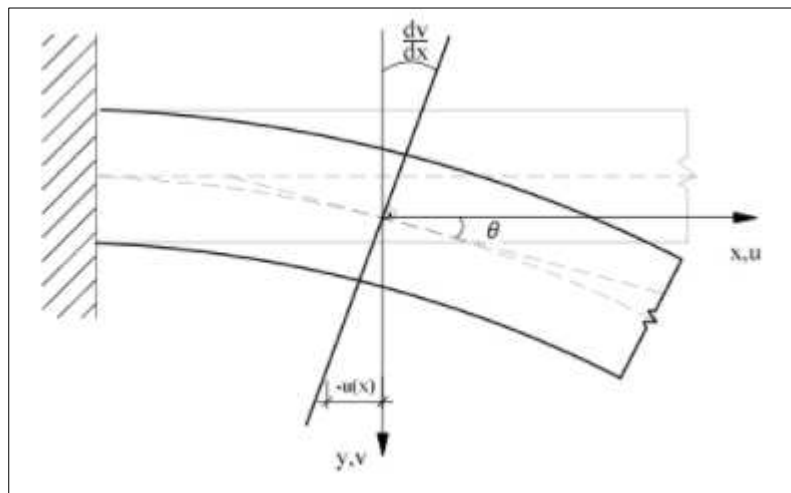
Fonte: Adaptado SKF (2015).

2.2 TEORIA DE VIGA DE EULER-BERNOULLI

Segundo Borges et al. (2024), a teoria de viga clássica ou teoria de viga de Euler-Bernoulli é o modelo de viga mais comum e utilizado. Conforme os autores, a teoria parte da hipótese cinemática de uma linha normal à superfície neutra antes da aplicação do carregamento transversal, permanecerá reta e normal após a deformação desta, desconsiderando assim os efeitos cisalhantes sobre a viga.

A partir da hipótese, Soares (2023) considera inicialmente a Figura 2, que representa uma barra engastada em uma extremidade e livre na outra, com seus respectivos sistemas de referência positivos nas direções x , y e z . Os deslocamentos nas direções x e y , bem como a rotação em torno do eixo z , são representados por u , v e w , respectivamente. O material que compõe a barra é assumido como homogêneo, isotrópico e com comportamento elástico linear.

Figura 2 -Viga engastada sob efeito de flexão



Fonte: Adaptado Soares (2023).

Com base na definição cinemática, determinam-se as componentes de deslocamento, as quais são descritas por meio do campo vetorial $u(x)$.

$$u_x = -y \frac{dv}{dx} \quad (1)$$

$$u_y = v(x) \quad (2)$$

$$u_z = 0 \quad (3)$$

Em que $\theta = dv/dx$ é o ângulo de rotação transversal associado a flexão

Derivando a equação (2) em relação as componentes das deformações lineares e angular, tem-se

$$\epsilon_x = -y \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad (4)$$

$$\epsilon_y = -y \frac{dv}{dx} = 0 \quad (5)$$

$$\epsilon_z = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} = 0 \quad (6)$$

Considerando que a deformação específica na direção y é nula, uma vez que o deslocamento $v(x)$ permanece constante nessa direção, conclui-se que a deformação cisalhante γ_{xy} também é nula, visto que as seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga.

A relação entre tensão e deformação é dada pela Lei de Hooke, logo:

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \quad (7)$$

A partir das equações (7) e (8), tem-se:

$$\sigma_x = -E \frac{d^2 v}{dx^2} y = \quad (8)$$

O momento fletor resultante que atua na seção transversal é dado por

$$M_z(x) = \int_A y \sigma_x(x) dA \quad (9)$$

Em que A é a área da seção transversal da viga.

Substituindo a equação (9) em (10), tem-se a equação diferencial da flexão:

$$M_z(x) = -E \frac{d^2 v}{dx^2} \int_A y^2 dA \quad (10)$$

Sabendo que momento de inércia é dado pela expressão

$$I_z(x) = \int_A y^2 dA \quad (11)$$

Substituindo a equação (12) em (11), tem-se a equação diferencial governante da flexão para viga:

$$M_z(x) = -EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (12)$$

$$-\frac{M_z(x)}{EI_z} = \frac{d^2 v}{dx^2}$$

Em que:

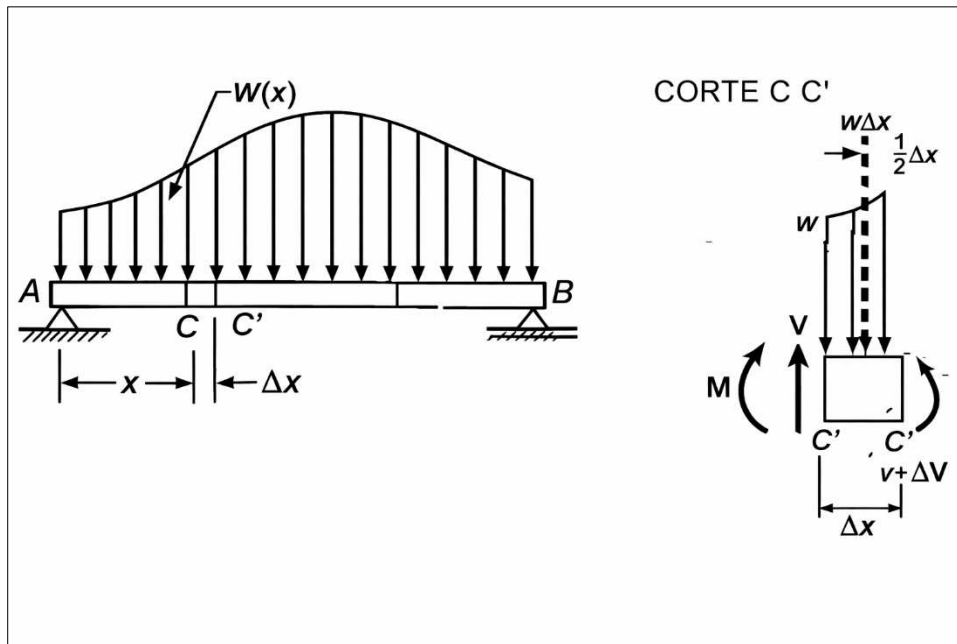
M_z – Momento resultante das tensões normais

E - Módulo de elasticidade longitudinal do material

I_z - Momento de inercia da área de seção transversal.

Considera-se agora uma viga AB , simplesmente apoiada, submetida a uma carga distribuída $q(x)$ por unidade de comprimento, conforme ilustrado na Figura 3. As grandezas Q e M correspondem, respectivamente, à força cortante e ao momento fletor, adotados como positivos segundo as orientações indicadas na referida figura. Para efeito de representação no elemento diferencial, serão considerados $Q + dQ$ como a força cortante e $M + d$ como o momento fletor na seção C' .

Figura 3 – Forças e momentos representados no diagrama de corpo livre do elemento de viga em corte.



Fonte: Adaptado de Beer et. al., 2011.

Dessa forma, ao aplicar as equações de equilíbrio das forças verticais e dos momentos fletores ao elemento diferencial de comprimento dx , obtêm-se as seguintes expressões:

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y; \frac{dQ_y}{dx} = -q(x) \quad (13)$$

Combinando as equações (13) e (14), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dM_z}{dx} &= Q_y = -EI_z \frac{d^3v(x)}{dx^3} \\ \frac{d^3v(x)}{dx^3} &= -\frac{Q_y}{EI_z} \end{aligned} \quad (14)$$

Derivando-se a equação (15), tem-se:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -\frac{q(x)}{EI_z} \quad (15)$$

As equações (13), (15) e (16) são as equações diferenciais que descrevem a linha elástica da viga. As equações podem ser solucionadas por meio de integrações sucessivas, avaliando as condições de contorno para cada caso analisado.

Ainda são válidas as seguintes relações para as equações diferenciais fundamentais de equilíbrio da viga:

$$Q = \frac{dM}{dx} = -EI \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (16)$$

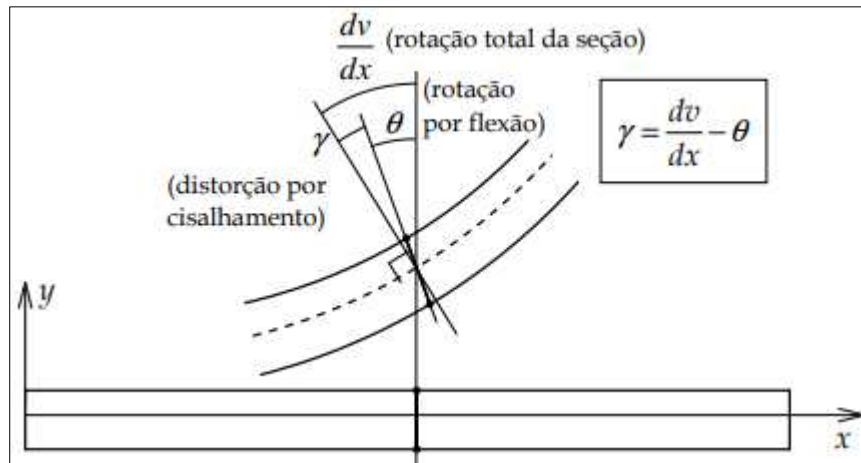
$$M = EI \frac{d\theta}{dx} \quad (17)$$

2.3 TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO

De acordo com Timoshenko (1921), o modelo da teoria de viga de Timoshenko considera os efeitos do esforço cortante como uma rotação adicional da seção transversal da viga, assim levando em consideração a rotação da seção transversal e o deslocamento transversal como variáveis independente.

Martha e Burgos (2014) reiteram que na teoria de viga de Timoshenko a rotação do eixo não está associada somente a derivada do deslocamento da transversal como na teoria de viga de Euler Bernoulli. Portanto a inclinação da viga é o resultado das contribuições das inclinações devido à flexão e ao cisalhamento, conforme ilustra a Figura 4.

Figura 4 - Inclinação da viga devido a tensão de cisalhamento observada na teoria de viga de Timoshenko.



Fonte: Marta e Burgos (2014).

Fleischfresser (2012) assume as seguintes hipóteses para formulação das equações do modelo de viga de Timoshenko:

1. O carregamento deve atuar sobre o plano xy de simetria da viga, de maneira a permitir que seu eixo flexionado permaneça nesse plano.
2. As relações de deformação-deslocamento são lineares, sendo possível escrever as equações de equilíbrio com base na geometria inicial.
3. As seções planas e normais ao eixo da viga antes da flexão permanecem planas, mas não necessariamente normais ao eixo após a flexão.
4. As tensões normais no eixo y são muito pequenas em relação à tensão normal no eixo x, sendo ignoradas nas relações tensão-deformação.
5. O material da viga é homogêneo, isotrópico e linearmente elástico.

Conforme Fleischfresser (2012) as componentes do deslocamento de um ponto genérico de uma viga podem ser escritas respectivamente:

$$u_x = -y \sin(\theta) \approx -y \tan(\theta) \approx -y \theta(x) \quad (18)$$

$$u_y = v(x) \quad (19)$$

$$u_z = 0 \quad (20)$$

Onde $v(x)$ é a componente do ponto genérico analisado pertencente ao eixo da viga na direção y , e $\varphi(x)$ é a inclinação da seção em relação ao eixo x .

A inclinação da viga $\varphi(x) = v'(x)$ resulta das contribuições da inclinação associada ao cisalhamento $\beta(x)$ e inclinação associada a flexão pura $\theta(x)$. Logo:

$$\varphi = \frac{dv}{dx} = \beta(x) + \theta(x) \quad (21)$$

Ainda segundo Fleischfresser (2012), as distorções γ_{xy} assim como a tensão de cisalhamento são variáveis ao longo da seção. Porém a fim de simplificar os cálculos de tensões de cisalhamento, considera-se uma distribuição uniforme dessa tensão como função apenas da coordenada x , utilizando para isso um fator de correção k denominado coeficiente de cisalhamento para efeito de compensação da variação das referidas distorções e tensões de cisalhamento.

Por tanto as tensões se relacionam com as deformações pelas seguintes expressões:

$$\sigma_x = -Ey \frac{d\theta}{dx} \quad (22)$$

$$\tau_{xy} = kG \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) \quad (23)$$

Em que G é o módulo de elasticidade transversal do material de viga.

Por meio da integração ao longo da área da seção transversal do elemento de viga obtém-se as expressões do momento fletor M do esforço cortante Q resultantes da distribuição das referidas tensões e são representadas pelas seguintes equações:

$$M = -EI \frac{d\theta}{dx} \quad (24)$$

$$Q = kGA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) \quad (25)$$

As equações de equilíbrio de força e momento de uma viga submetida a uma carga distribuída $w(x)$ foram apresentadas pelas equações (15) e (17).

Substituindo as expressões (25) e (26) para momento fletor e esforço cortante nas equações de equilíbrio (15) e (17), tem-se:

$$kGA \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d\theta}{dx} \right) = -q \quad (26)$$

$$-EI \frac{d^2 \theta}{dx^2} = kGA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) \quad (27)$$

Derivando a equação (28) em relação a x e substituindo em (27), obtém-se uma expressão dependente de $\theta(x)$:

$$EI \frac{d^3 \theta}{dx^3} = q \quad (28)$$

A partir da equação (28), pode-se escrever:

$$EI \frac{d^2 \theta}{dx^2} - kGA \theta + kGA \frac{dv}{dx} = 0 \quad (29)$$

Como explica Fleischfresser (2012), as equações (29) e (30) são as equações diferenciais governantes do problema estático para caso de aplicação de uma carga uniformemente distribuída. Quando há aplicação de uma carga pontual P aplicada a uma distância x' da extremidade esquerda da viga, considera-se as equações (17) e (26).

O coeficiente de cisalhamento é objeto de estudo por diversos autores, como aborda Faghidian (2017). O autor verifica que o coeficiente de cisalhamento se correlaciona com o coeficiente de poisson e das relações entre as dimensões da seção transversal.

Hutchinson apud Faghidian (2017) apresenta a seguinte expressão para o coeficiente de cisalhamento em seções circulares.

$$k_c = \frac{6(1 + \nu)^2}{7 + 12\nu + 4\nu^2} \quad (30)$$

De acordo com Soriano e Lima (2003) nos casos em que as vigas (ou eixos tratados como vigas) se caracterizam pela esbeltez (razão comprimento pela altura maior que 20), os resultados obtidos utilizando a teoria de viga Timishenko reincidentem sobre os resultados obtidos pela teoria de viga de Euler-Bernoulli, sendo possível desprezar a parcela de contribuição da distorção por cisalhamento. Os autores ainda destacam que em vigas semiespessas (razão comprimento pela altura menor que 20) observa-se divergência significativas nos resultados obtidos pelas duas teorias, sendo a Teoria de viga de Timoshenko demonstra com maior precisão o comportamento da linha elástica de vigas curtas em que os efeitos do cisalhamento não podem ser desprezados.

2.4 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Azevedo (2003) explica que no âmbito da engenharia de estruturas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) aplica-se na determinação do estado de tensão e deformação de um sólido sujeito a ações externas. Segundo o mesmo autor, antes do aparecimento do MEF, análises estruturais de meios contínuos eram realizadas por meio de resolução direta de sistemas de equações de derivadas parciais, levando em consideração as condições de fronteira, sendo comum recorrer a séries de Fourier.

De acordo com Vaz (2011), a formulação do MEF pode ser feita a partir do princípio da mínima energia potencial total, do método dos resíduos ponderados ou princípio dos deslocamentos virtuais.

Conforme Azevedo (2003), a formulação do MEF parte da existência de uma integral sobre um domínio complexo que pode ser substituída por um somatório de integrais estendidas a subdomínios de geometrias simplificadas.

Essa abordagem pode ser expressa pela equação (32) a seguir.

$$\int_V f dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f dV \quad (31)$$

Em que:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i \quad (32)$$

Portanto se possível calcular todas as integrais estendidas a n subdomínios (elementos finitos) V_i , consegue-se obter a integral sobre o domínio através do somatório correspondente ao segundo membro da equação (32).

2.5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO

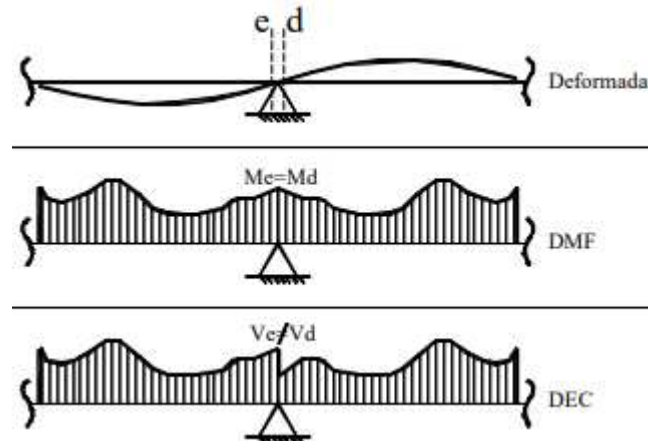
O método de elementos finitos aplicado à teoria de viga de Timoshenko para esse trabalho baseia-se no método dos deslocamentos. A viga ou o eixo é discretizado em subestruturas de n nós, sendo considerados os deslocamentos nesses nós por funções interpoladoras.

De acordo com Neves (2000), o modelo mais simples para formulação em elementos finitos é aquele que considera interpolações lineares tanto para deslocamento transversal dos nós, quanto para inclinações dos nós. No entanto, o autor explica que esse modelo se mostra rígido para vigas pouco deformáveis ao esforço cortante, acarretando o bloqueio ou travamento da solução.

Ainda segundo Neves (2000) as funções aproximadoras são escritas em função de parâmetros nodais dos elementos e devem representar grandezas contínuas. Logo, deve-se levá-la em consideração na escolha dos graus de liberdade. O autor aponta como exemplo o diagrama do esforço cortante que apresenta descontinuidades ao sofrer cargas concentradas conforme Figura 5, logo a distorção nesse ponto também irá apresentar descontinuidades, sendo assim

impossibilitada de ser utilizada como parâmetro nodal.

Figura 5 - Representação da descontinuidade na Inclinação da viga sob carga concentrada.



Fonte: Neves (2000).

O autor também conclui que a inclinação total da seção (soma da inclinação devido à flexão com aquela devido ao esforço cortante) não é contínua. Portanto, não é adequada como parâmetro nodal.

Azevedo (2003) introduz o conceito do princípio dos trabalhos virtuais ou princípio dos deslocamentos virtuais que estabelece que o trabalho realizado pelas tensões provocadas pelas cargas externas nos deslocamentos virtuais dos seus pontos de aplicação é igual ao trabalho realizado pelas tensões internas na deformação virtual do corpo.

Para implementação do MEF aplicado a teoria de viga de Timoshenko neste trabalho, foi utilizada a abordagem apresentada em Neves (2000), baseada em GERE & WEAVER (1987), considerando a deflexão linear correspondente aos esforços de flexão e cisalhamento e a inclinação devida apenas a flexão, por apresentarem graus de liberdade contínuos em todo intervalo.

2.5.1 Dedução da matriz de rigidez

Existem diferenças entre as convenções adotadas nas equações clássicas da resistência dos materiais e as convenções usuais para formulação do problema através do método de elementos finitos. Para isso, deve-se entender as convenções para esforço e deslocamentos que facilitem a aplicação computacional.

Conforme o critério de continuidade mencionado anteriormente, foram adotados os seguintes parâmetros nodais para o modelo:

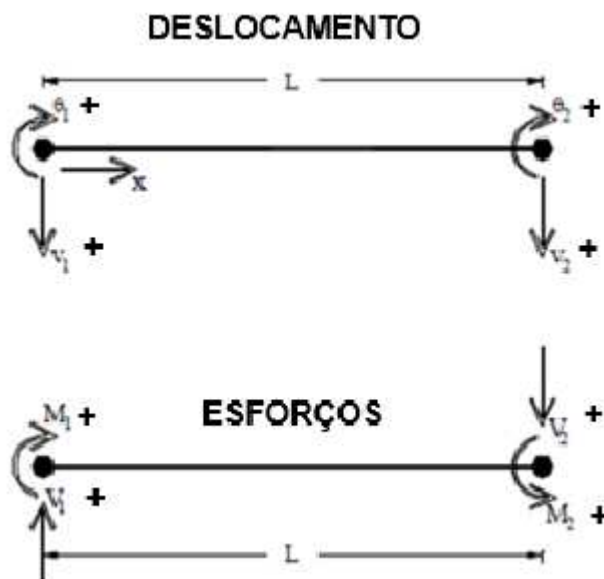
v_1 e v_2 deflexões lineares devidas ao momento fletor e esforço cortante;

θ_1 e θ_2 inclinações devidas apenas ao momento fletor.

Serão utilizadas as convenções usuais do método de elementos finitos por questões de simplicidade da formulação, sendo realizado o ajuste dos sinais ao final da formulação.

Para as equações da Resistência dos Materiais, tem-se os seguintes padrões de sinais descritos na Figura 6.

Figura 6 - Padrões clássicos adotados de sentido do deslocamento do elemento de viga.



Fonte: Adaptado Neves (2000).

Para a formulação em MEF, tem-se os seguintes padrões de sinais descritos na Figura 7.

Figura 7 - Padrões adotados para sentido de deslocamento do elemento de viga para aplicação do MEF.



Fonte: Adaptado Neves (2000).

A partir da Figura 7, tem-se:

$$v_t = v_f + v_c \rightarrow \frac{dv_t}{dx} = \frac{dv_f}{dx} + \frac{dv_c}{dx} \quad (33)$$

Em que:

v_t = deslocamento transversal total

v_f = deslocamento transversal devido ao momento fletor

v_c = deslocamento transversal devido ao esforço cortante

Logo:

$$\beta = \varphi + \gamma \quad (34)$$

Tomando o elemento infinitesimal, na ausência de momentos distribuídos, temos as relações já mencionadas nas equações (17) e (18) do tópico 3.2, escrevem-se ainda as seguintes relações de equilíbrio:

$$Q = -EI \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad (35)$$

$$M = -EI \frac{d\theta}{dx} \quad (36)$$

A partir de agora, será adotada a convenção de sinais do Método de Elementos Finitos, fazendo-se a compatibilização mais adiante. A troca será feita na imposição das condições de contorno do elemento.

Na formulação de elementos finitos, admite-se que não haja cargas distribuídas ao longo do comprimento do elemento, assumindo-se um vetor de cargas nodais equivalentes. Logo, escreve-se:

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (37)$$

Substituindo-se (26) em (38), tem-se:

$$\frac{d}{dx} kGA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) = 0 \rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) = 0 \quad (38)$$

Substituindo (26), (36) e (37) em (11), tem-se:

$$\frac{d}{dx} \left(-EI \frac{d\theta}{dx} \right) - kGA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) = 0 \rightarrow EI \frac{d^2\theta}{dx^2} + kGA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) \quad (39)$$

Escolhe-se uma função de interpolação para as inclinações para se ter sua terceira derivada nula, dada por:

$$\omega = A + Bx + Cx^2 \quad (40)$$

Da equação (35), sabe-se que:

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \theta \quad (41)$$

Substituindo (41) e (42) em (40), tem-se:

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2}{dx^2} (A + Bx + Cx^2) + kGA(\gamma) &= 0 \rightarrow \\ EI(2C) + kGA(\gamma) &= 0 \rightarrow \gamma = -\frac{2CEI}{kGA} \end{aligned} \quad (42)$$

Substituindo (43) e (41) em (42), tem-se:

$$\frac{dv}{dx} = A + Bx + Cx^2 - \frac{2CEI}{kGA} \quad (43)$$

Integrando a equação (44), tem-se:

$$v = D + Ax + \frac{B}{2}x^2 + C \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2EI}{kGA}x \right) \quad (44)$$

Assumindo-se a constante g :

$$g = \frac{6EI}{kGAL^2} \quad (45)$$

Escreve-se a equação (47) a seguir:

$$v = D + Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{C}{3}(x^3 - gL^2x) \quad (46)$$

A equações (41) e (47) são polinômios aproximadores dos deslocamentos que devem ser escritos em função dos parâmetros nodais. Aplicando-se as condições de contorno, observando-se as convenções entre teoria e MEF, tem-se:

Em $x = 0$; $v = -v_1$.

Em $x = 0$; $\theta = -\theta_1$.

Em $x = L$; $v = -v_2$.

Em $x = L$; $\theta = -\theta_2$.

Em forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ L & \frac{L^2}{2} & \frac{L^3}{3}(1-g) & 1 \\ 1 & L & L^2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -\theta_1 \\ -v_2 \\ -\theta_2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Solucionando o sistema matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta_1 \\ -\frac{2}{L^2} \frac{(-L\theta_2 - 2L\theta_1 + L\theta_2 g - L\theta_1 g + 3v_2 - 3v_1)}{(1+2g)} \\ -\frac{3}{L^3} \frac{(L\theta_2 + L\theta_1 - 2v_2 + 2v_1)}{(1+2g)} \\ -v_1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

A derivada da inclinação em relação a x, devido a flexão, é dada por:

$$\theta' = B + 2Cx \quad (49)$$

Substituindo os valores obtidos em (49) na equação (50), tem-se:

$$\begin{aligned} \theta' = & \left[-\frac{2}{L^2} \frac{(-L\theta_2 - 2L\theta_1 + L\theta_2 g - L\theta_1 g + 3v_2 - 3v_1)}{(1+2g)} \right] \\ & + 2x \left[-\frac{3}{L^3} \frac{(L\theta_2 + L\theta_1 - 2v_2 + 2v_1)}{(1+2g)} \right] \end{aligned} \quad (50)$$

A distorção é obtida substituindo-se os valores de (49) em (43):

$$\begin{aligned} \gamma &= \left[\frac{3}{L^3} \frac{(L\theta_2 + L\theta_1 - 2v_2 + 2v_1)}{(1+2g)} \right] \times \frac{gL^3}{3} \rightarrow \\ \gamma &= \frac{g}{L \times (1+2g)} \times [L(\theta_2 + L\theta_1 + 2(v_1 - v_2))] \end{aligned} \quad (51)$$

A energia de deformação a partir das contribuições das parcelas devido a flexão e ao cisalhamento é dada por:

$$U = \frac{EI}{2} \times \int_0^L (\theta')^2 dx + \frac{kGA}{2} \times \int_0^L (\gamma)^2 dx \quad (52)$$

Substituindo-se (51) e (52) em (53), tem-se:

$$\begin{aligned}
U = \frac{EI}{2} \left\{ \int_0^L \left[-\frac{2}{L^2} \frac{(-L\theta_2 - 2L\theta_1 + L\theta_2 g - L\theta_1 g + 3v_2 - 3v_1)}{(1+2g)} \right] \right. \\
+ \left[\left[+2x \left[-\frac{3}{L^3} \frac{(L\theta_2 + L\theta_1 - 2v_2 + 2v_1)}{(1+2g)} \right] \right] \right]^2 \\
+ 3 \frac{EI}{gL^2} \left[\int_0^L \left[\frac{3}{L^3} \frac{(L\theta_2 + L\theta_1 - 2v_2 + 2v_1)}{(1+2g)} \right] \times \frac{gL^2}{3} \right]^2 dx \Bigg\}
\end{aligned} \quad (53)$$

Resolvendo a equação (54), chega-se à expressão da energia de deformação, dada por:

$$\begin{aligned}
U = \frac{EI}{(1+2g)L^3} (2L^2\theta_2^2 + L^2\theta_2^2 g + 2L^2\theta_2\theta_1 - 2gL^2\theta_2\theta_1 - 6Lv_2\theta_2 + 6Lv_1\theta_2 \\
+ L^2\theta_1^2 g + 2L^2\theta_1^2 - 6Lv_2\theta_1 + 6Lv_1\theta_1 - 12v_1v_2 + 6v_1^2 + 6v_2^2)
\end{aligned} \quad (54)$$

Derivando-se a equação (55) em relação aos parâmetros nodais, segundo o princípio da mínima energia potencial total, tem-se:

$$\frac{dU}{dv_1} = \frac{6EI}{(1+2g)L^3} (2v_1 + L\theta_1 - 2v_2 + L\theta_2) \quad (55)$$

$$\frac{dU}{d\theta_1} = -\frac{2EI}{(1+2g)L^3} (-3v_1 - 2L\theta_1 - \theta_1 Lg + 3v_2 - L\theta_2 + \theta_2 Lg) \quad (56)$$

$$\frac{dU}{dv_2} = -\frac{6EI}{(1+2g)L^3} (2v_1 + L\theta_1 - 2v_2 + L\theta_2) \quad (57)$$

$$\frac{dU}{d\theta_2} = \frac{2EI}{(1+2g)L^3} (3v_1 + L\theta_1 - \theta_1 Lg - 3v_2 + 2L\theta_2 + \theta_2 Lg) \quad (58)$$

Rearranjando-se as equações (56), (57), (58) e (59) em sistema matricial, tal qual $[K_e] \times \{u_e\} = \{f_e\}$, tem-se:

$$\frac{EI}{1+2g} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(2+g) & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(1-g) \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(1-g) & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(1+g) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Em que:

K_e – Matriz de rigidez do elemento finito;

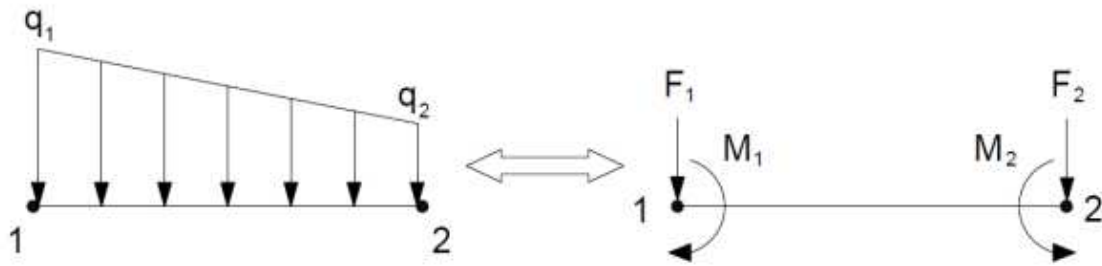
u_e – Vetor deslocamento nodais do elemento finito;

f_e – Vetor carregamento externo nodal

2.5.2 Dedução do Vetor Cargas Nodais

A dedução do vetor que representa o carregamento no elemento é a mesma utilizada por Campos (2015). O autor considera que os esforços externos concentrados e distribuídos devem ser calculados de forma a resultar em esforços nodais equivalentes, isto é, a parcela da carga distribuída deve ser representada por uma carga correspondente aplicadas nos nós de cada elemento finito conforme ilustrado na Figura 8 a seguir.

Figura 8 - Transformação do carregamento distribuído em carregamento pontual aplica nos nós.



Fonte: Campos (2015).

Considera-se que o carregamento distribuído assume apenas comportamento linear, conforme equação (61).

$$q(x) = ax + b \quad (60)$$

Em que $q(x)$ é a equação que representa carregamento, sendo a e b constantes.

Assume-se as seguintes condições nos nós:

$$x = 0 \rightarrow q = q_1$$

$$x = L \rightarrow q = q_2$$

Portanto:

$$a = \left(\frac{q_2 - q_1}{L} \right) \quad (61)$$

$$b = q_1 \quad (62)$$

Substituindo-se as equações (62) e (63) em (61), tem-se:

$$q(x) = \left(\frac{q_2 - q_1}{L} \right) x + q_1 \quad (63)$$

Para obter as parcelas de forças nodais equivalentes é necessário desenvolver a integral da função do carregamento distribuído pela função dos respectivos deslocamentos virtuais. Sendo a notação $\Delta(x)^*$ utilizada para denotar os deslocamentos virtuais.

$$\int_0^L q(x) \Delta(x)^* dx \quad (64)$$

Em que:

$$\Delta(x)^* = \left(1 - \frac{x}{L} \right) \Delta_1^* + \left(\frac{x}{L} \right) \Delta_2^* \quad (65)$$

Portanto:

$$\int_0^L q(x) \Delta(x)^* dx = \left(\frac{L}{3} q_1 - \frac{L}{6} q_2 \right) \Delta_1 + \left(\frac{L}{6} q_1 - \frac{L}{3} q_2 \right) \Delta_2 \quad (66)$$

Chega-se ao vetor carga nodais equivalentes do elemento dado pela equação (68) a seguir.

$$\{q_e\} = \left\{ q_1 \frac{L}{3} - q_2 \frac{L}{6} \quad q_1 \frac{L}{6} - q_2 \frac{L}{3} \right\} \quad (67)$$

2.6 PROGRAMAS MATLAB E ANSYS MECHANICAL APDL

De acordo com Becker et al. (2020) o MATLAB (do inglês *Matrix Laboratory*) é um software de computação numérica com foco em operações matemáticas sobre matrizes. Sua linguagem de script de alto nível permite resolução de problemas análoga a realização de operações matemáticas, e tem como principais funções: construção de gráficos, manipulação de matrizes, operações com variáveis simbólicas.

Conforme Ansys (2022), Ansys Mechanical *APDL* é um programa para análise multi-física por meio de método elementos finitos. O programa utiliza a linguagem de script *Ansys Parametric Design Language* para parametrizar e executar comandos, permitindo alto nível de customização pelo usuário tais como definição geometrias, condições de contorno, propriedades dos materiais e apresentações gráficas. O programa comercial e sua linguagem de script foram escolhido pela versatilidade, confiabilidade e solidez como ferramenta de análise de elementos finitos e apresentar uma versão gratuita para estudantes.

3 METODOLOGIA

O presente trabalho foi elaborado uma rotina computacional para cálculo da linha elástica de eixos tratados como vigas aplicando os conceitos desenvolvidos na fundamentação teórica. No tópico 3.1 são apresentados os aspectos computacionais da rotina em Matlab para processamento dos estudos de casos. No tópico 3.2 são apresentados os estudos de casos de eixos tratados como vigas, os quais se tem a equação da linha elástica determinada pela integração das equações desenvolvidas no tópico 2.2 3 2.3 e aplicação das condições de contorno para cada caso. No tópico 3.3 é apresentado o estudo de caso dos eixos dimensionados para caixa de redução do protótipo baja desenvolvido pela equipe IFPI Baja. Nesta seção, serão apresentadas as dimensões dos eixos, condições de carregamento e vínculos, conforme declarado em projeto. As rotinas em MatLab foram aplicadas para cada estudo de caso e comparadas com a solução analítica para os casos conhecidos de equação da linha elástica, bem como para os casos dos eixos escalonados que foram comparadas com a solução dada pelo *software* comercial Ansys Mechanical APDL.

3.1 ASPECTOS DA ROTINA COMPUTACIONAL

A rotina computacional escrita em script MatLab denominada *Programa_Principal* (APENDICE A) obedece às fases de pré-processamento, processamento e pós-processamento. Cada fase possui suas sub-rotinas, como descritos a seguir.

3.1.1 Pré-processamento

Na fase de pré-processamento são listados os dados de entrada, que são divididos em três:

- a) Geometria e propriedades mecânicas, em que:

N = número de seções.

L_s = comprimento de cada seção, representado pelo vetor de tamanho N .

$Diam$ = diâmetro de cada seção, representado pelo vetor de tamanho N .

E = módulo de elasticidade do material.

V = coeficiente de poisson.

N = número de elementos da malha.

- b) Vinculação, em que:

cc = vetor de tamanho $2(N+1)$, no qual valor 0 significa grau de liberdade livre e 1 significa grau de liberdade com restrição.

- c) Carregamentos, em que:

$tipo$ = vetor de tamanho N que indica qual tipo de carregamento para cada seção.

$q1$ = vetor de tamanho N que indica a magnitude do carregamento.

$dist$ = vetor de tamanho N que indica a distância de aplicação da força em relação a cada seção.

3.1.2 Processamento

Na fase de processamento são realizados os cálculos básicos para composição da matriz de rigidez do elemento através da função criada *assembly_matrix*, bem como a atribuição das condições de contorno (carregamento e deslocamentos pré-escritos) através da função *vínculos*. Em seguida, se dá o processo de montagem da matriz global de elementos segundo as características de contorno do problema. Tendo a matriz de rigidez K , a matriz de esforços internos F , é possível obter a matriz de deslocamento nodais U que é a incógnita do sistema.

$$K_g = [k_{11} \cdots k_{1n} \vdots \vdots k_{n1} \cdots k_{nn}]$$

$$f_g = [F_1 \vdots F_n]$$

$$u_g = [u_1 \theta_1 \vdots u_n \theta_n]$$

Por fim, nessa etapa é realizado o processo de resolução do sistema de equações matriciais por meio da equação (69), gerando o vetor de deslocamentos linear e angular do modelo.

$$[K_g] \times [u_g] = [f_g] \quad (68)$$

Em que:

K_g – Matriz de rigidez global;

u_g – Vetor deslocamento global;

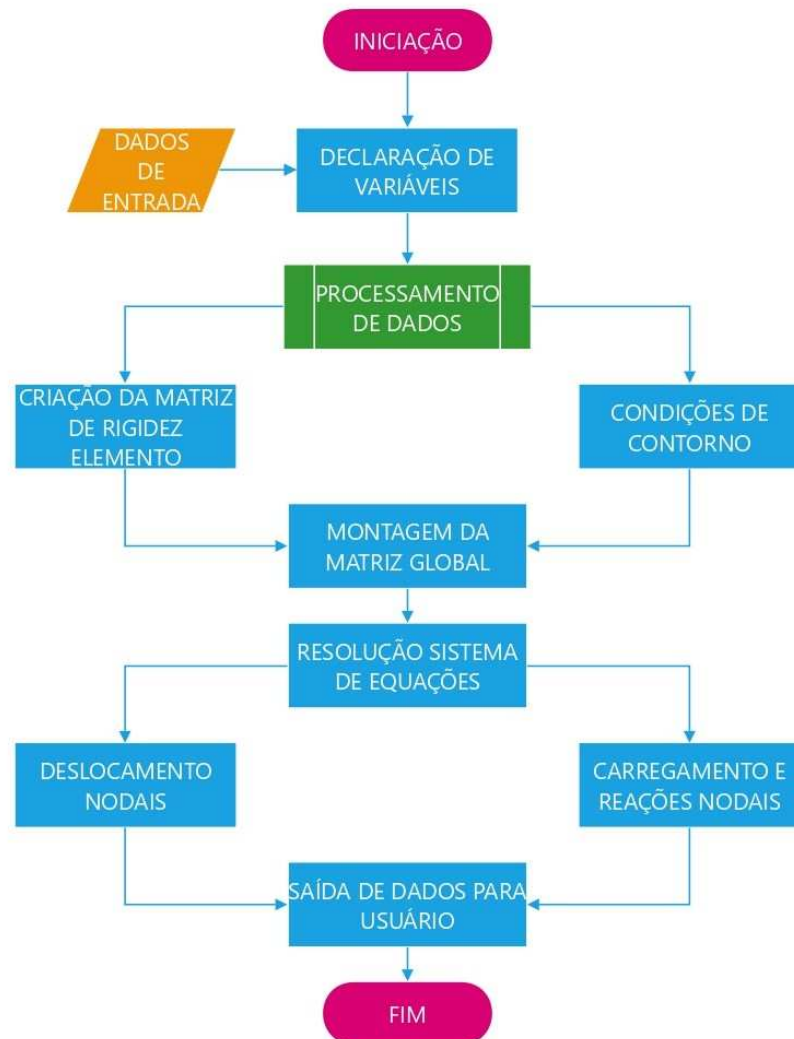
f_g – Vetor carregamento externo global

3.1.3 Pós-processamento

Na etapa de pós-processamento, são efetuadas as manipulações algébricas para obtenção e visualização dos valores numéricos dos deslocamentos e rotações através da função *trat_dados*. Aqui são gerados os gráficos e tabelas para uma análise cômoda do usuário.

A Figura 9 ilustra o fluxograma de representação esquemática do programa com as fases descritas anteriormente.

Figura 9 - Esquema de execução do programa desenvolvido.

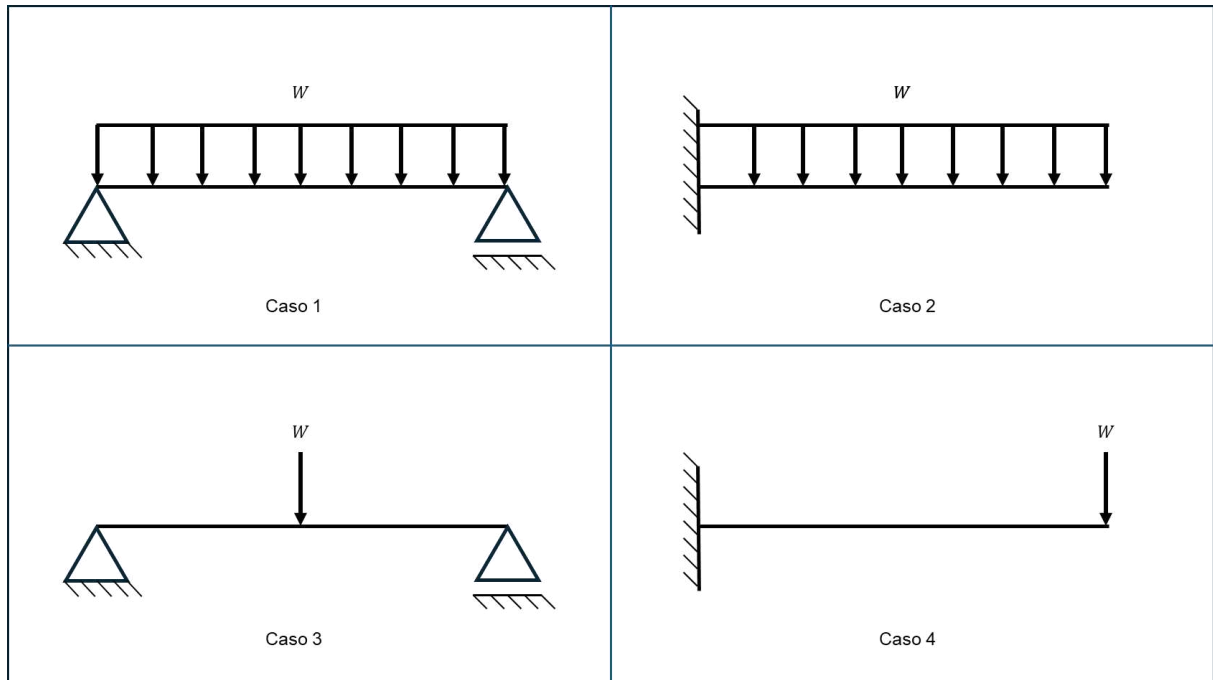


Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2 ESTUDO DE CASOS DE EIXOS COM SOLUÇÃO ANALÍTICA CONHECIDA

Os exemplos processados consistem inicialmente nas configurações de eixo de seção transversal circular ao longo do eixo e material homogêneo, assim com rigidez à flexão EI constante. Assume-se também regime linear e pequenos deslocamentos. A Figura 10 ilustra os exemplos descritos respectivamente.

Figura 10 - Representação esquemática das configurações de vinculações e carregamentos para os casos estudados.



Fonte: Próprio autor.

Em que o caso 1 representa eixo bi apoiado com carregamento distribuído aplicado ao longo de seu comprimento; o caso 2 representa eixo engastado em um extremo e livre no outro, com carregamento distribuído ao longo de seu comprimento; o caso 3 representa eixo bi apoiado com carregamento pontual aplicado no centro da viga; o caso 4 representa Eixo engastado em um extremo e livre no outro, com carregamento pontual aplicado na extremidade livre.

As linhas elásticas são obtidas a partir da integração das equações para vigas demonstradas nos tópicos 2.2 e 2.3 e aplicação das condições de contorno para obtenção das constantes de integração. Para cada caso foram aplicadas as condições de contorno específicas de cada configuração informada na Figura 10 e suas descrições.

3.2.1 Eixo bi apoiado com carregamento distribuído aplicado ao longo de seu comprimento

Conforme desenvolvido no tópico 2.2, chegou-se à equação diferencial para viga de Euler-Bernoulli. Portanto, integrando sucessivamente essa equação, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{d^3v}{dx^3} &= \frac{(wx + c_1)}{EI} \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{wx^2}{2} + c_1x + c_2 \right) \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{wx^3}{6} + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3 \right)\end{aligned}$$

Assim, chega-se à equação da linha elástica (70) com as constantes a serem determinadas pelas condições de contorno.

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{wx^4}{24} + \frac{c_1x^3}{6} + \frac{c_2x^2}{2} + c_3x + c_4 \right) \quad (69)$$

As condições de contorno aplicadas nos pontos de apoio são apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3 - Condições de contorno para eixo bi-apoiado com carregamento distribuído ao longo de seu comprimento.

Ponto do eixo	Condição de contornos
Para $x=0$	Momento igual a zero:
	$\frac{d^2v}{dx^2} = 0$
	Deslocamento igual a zero:

$$v = 0$$

Momento igual a zero:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 0$$

Deslocamento igual a zero:

$$v = 0$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, aplicando as condições de contorno, obtém-se os valores das constantes.

Logo:

$$c_1 = -\frac{wL}{2}$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = \frac{wL^3}{24}$$

$$c_4 = 0$$

A equação da linha elástica ao longo da viga bi apoiada com carregamento distribuído é:

$$v(x) = \frac{w(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)}{24EI} \quad (70)$$

Fleischfresser (2012) desenvolve a equação da linha elástica a partir da teoria de viga de Timoshenko para o caso estudado. A expressão obtida é apresentada pela equação (72) a seguir.

$$v(x) = \frac{w(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)}{24EI} + \frac{w}{2kGA}(-x^2 + Lx) \quad (71)$$

Sendo a primeira parcela do segundo membro desta equação correspondente à contribuição da deformação devido ao momento fletor e a segunda parcela correspondente a efeito da força cortante sobre o deslocamento do eixo da viga.

A equação que define a inclinação θ que foi utilizada nas análises é dada pela derivada da equação da linha elástica da viga definida a partir da teoria de viga de Bernoulli. Ou seja:

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{w(4x^3 - 6Lx^2 + L^2)}{24EI} \quad (72)$$

3.2.2 Eixo engastado em um extremo e livre no outro com carregamento distribuído ao longo de seu comprimento

O desenvolvimento da equação da linha elástica para uma viga engastada em um extremo e livre no outro com carregamento distribuído ao longo de seu comprimento segue os mesmos passos do caso anterior, restando aplicar as condições de contorno da estrutura.

Assim:

$$v = \frac{1}{EI} \left(\frac{wx^4}{24} + \frac{c_1x^3}{6} + \frac{c_2x^2}{2} + c_3x + c_4 \right) \quad (73)$$

As condições de contorno aplicadas nos pontos de apoio são apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4 - Condições de contorno para eixo engastado em um extremo e livre no outro com carregamento distribuído ao longo de seu comprimento.

Ponto do eixo	Condição de contornos
Para $x=0$	Momento igual a zero: $\frac{d^2 v}{dx^2} = 0$
	Deslocamento igual a zero: $v = 0$
Para $x=L$	Momento igual a zero: $\frac{d^2 v}{dx^2} = 0$
	Deslocamento igual a zero: $\frac{d^3 v}{dx^3} = 0$

Fonte: Próprio autor

Logo:

$$c_1 = -wL$$

$$c_2 = \frac{wL^2}{2}$$

$$c_3 = 0$$

$$c_4 = 0$$

A equação da linha elástica ao longo da viga engastada em uma extremidade e livre na outra com carregamento uniformemente distribuído ao longo de seu comprimento é:

$$v(x) = \frac{w(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)}{24EI} \quad (74)$$

Fleischfresser (2012) desenvolve a equação da linha elástica a partir da teoria de viga de Timoshenko para o caso estudado. A expressão obtida é apresentada pela equação (75) a seguir.

$$v(x) = \frac{w}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) + \frac{w}{2kGA} (-x^2 + 2Lx) \quad (75)$$

Sendo a primeira parcela do segundo membro desta equação correspondente à contribuição da deformação devido ao momento fletor e a segunda parcela correspondente a efeito da força cortante sobre o deslocamento do eixo da viga.

A equação que define a inclinação θ deste caso que será utilizada nas análises é dada pela expressão a seguir.

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{w(4x^3 - 12Lx^2 + 12L^2x)}{24EI} \quad (76)$$

3.2.3 Eixo bi apoiado com carregamento pontual aplicado no centro da viga

Para a condição proposta, sabe-se que a carga está no centro. Logo as reações de apoio são simétricas e valem a seguinte relação:

$$R_a = R_b = \frac{w}{2} \quad (77)$$

A relação da equação (78) pode ser utilizada para determinar a equação do momento fletor, dividindo-se a viga em partes.

Para $0 \leq x \leq L/2$

$$M(x) = R_b x = \frac{w}{2} x \quad (78)$$

Relacionando (79) com a equação diferencial do momento estabelecido em (18), tem-se:

$$M(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{w}{2} \quad (79)$$

Integrando sucessivamente, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{wx^2}{4} + c_1 \right) \\ v_1 &= \frac{1}{EI} \left(\frac{wx^3}{12} + c_1 x + c_2 \right) \end{aligned} \quad (80)$$

Para $L/2 \leq x \leq L$

$$M(x) = R_a x - w \left(x - \frac{L}{2} \right) = -\frac{w}{2} x + \frac{wL}{2} \quad (81)$$

Portanto:

$$\frac{d^2 v_2}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{2} x + \frac{wL}{2} \right) \quad (82)$$

Integrando sucessivamente, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{dv_2}{dx} &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{wx^2}{4} + \frac{wL}{2}x + c_3 \right) \\ v_2 &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{wx^3}{12} + \frac{wLx^2}{4} + c_3x + c_4 \right)\end{aligned}\quad (83)$$

As condições de contorno aplicadas são apresentadas na Tabela 5.

Tabela 5 - Condições de contorno para eixo bi apoiado com carregamento pontual aplicado no centro da viga.

Ponto do eixo	Condição de contornos
Para $x=0$	Deslocamento igual a zero: $v(0) = 0$
Para $x=L$	Deslocamento igual a zero: $v(L) = 0$
Para $x=L/2$	Continuidade em $x=L/2$ $v_1\left(\frac{L}{2}\right) = v_2\left(\frac{L}{2}\right)$ e $v'_1\left(\frac{L}{2}\right) = v'_2\left(\frac{L}{2}\right)$

Fonte: Próprio autor

Logo:

$$c_1 = -\frac{PL^2}{16EI}$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = -\frac{3PL^2}{16EI}$$

$$c_4 = \frac{PL^3}{48EI}$$

Após aplicar as condições de contorno, as equações da linha elástica para o caso estudado são:

Para $0 \leq x \leq L/2$

$$v(x) = \frac{wx}{48EI} (3L^2 - 4x^2) \quad (84)$$

Para $L/2 \leq x \leq L$

$$v(x) = \frac{w(L-x)}{48EI} (3L^2 - 4(L-x)^2) \quad (85)$$

A solução apresentada por Fleischfresser (2012) a partir da teoria de viga de Timoshenko para o caso estudado é apresentada a seguir.

Para $0 \leq x \leq L/2$

$$v = \frac{wx}{48EI} (3L^2 - 4x^2) + \frac{wL}{2kGA} x \quad (86)$$

Para $L/2 \leq x \leq L$

$$v(x) = \frac{w(L-x)}{48EI} (3L^2 - 4(L-x)^2) + \frac{w(L^2x - Lx^2)}{2kGA} \quad (87)$$

Sendo a primeira parcela do segundo membro destas equações correspondentes à contribuição da deformação devido ao momento fletor e a segunda parcela correspondente ao efeito da força cortante sobre o deslocamento do eixo da viga.

A equação que define a inclinação θ deste caso que será utilizada nas análises é dada pelas expressões a seguir.

Para $0 \leq x \leq L/2$

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{w}{48EI} (3L^2 - 12x^2) \quad (88)$$

Para $L/2 \leq x \leq L$

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{w}{48EI} [-3L^2 + 12(L - x)^2] \quad (89)$$

3.2.4 Viga engastada em um extremo e livre no outro, com carregamento pontual na extremidade livre

Sabendo que o carregamento é nulo ao longo do comprimento, exceto na extremidade onde se encontra o carregamento concentrado, o esforço cortante será constante ao longo da viga e se relaciona com a equação

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = V(x) = c_1.$$

Integrando sucessivamente, tem-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} (c_1x + c_2)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{c_1}{2} x^2 + c_2x + c_3 \right)$$

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{c_1}{3} x^3 + \frac{c_2}{2} x^2 + c_3x + c_4 \right) \quad (90)$$

As condições de contorno aplicadas são apresentadas na Tabela 6.

Tabela 6 - Condições de contorno para eixo engastado em um extremo e livre na outra, com carregamento pontual na extremidade livre.

Ponto do eixo	Condição de contornos
Para $x=0$	Deslocamento no engaste: $v(0) = 0$ Inclinação no engaste: $v'(0) = 0$
Para $x=L$	Esforço cortante é constante $EI \frac{d^3v}{dx^3} = V(x) = -w = c_1$ Momento fletor na extremidade $EI \frac{d^2v}{dx^2} = 0 = -c_1x + c_2$

Fonte: Próprio autor

Logo:

$$c_1 = -w$$

$$c_2 = wL$$

$$c_3 = 0$$

$$c_4 = 0$$

Após aplicar as condições de contorno, as equações da linha elástica para o caso estudado são:

$$v(x) = \frac{w}{6EI} (-x^3 + 3Lx^2) \quad (91)$$

Fleischfresser (2012) desenvolve a equação da linha elástica a partir da teoria de viga de Timoshenko para o caso estudado. A expressão obtida é apresentada pela equação (93) a seguir.

$$v(x) = \frac{w}{6EI}(-x^3 + 3Lx^2) + \frac{w}{kGA}x \quad (92)$$

Sendo a primeira parcela do segundo membro desta equação correspondente à contribuição da deformação devido ao momento fletor e a segunda parcela correspondente a efeito da força cortante sobre o deslocamento do eixo da viga.

A equação que define a inclinação θ deste caso que será utilizada nas análises é dada pela expressão a seguir.

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{w}{2EI}(-x^2 + 2Lx) \quad (93)$$

3.3 FORMULAÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA DOS CASOS ESTUDADOS

A inclusão das informações de geometria e propriedades mecânicas dos casos estudados no programa estão apresentados na Tabela 7. Os valores valem para os quatros casos estudados.

Tabela 7 - Dados de geometria e propriedades mecânicas dos casos estudados.

Geometria/Propriedade	Valor de inclusão no programa
Número de seções	1
Vetor comprimento	150
Vetor diâmetro	30
Módulo de elasticidade	205×10^9

Coeficiente de poisson	0,3
Número de elementos	20

Fonte: Elaborado pelo autor

Em seguida a Tabela 8 indica a inclusão das informações de vinculação da viga para cada caso no programa desenvolvido.

Tabela 8 - Dados de vinculações dos eixos para os casos de estudos.

Caso	Apoios	Valor incluso no programa
Caso 1	1º genero / 2º gênero	[1 0 1 0]
Caso 2	3º gênero / livre	[1 1 0 0]
Caso 3	1º genero / 2º gênero	[1 0 1 0]
Caso 4	3º gênero / livre	[1 1 0 0]

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, a Tabela 9 indica a inclusão das informações dos carregamentos dos eixos para cada caso no programa desenvolvido.

Tabela 9 - Dados de carregamento dos eixos para cada caso de estudo.

Caso	Caso1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
Tipo de carregamento	[2]	[2]	[1]	[1]
Carga	[10000]	[10000]	[10000]	[10000]
Distância de aplicação	[0]	[0]	[75]	[150]

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da digitação desses atributos, o programa processa e reproduz graficamente e numericamente as linhas elásticas obtidas através da rotina computacional.

3.4 ESTUDO DE CASO DE EIXOS ESCALONADOS

Para realizar a aplicação do programa na obtenção da linha elástica de eixos escalonados foi utilizado estudo de caso de eixos de caixa de redução de projeto real. A principal diferença da análise está na consideração do escalonamento do eixo, ou seja, eixo possui múltiplas seções transversais com diâmetro diferentes, dificultando ou mesmo impossibilitando a obtenção da linha elástica por meio analítico. Para efeito de validação, realizou-se a simulação através do programa Ansys Mechanical APDL 2024. Os resultados obtidos foram comentados e avaliados quanto às deflexões permissíveis do projeto e comparação de resultados com *software* comercial.

3.4.1 Eixos da caixa de redução do protótipo veicular baja

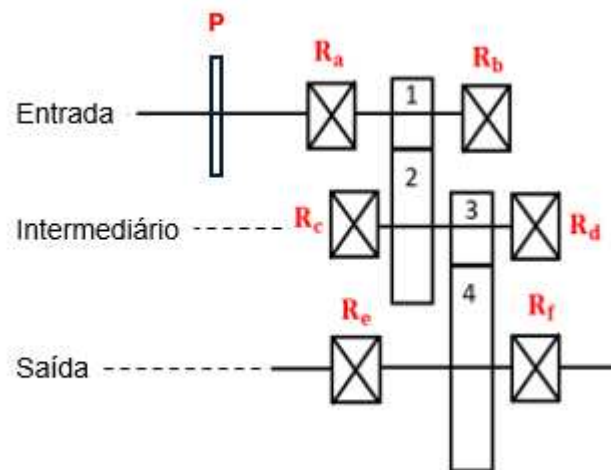
Para análise do caso foi considerado o relatório de projeto fornecido pela equipe IFPI Baja e pelo trabalho de Rodrigues (2020) que desenvolveu uma rotina de cálculos para análise dos carregamentos e esforços presentes numa caixa de transmissão por engrenagens utilizada no projeto de um veículo monoposto off road projetado e construído por estudantes do projeto de extensão IFPI Baja Instituto Federal do Piauí (IFPI).

Rodrigues (2020) demonstra como se dá a decomposição dos carregamentos atuantes na polia e engrenagens para verificar os esforços atuantes nos eixos da caixa de redução. Para o presente estudo de caso, foram utilizados os carregamentos levantados pelo autor, bem como o esquema de aplicação de força nos eixos.

A caixa de redução do protótipo IFPI Baja é composta por um trem de engrenagens composto de 4 engrenagens de dentes retos dispostas em 3 eixos. Eixo de entrada possui uma polia a qual recebe torque transmitido do motor e multiplica através da relação de transmissão entre as engrenagens até o eixo de saída.

A Figura 11 ilustra uma representação esquemática dos três eixos (entrada, intermediário e saída) dispostos na caixa de redução com demais elementos, polia (P), engrenagens (1, 2, 3 e 4) e rolamentos (R_a , R_b , R_c , R_d , R_e e R_f).

Figura 11 - Representação esquemática dos elementos da caixa de redução do protótipo IFPI Baja



Fonte: Adaptado Rodrigues (2020).

A imagem da figura 12 demonstra a caixa de redução aberta do sistema de transmissão do protótipo baja com seus componentes montados. Na imagem é possível observar a montagem das engrenagens e rolamentos nos eixos, elucidando a representação esquemática da Figura 11.

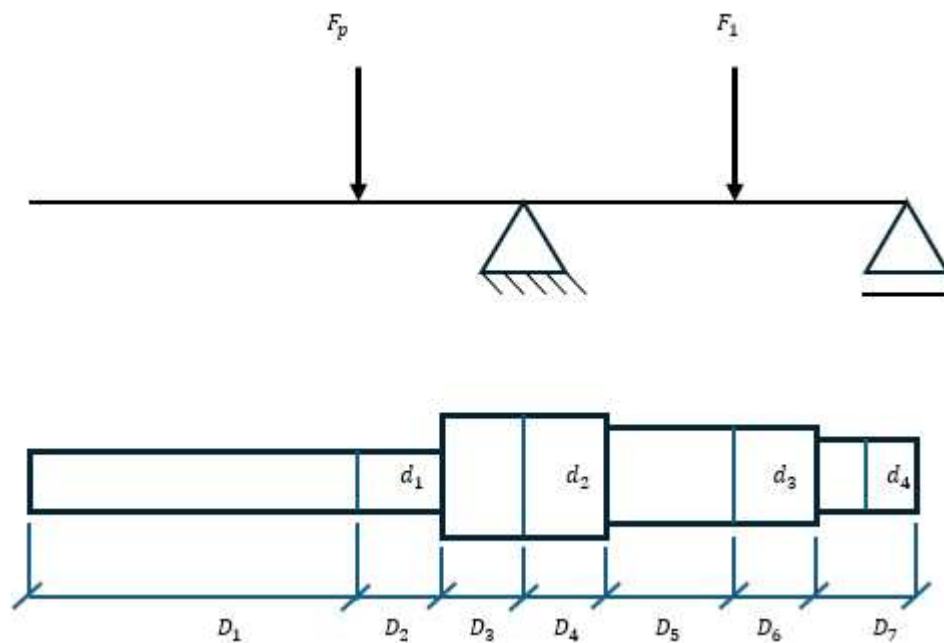
Figura 12 - Caixa de redução do sistema de transmissão do potótipo Baja.



Fonte: Próprio Autor.

A Figura 13 representa a configuração de força aplicada e reação de apoio do eixo de entrada, bem como a representação dos escalonamentos em cada seção ao longo do eixo.

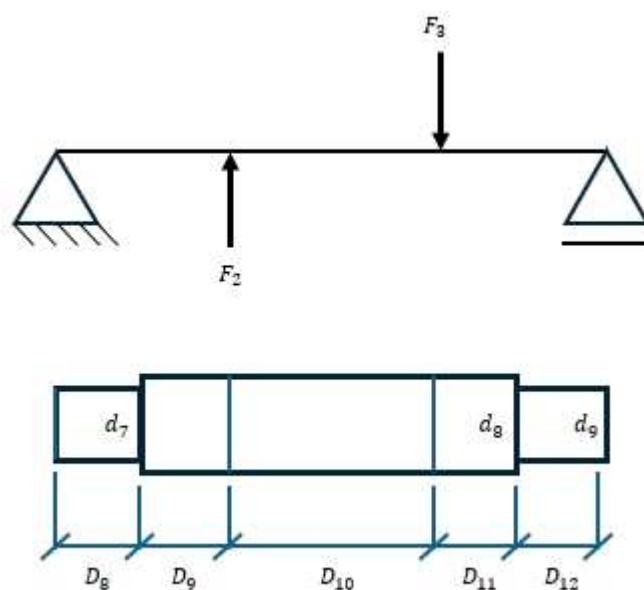
Figura 13 - Representação esquemática dos carregamentos e restrições ao eixo de entrada tratado como viga e sua representação 2D do escalonamento do eixo.



Fonte: Próprio autor.

Da mesma forma, a Figura 14 representa a configuração de força aplicada e reação de apoio do eixo intermediário, e sua representação do escalonamento.

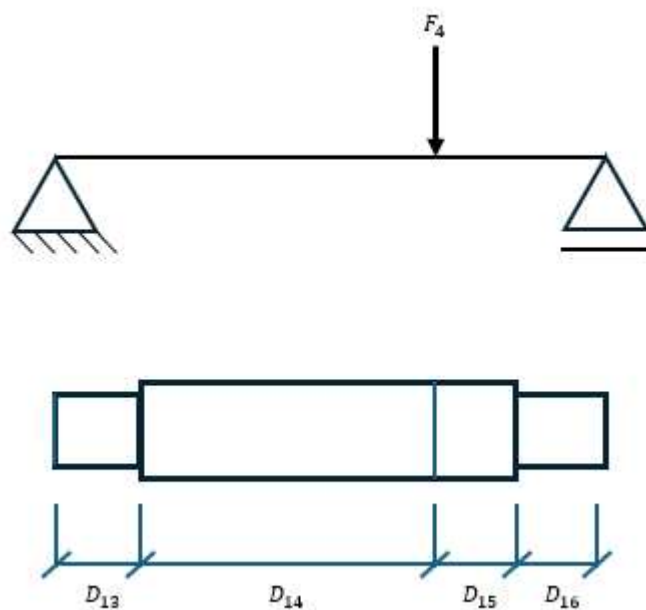
Figura 14 - Representação esquemática dos carregamentos e restrições ao eixo intermediário tratado como viga e sua representação 2D do escalonamento do eixo.



Fonte: Próprio autor.

Em seguida, a Figura 15 representa a configuração de força aplicada e reação de apoio do eixo de saída da caixa de redução, e sua representação do escalonamento.

Figura 15 - Representação esquemática dos carregamentos e restrições ao eixo de saída tratado como viga e sua representação 2D do escalonamento do eixo.



Fonte: Próprio autor.

Os valores dos comprimentos das seções de cada eixo com medidas convenientes para inclusão nos dados do programa, assim como o diâmetro de cada seção estão nas Tabelas do Apêndice B.

Os valores dos carregamentos nos eixos informados por Rodrigues (2020) estão na Tabela 10 a seguir.

Tabela 10 - Carregamentos sobre eixos da caixa de redução do protótipo IFPI Baja.

Carregamento pontual	Valor [N]
F_p	1070,95

F_1	1242,5
F_2	-1242,5
F_3	3288,9
F_4	-3288,9

Fonte: Adaptado Rodrigues (2020).

O módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν utilizados considerados para a simulação são os valores de referência para aço SAE1045 utilizado no projeto. Portanto E é igual a 190 Gpa e ν igual 0.3.

3.4.2 Formulação dos dados de entrada para análise dos eixos da caixa de redução do protótipo baja

A inclusão de dados de geometria, propriedades mecânicas dos eixos de entrada, intermediário e saída são apresentados nas Tabelas 11, 12 e 13 respectivamente.

Tabela 11 - Dados de entrada no programa para geometria e propriedades mecânicas do eixo de entrada.

Geometria/Propriedade	Valor de inclusão no programa
Número de seções	5
Vetor comprimento	$[D_1 D_2 D_3 D_4 D_5]$
Vetor diâmetro	$[d_1 d_2 d_2 d_3 d_4]$
Módulo de elasticidade	205×10^9
Coeficiente de Poisson	0,3
Número de elementos	20

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 12 - Dados de entrada no programa para geometria e propriedades mecânicas do eixo intermediário.

Geometria/Propriedade	Valor de inclusão no programa
Número de seções	4
Vetor comprimento	$[D_6 \ D_7 \ D_8 \ D_9]$
Vetor diâmetro	$[d_5 \ d_6 \ d_7 \ d_8]$
Módulo de elasticidade	205×10^9
Coefficiente de Poisson	0,3
Número de elementos	20

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 13 - Dados de entrada no programa para geometria e propriedades mecânicas do eixo de saída.

Geometria/Propriedade	Valor de inclusão no programa
Número de seções	3
Vetor comprimento	$[D_6 \ D_7 \ D_8]$
Vetor diâmetro	$[d_5 \ d_6 \ d_7 \ d_3 \ d_4]$
Módulo de elasticidade	205×10^9
Coefficiente de Poisson	0,3
Número de elementos	20

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os dados de vinculação dos eixos para inclusão no programa desenvolvido são apresentados na Tabela 14.

Tabela 14 - Dados de vinculações para os eixos da caixa de redução do protótipo IFPI Baja.

Caso	Apoios	Valor incluso no programa
Entrada	1º genero / 2º gênero	$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$
Intermediário	1º genero / 2º gênero	$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$
Saída	1º genero / 2º gênero	$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os dados de carregamentos dos eixos para inclusão no programa desenvolvido são apresentados na Tabela 15.

Tabela 15 - Dados de carregamentos sobre os eixos da caixa de redução.

Caso	Entrada	Intermediário	Saída
Tipo de carregamento	$[1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2]$	$[2 \ 1 \ 1 \ 2]$	$[2 \ 1 \ 2]$
Carga	$[F_p \ 0 \ 0 \ F_1 \ 0]$	$[0 \ F_1 \ F_2 \ 0]$	$[0 \ F_4 \ 0]$
Distância de aplicação	$[D_1 \ 0 \ 0 \ D_5 \ 0]$	$[0 \ D_9 \ D_9+D_{10} \ 0]$	$[0 \ D_{14} \ 0]$

Fonte: Elaborado pelo autor.

As linhas elásticas obtidas através da rotina computacional foram comparadas graficamente e analisadas quanto ao erro gerado em comparação com as linhas elásticas geradas em programa Ansys Mechanical APDL do a título de validação.

Os valores de deflexão foram analisados nos pontos de interesse para projeto (deflexão permissíveis nas engrenagens e rolamentos) e validados conforme a especificação de projeto.

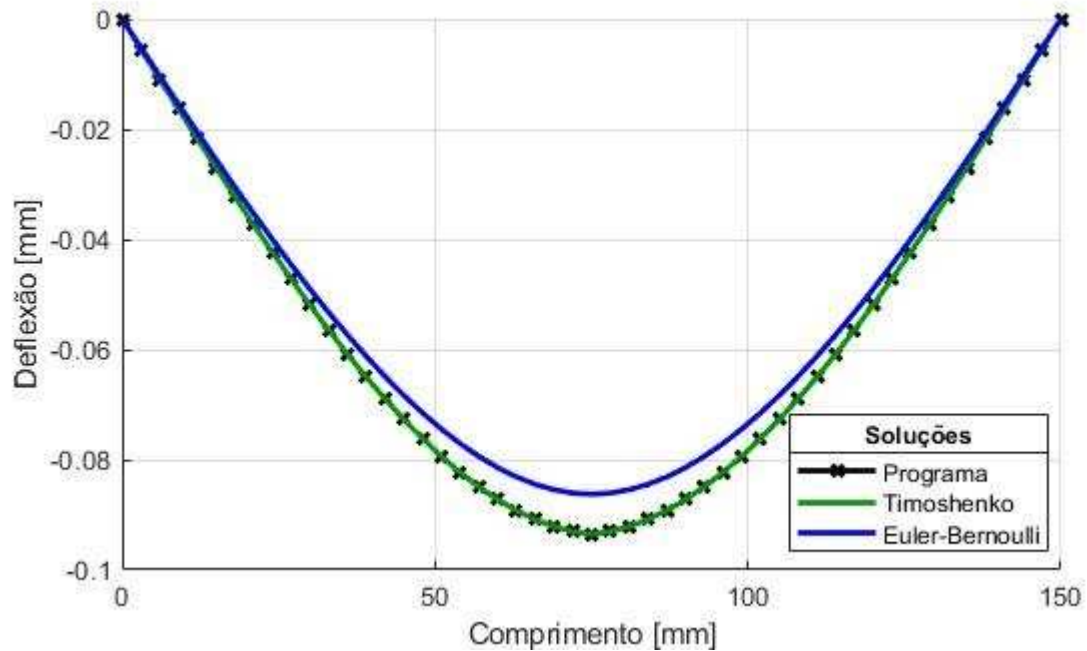
4 RESULTADOS

Os casos com solução analítica conhecida a seguir foram simulados pela rotina computacional considerando uma malha de 20 elementos e comparados com a solução analítica da teoria de viga Timoshenko e teoria de viga de Euler-Bernoulli. Já o caso de projeto de eixos da caixa de redução do protótipo baja foram analisados os aspectos do escalonamento dos eixos e seu comportamento obtido pela simulação no programa desenvolvido e pelo programa comercial Ansys APDL. Por fim são apresentados os resultados dos valores nos pontos de interesse obtidos pelo programa para validação da deflexão permissível para os eixos analisados.

4.1 ANÁLISE NUMÉRICA DOS CASOS COM SOLUÇÃO ANALÍTICA CONHECIDA

A Figura 16 ilustra a linha elástica obtidas através dos métodos analíticos pela equação (71) (Teoria de viga de Euler-Bernoulli) e equação (72) (Teoria de viga de Timoshenko) em comparação com MEF aplicado no programa para o estudo de Caso 1, eixo bi apoiado com carregamento distribuído ao longo de seu comprimento.

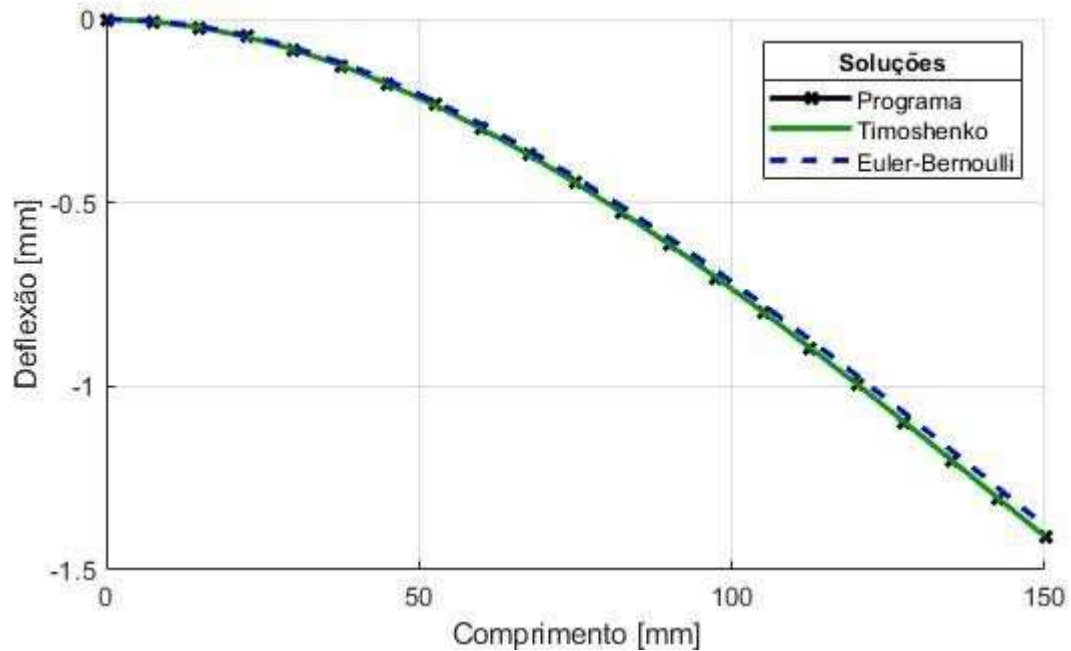
Figura 16 - Comparativo entre a solução do MEF e soluções analíticas para viga bi apoiada com carregamento distribuído constante ao longo da viga – Deflexão caso 1.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 17 ilustra a linha elástica obtidas através dos métodos analíticos pela equação (75) (Teoria de viga de Euler-Bernoulli) e equação (76) (Teoria de viga de Timoshenko) em comparação com programa desenvolvido para do estudo de Caso 2, eixo engastado com carregamento distribuído ao longo de seu comprimento.

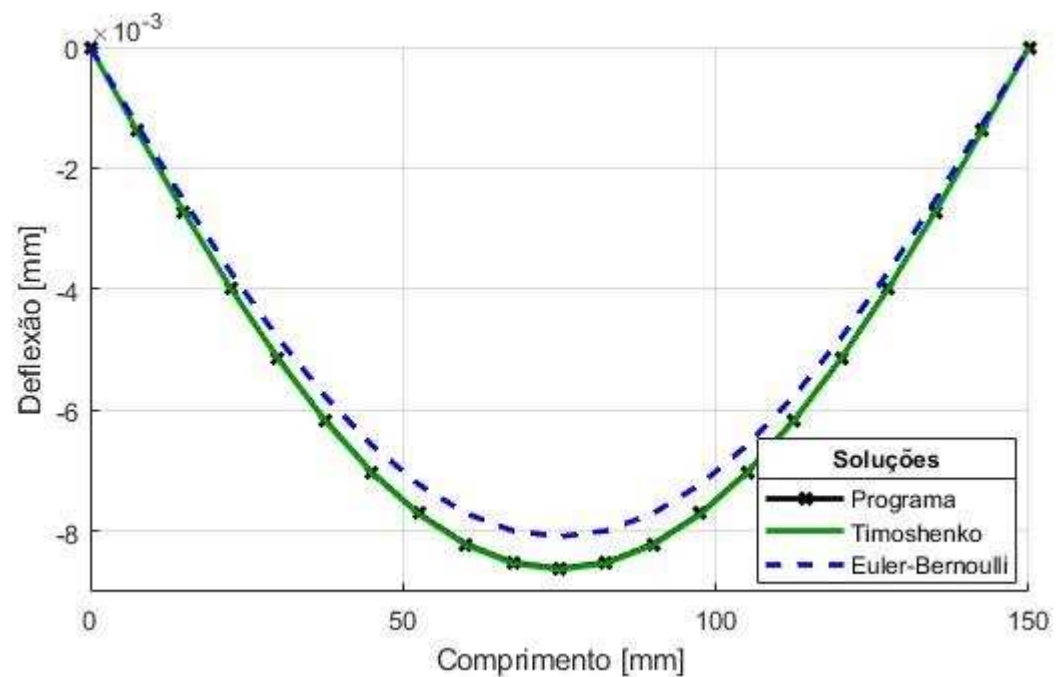
Figura 17 - Comparativo entre a solução do MEF e soluções analíticas para viga engastada com carregamento distribuído constante ao longo da viga – Deflexão caso 2.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 18 apresenta a linha elástica obtidas através dos métodos analíticos pelas equações (85) e (86) (Teoria de viga de Euler-Bernoulli) e equação (87) e (88) (Teoria de viga de Timoshenko) em comparação com programa desenvolvido para do estudo de Caso 3, eixo bi-apoiado com carregamento pontual no meio do vão.

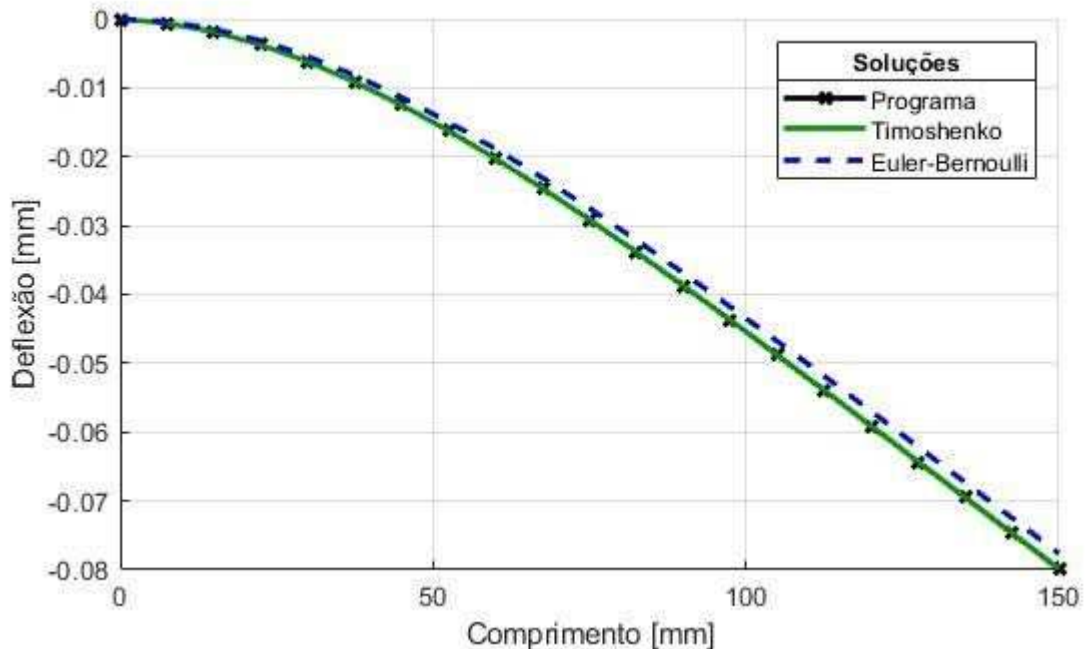
Figura 18 - Comparativo entre a solução do MEF e soluções analíticas para viga bi apoiada com carregamento pontual aplicado ao meio do comprimento da viga – Deflexão caso 3.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 19 apresenta a linha elástica obtidas através dos métodos analíticos pela equação (92) (Teoria de viga de Euler-Bernoulli) e equação (93) (Teoria de viga de Timoshenko) em comparação com programa desenvolvido para do estudo de Caso 4, eixo engastado com carregamento pontual aplicado em sua extremidade livre..

Figura 19 - Comparativo entre a solução do MEF e soluções analíticas para viga engastada com carregamento pontual aplicado na extremidade livre – Deflexão caso 4.

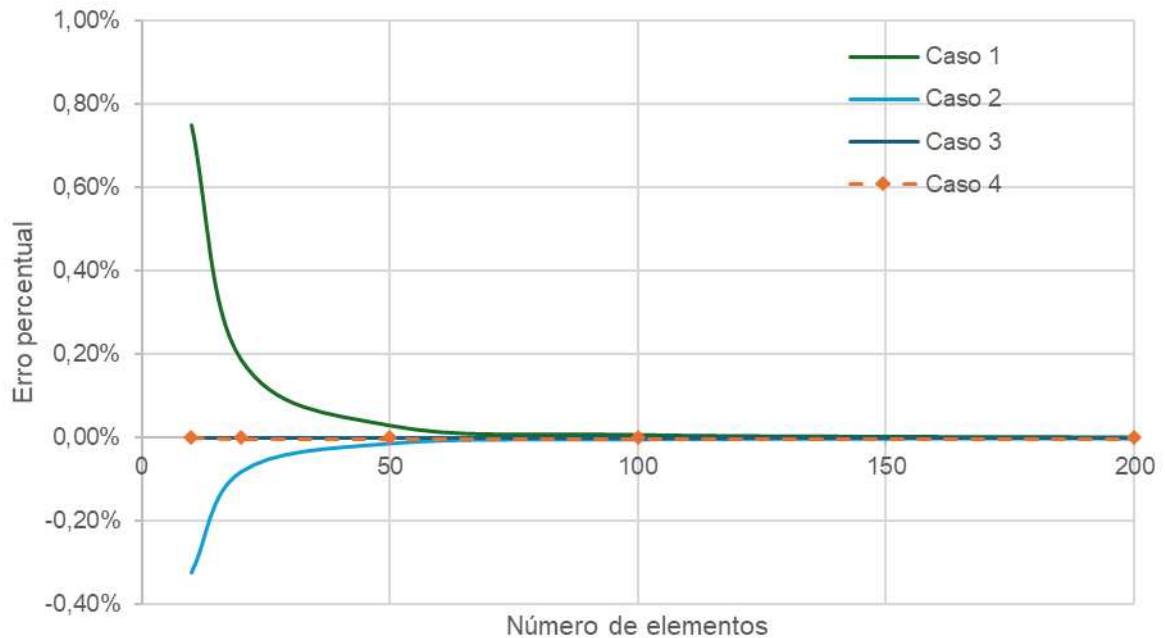


Fonte: Próprio autor.

Percebe-se que a rotina computacional fornece uma curva próxima à solução analítica, confirmando assim o mesmo comportamento da linha elástica entre o MEF utilizado no programa e as soluções analíticas. Também se observa que os casos analisados apresentam um comportamento mais rígido quando se utiliza a teoria de viga de Euler-Bernoulli para determinar o comportamento elástico linear do eixo tratado como viga. As curvas geradas a partir do programa acompanham visualmente as curvas geradas a partir do método de Timoshenko.

A fim de verificar a convergência do método computacional, comparou-se as diferenças no ponto de deflexão máxima obtidas pelo programa com os valores obtidos por meios analíticos para diferentes quantidades de elementos na malha. O resultado da comparação entre solução computacional e a solução analítica de Timoshenko pode ser observado no gráfico da Figura 20.

Figura 20 - Convergência da solução computacional para solução analítica – Análise da deflexão.



Fonte: Próprio autor.

O gráfico da Figura 20 fornece resultados satisfatórios em relação aos resultados fornecidos pela solução analítica, gerando diferenças percentuais inferiores a 1% a partir de uma malha com 10 elementos para os casos analisados. Nos casos 3 e 4 nos quais a viga recebe um carregamento pontual, apresentam uma convergência imediata a partir de 10 elementos de malha, enquanto os casos 1 e 2 nos quais o eixo recebe um carregamento distribuído, percebe-se que para se obter a mesmas convergências dos casos 3 e 4 é necessária uma malha com mais elementos.

As diferenças percentuais para uma malha de 20 elementos, mesma utilizada na simulação dos casos, estão apresentados na Tabela 16 a seguir.

Tabela 16 - Diferenças percentuais entre a solução do programa desenvolvido e a solução analítica pela teoria de Timoshenko da linha elástica para uma malha de 20 elementos.

Eixo simulado	Solução Analítica Timoshenko (mm)	Solução programa próprio (mm)	Erro percentual (%)
Caso 1	-8,63259E-06	-8,61641E-06	-0,081
Caso 2	-7,98183E-05	-7,9883E-05	0,187
Caso 3	-0,00000935355	0,00000935355	0,000
Caso 4	-0,00014093	-0,00014093	0,000

Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se a partir do gráfico da Figura 20 e da Tabela 15 que os casos em que são utilizados carregamentos pontuais (Casos 3 e 4) apresentaram uma convergência mais rápida e menor erro percentual em relação a solução analítica da viga de Timoshenko.

Quando se compara a solução computacional com a solução analítica da viga de Euler-Bernoulli se verifica dispersão percentual considerável, acima de 2% para os casos analisados. A diferença percentual nos pontos de maior deflexão foi listado e pode ser verificado na Tabela 17 a seguir.

Tabela 17 - Diferenças percentuais entre a solução do programa desenvolvido e a solução do analítica pela Teoria de Euler-Bernoulli para uma malha de 20 elementos.

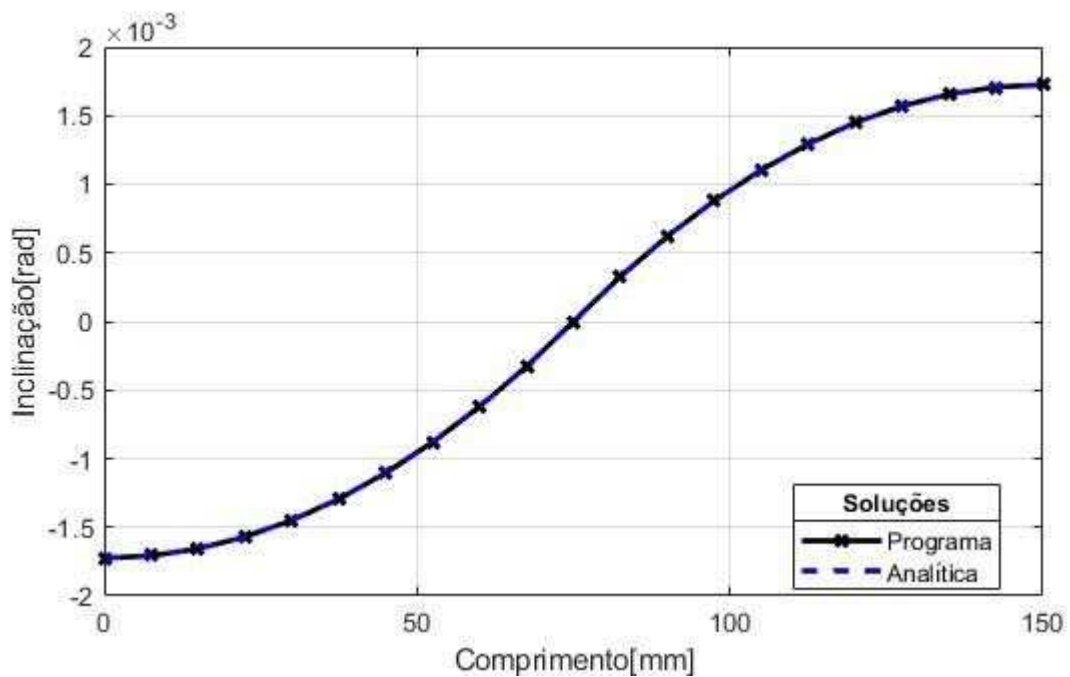
Eixo simulado	Solução Analítica Euler Bernoulli (mm)	Solução programa próprio (mm)	Erro percentua l (%)
Caso 1	-0,00808714	-0,00863000	-6,713%
Caso 2	-0,07763656	-0,07982870	-2,824%
Caso 3	-0,00862628	-0,00935355	-8,431%
Caso 4	-0,13802054	-0,1409296	-2,108%

Fonte: elaborado pelo autor.

A maior diferença percentual se dá ao efeito da contribuição da cortante sobre os eixos analisados, já que os eixos tratados como vigas possuem uma razão comprimento/altura inferiores a 20, portanto são semiespessos.

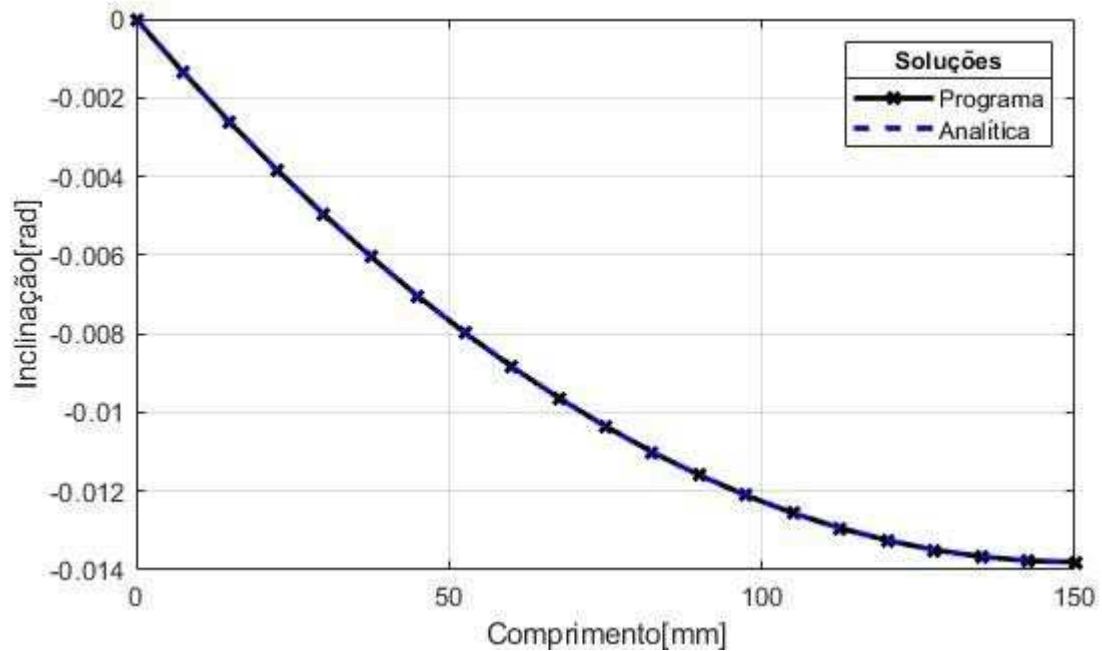
Foram avaliados o comportamento da inclinação dos casos em comparação as soluções analíticas de Euler-Bernoulli em conformidade com modelo desenvolvido para o programa. Os resultados para cada caso estão nos gráficos da Figura 21, Figura 22, Figura 23 e Figura 24.

Figura 21 - Comparativo entre a solução do MEF e solução analítica para viga bi apoiada com carregamento pontual aplicado ao meio da viga – Inclinação caso 1.



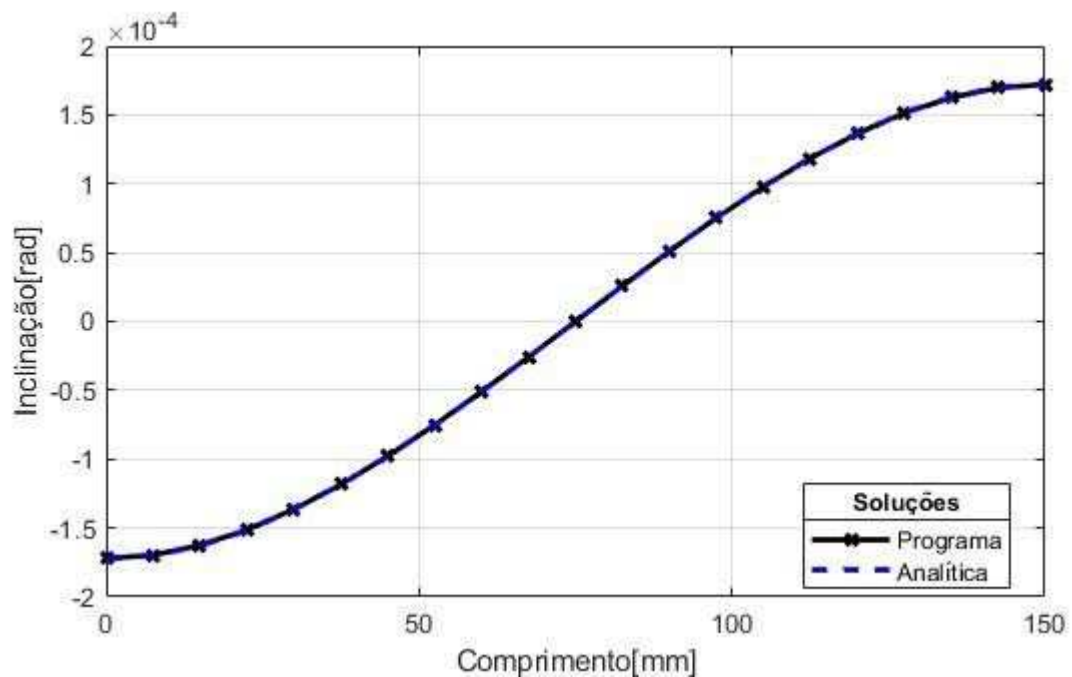
Fonte: Próprio autor.

Figura 22 - Comparativo entre a solução do MEF e solução analítica para viga engastada com carregamento pontual aplicado à extremidade livre da viga – Inclinação caso 2.



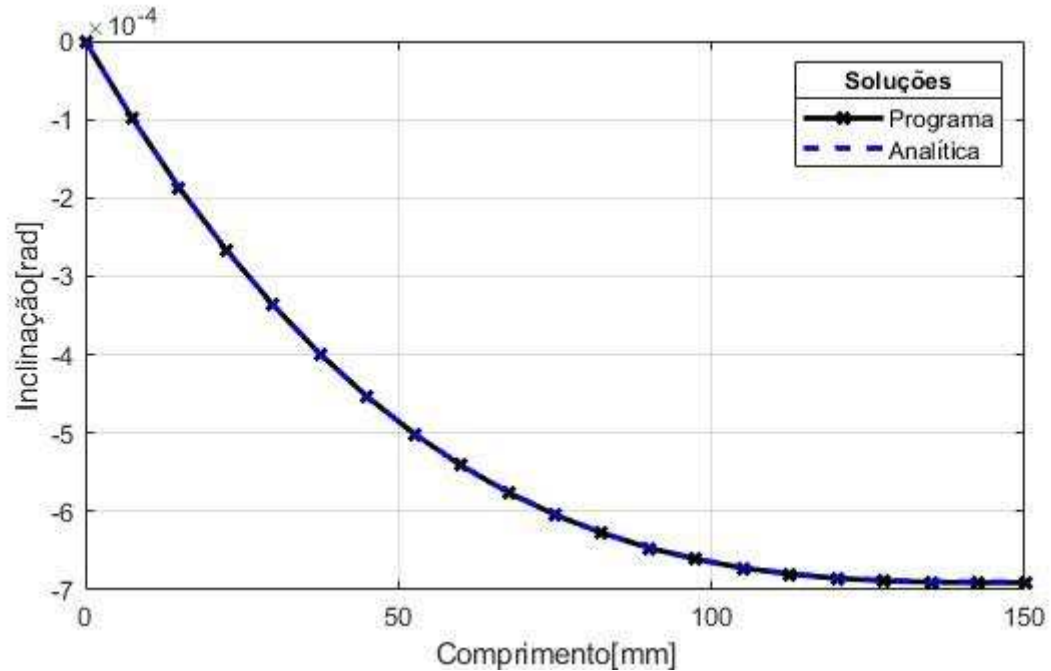
Fonte: Próprio autor.

Figura 23 - Comparativo entre a solução do MEF e solução analítica para viga bi apoiada com carregamento distribuído constante ao longo da viga – Inclinação caso 3.



Fonte: Próprio autor.

Figura 24 - Comparativo entre a solução do MEF e solução analítica para viga engastada com carregamento distribuído constante ao longo da viga – Inclinação caso 4.

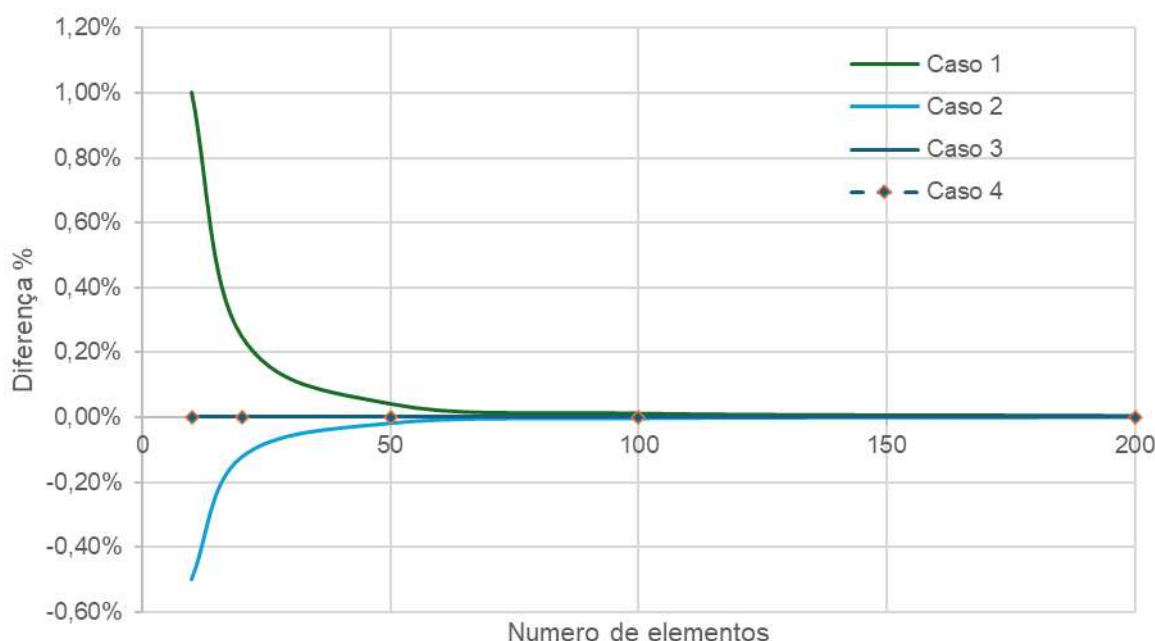


Fonte: Próprio autor.

Percebe-se que a solução dada pela rotina computacional acompanha a solução analítica. Ressalta-se que a solução numérica adotada no programa para deflexão angular apresenta comparação apenas com a teoria de viga de Euler-Bernoulli devido às restrições impostas no desenvolvimento da solução numérica para o programa.

Assim como realizado para a análise dos deslocamentos, verificou-se a convergência do método computacional das inclinações com o método analítico de Euler-Bernoulli, parametrizando o número de elementos da malha. O resultado pode ser observado na Figura 25.

Figura 25 - Convergência da solução computacional para solução analítica – Análise da inclinação.



Fonte: Próprio autor.

Conforme ilustrado pela Figura 25, as soluções numéricas e as soluções analíticas apresentam boa convergência. Assim como verificado para as deflexões, percebe-se a convergência imediata para os casos 1 e 2, enquanto os casos 3 e 4 obtém-se uma convergência equivalente aos casos 1 e 2 quando se aumenta o número de elementos da malha.

As diferenças percentuais para uma malha de 20 elementos, mesma utilizada na simulação dos casos, estão apresentados na Tabela 18 a seguir.

Tabela 18 - Diferenças percentuais entre a solução do programa desenvolvido e a solução do analítica pela Teoria de Euler-Bernoulli para simulação das inclinações dos eixos para uma malha de 20 elementos.

Eixo simulado	Solução Analítica Euler Bernoulli (mm)	Solução programa próprio (mm)	Erro percentual (%)
Caso 1	-0,0315991805	-0,0315201834	0,250%
Caso 2	-0,1263967185	-0,126554709	-0,125%

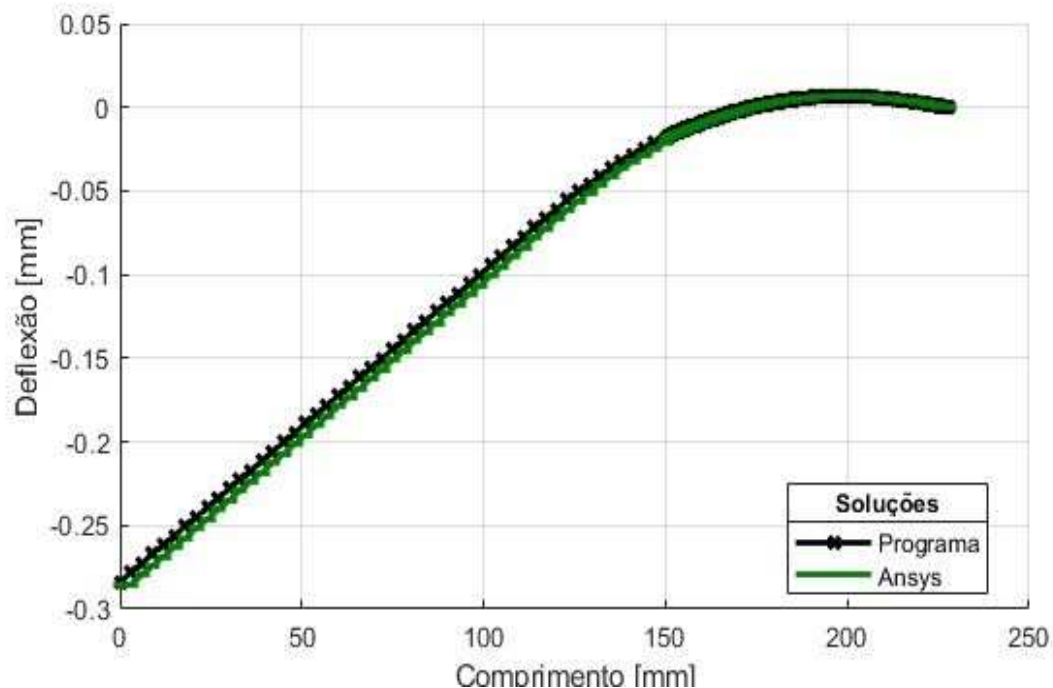
Caso 3	-0,0017252568	-0,0017252568	0,000%
Caso 4	-0,0138020546	-0,0138020546	0,000%

Fonte: elaborado pelo autor.

4.2 ANÁLISE NUMÉRICA EM EIXOS ESCALONADOS DA CAIXA DE REDUÇÃO

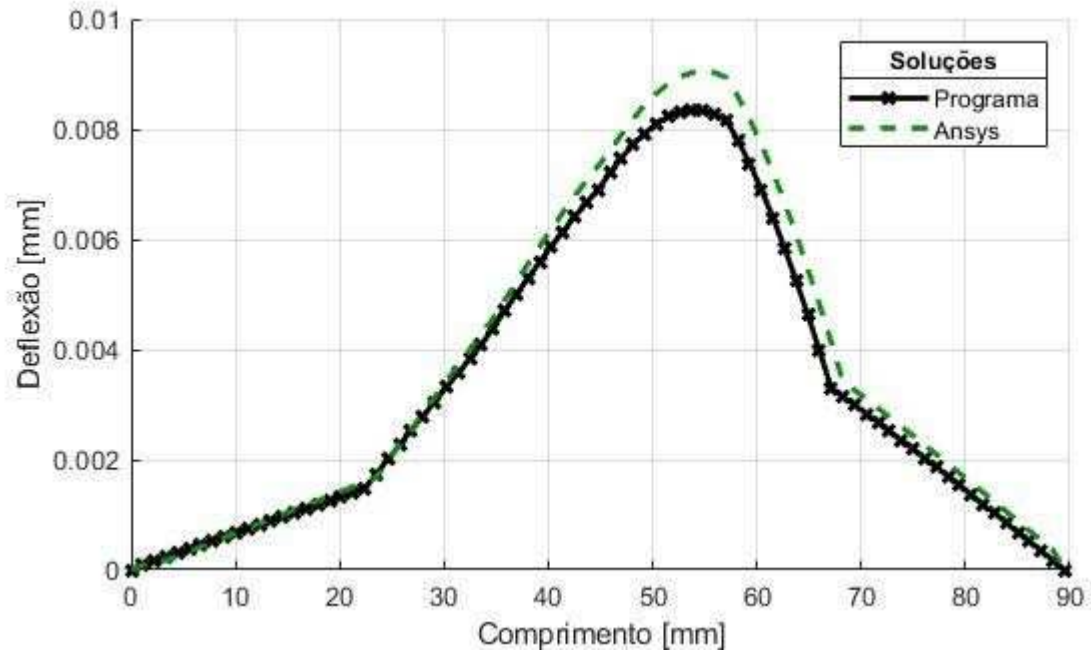
O estudo de caso do projeto de eixo da caixa de redução do protótipo baja foi utilizado para validação do aspecto de processamento de eixos escalonados pelo programa desenvolvido. Para isso foram simulados as deflexões e inclinações de eixos modelados como vigas pelo programa desenvolvido e comparado com as simulações no módulo Mechanical APDL do software comercial Ansys. As simulações das deflexões dos três eixos analisados podem ser visualizadas na Figura 26, Figura 27 e Figura 28.

Figura 26 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Mechanical APDL Ansys para deflexão do eixo de entrada da caixa de redução.



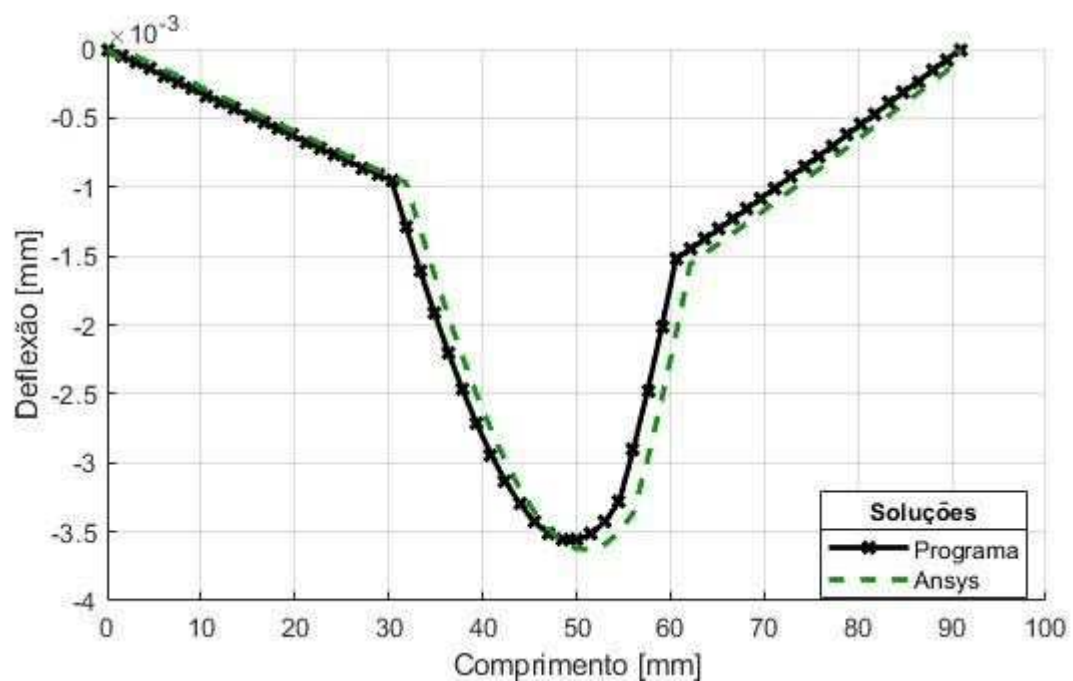
Fonte: Próprio autor.

Figura 27 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Mechanical APDL Ansys para deflexão do eixo intermediário da caixa de redução.



Fonte: Próprio autor.

Figura 28 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Mechanical APDL Ansys para deflexão do eixo de saída da caixa de redução.

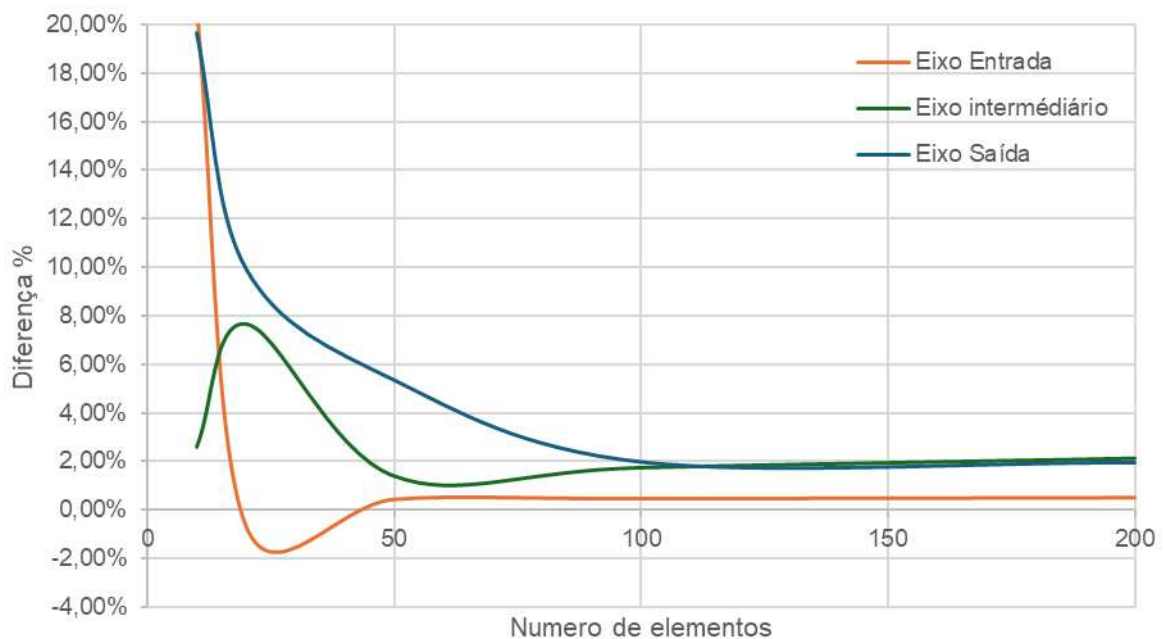


Fonte: Próprio autor.

Ao analisar a linha elástica percebe-se um comportamento intervalado da deflexão devido ao escalonamento das seções transversais ao longo dos eixos. Nota-se também que as curvas geradas pelo programa desenvolvido e pelo software comercial Ansys Mechanical APDL apresentam comportamento semelhante para as linhas elásticas simuladas dos eixos.

Para validar o algoritmo de simulação da estrutura escalonada dos eixos, comparou-se as diferenças percentuais no ponto de maior deflexão entre o programa desenvolvido e o software comercial. O resultado pode ser observado na Figura 29.

Figura 29 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Ansys Mechanical APDL para deflexão do eixo de saída da caixa de redução.



Fonte: Próprio autor.

Segundo apresentado no gráfico da Figura 29 verifica-se visualmente a convergência dos resultados obtidos no programa para o software comercial à medida que se aumenta o número de elementos de malha. Percebe-se que para uma malha de 100 elementos por seção obtém-se resultado com diferença inferior 2% para os eixos analisados conforme apresentado pela Tabela 19.

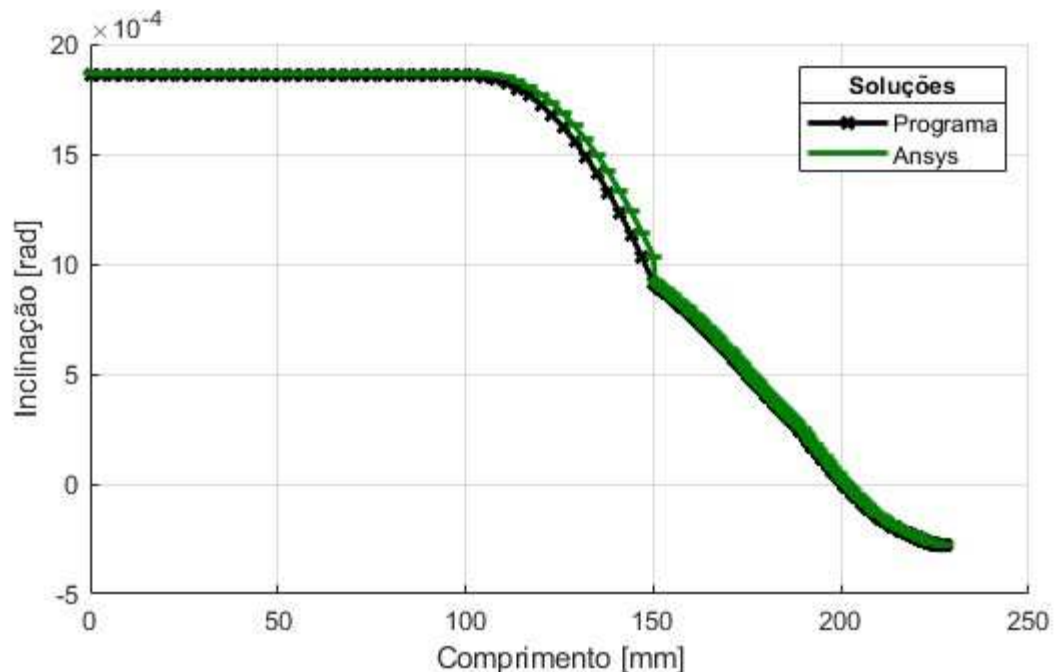
Tabela 19 - Diferenças percentuais na simulação da deflexão máxima dos eixos para uma malha de 100 elementos.

Eixo simulado	Solução Mechanical APDL (mm)	Solução programa próprio (mm)	Diferença %
Eixo de entrada	-0,28519	-0,28387	0,463%
Eixo intermediário	0,0090356	0,0088778	1,746%
Eixo de saída	-0,0041881	-0,0041053	1,977%

Fonte: elaborado pelo autor.

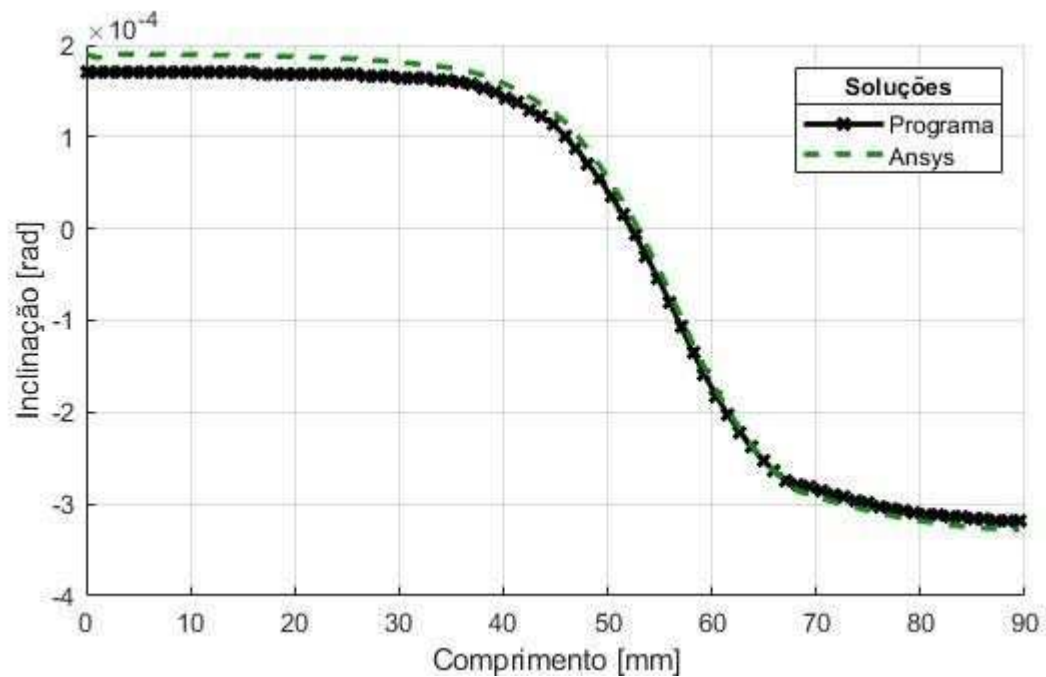
As análises das inclinações foram realizadas para complementar o estudo da assertividade do programa desenvolvido. As simulações das inclinações dos eixos podem ser visualizadas na Figura 30, Figura 31 e Figura 32.

Figura 30 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Ansys Mechanical APDL para inclinação do eixo de entrada da caixa de redução.



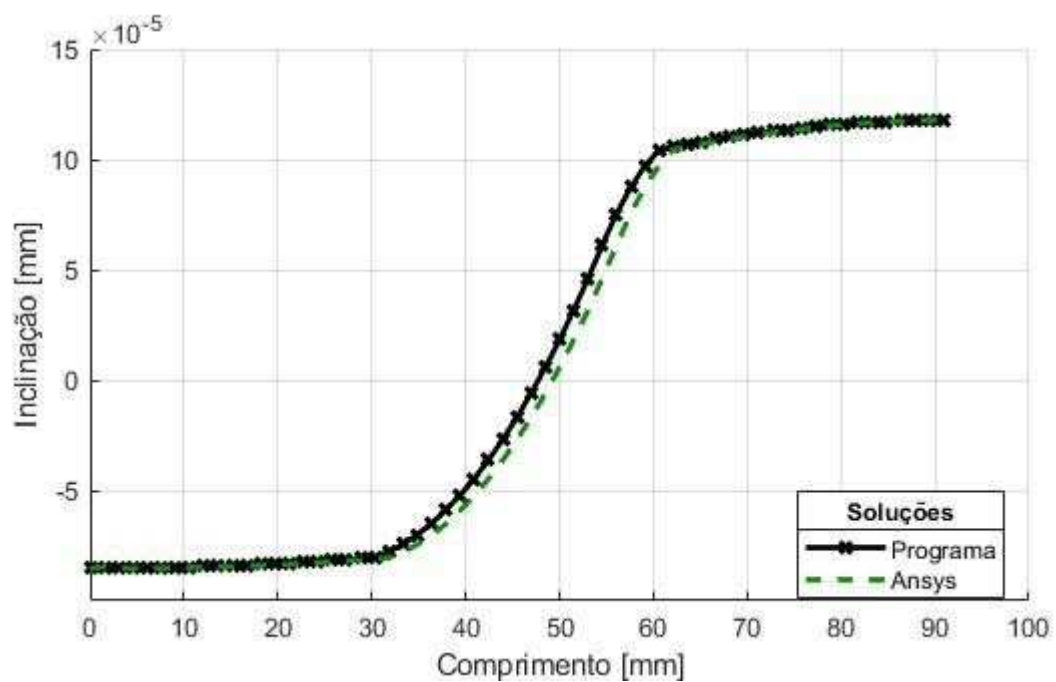
Fonte: Próprio autor.

Figura 31 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Ansys Mechanical APDL para inclinação do eixo intermediário da caixa de redução.



Fonte: Próprio autor.

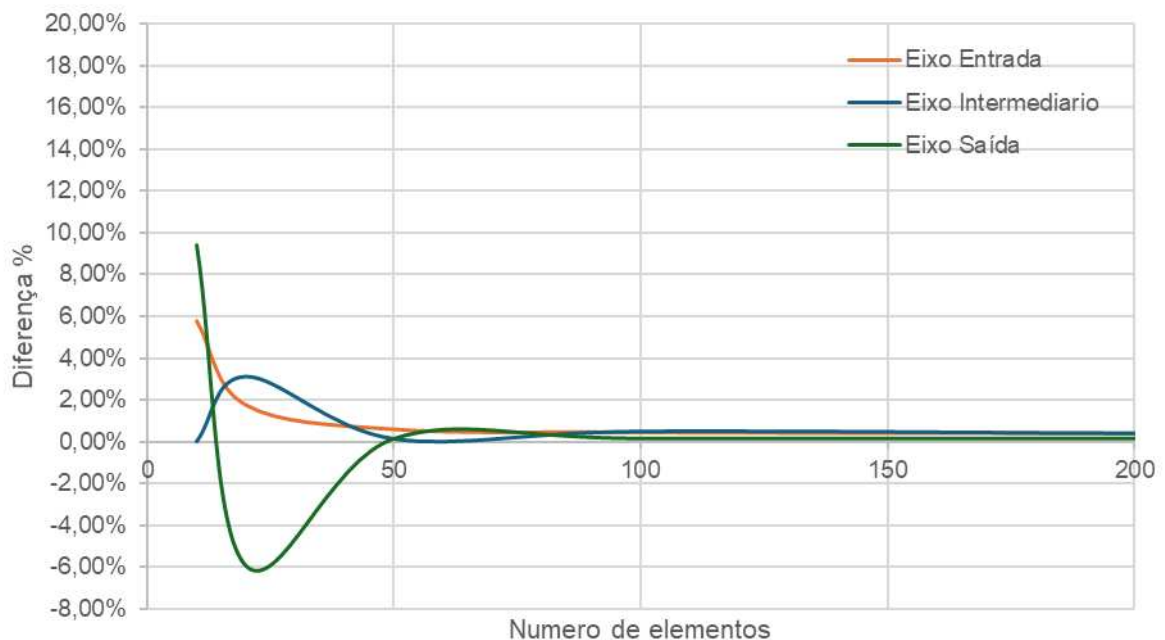
Figura 32 - Comparativo entre a solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Ansys Mechanical APDL para inclinação do eixo de saída da caixa de redução.



Fonte: Próprio autor.

Conforme na análise das inclinações, observa-se comportamento similar entre o resultado fornecido pelo programa desenvolvido neste trabalho e software comercial. Para verificar a convergência entre os resultados fornecido pelos dois programas, comparou-se as diferenças percentuais nos pontos de maior inclinação dos eixos. A comparação pode ser observada no gráfico da Figura 33.

Figura 33 - Convergência entre solução do programa desenvolvido e solução dada pelo Ansys Mechanical APDL para inclinação dos eixos da caixa de redução.



Fonte: Próprio autor.

Como esperado, os valores de maior inclinação em cada eixos comparados entre os programas tendem a convergir à medida que se aumenta o número de elementos. Nota-se que a convergência entre os valores se apresenta abaixo de 1% para uma malha de 50 elementos por seção. A Tabela 20 indica os valores nos pontos de maior inclinação obtidos para o programa desenvolvido, valores obtidos pelo programa comercial Ansys Mechanical APDL e sua diferença percentual entre os valores obtidos.

Tabela 20 - Diferenças percentuais na simulação da inclinação máxima dos eixos para uma malha de 100 elementos.

Eixo simulado	Solução Mechanical APDL (mm)	Solução programa proprio (mm)	Diferença %
Ponto 1 (rolamento)	0,0018635	0,0018522	0,606%
Ponto 2 (engrenagem)	-0,00032796	-0,00032748	0,146%
Ponto 3 (rolamento)	0,00012619	0,000125975	0,170%

Fonte: elaborado pelo autor.

4.3 ANÁLISE DA DEFLEXÃO NOS PONTOS DE INTERESSE DOS EIXOS DA CAIXA DE REDUÇÃO

Para concluir o estudo a fim de aplicar o programa para análise da deflexão dos eixos nos pontos de interesse da caixa de redução do protótipo da equipe IFPI Baja. De acordo com as análises dos eixos da caixa de redução, entende-se que uma malha de 100 elementos forneceu valores confiáveis para se realizar a verificação dos pontos de interesse.

A Tabela 21, 22 e 23 fornecem os valores de deflexão e inclinação nos pontos de interesse dos eixos de entrada, intermediário e saída e suas comparações de seus valores admissíveis para utilização de engrenagens conforme valores de referência mencionados por Budynas (2011) e Mott (2018) e rolamentos conforme recomendados por SKF (2015) informados na Tabela 1.

Tabela 21 - Análise da deflexão nos pontos de interesses no eixo de entrada.

Ponto de interesse	Valor deflexão programa (mm)	Valor deflexão referência (mm)	Valor inclinação programa (rad)	Valor inclinação referência (rad)
Polia	0,283866	-	0,00185613	-
Engrenagem 1	0,00680371	0,127	0,000003643	0,00523359
Rolamento R_a	-	-	0,00053281	0,00116355

Rolamento R_b	-	-	0,00027850	0.00116355
-----------------	---	---	------------	------------

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 22 - Análise da deflexão nos pontos de interesses do eixo intermediário.

Ponto de interesse	Valor deflexão programa (mm)	Valor deflexão referência (mm)	Valor inclinação programa (mm)	Valor inclinação referência (mm)
Rolamento R_c	-	-	0,00017056	0.00116355
Engrenagem 2	0,00200506	0,127	0.00016782	0,00523359
Engrenagem 3	0,00690852	0,127	0.00018220	0,00523359
Rolamento R_d	-	-	0.00031763	0.00116355

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 23 - Análise da deflexão nos pontos de interesses do eixo de saída.

Ponto de interesse	Valor deflexão programa (mm)	Valor deflexão referência (mm)	Valor inclinação programa (rad)	Valor inclinação referência (rad)
Rolamento R_d	-	-	0,000099292	0.00116355
Engrenagem 4	0,00152055	0,127	0,00011560	0,00523359
Rolamento R_f	-	-	0,00012704	0.00116355

Fonte: elaborado pelo autor.

Conforme observado, os valores obtidos através do programa desenvolvido, validam os parâmetros geométricos fornecidos, ou seja, os valores de deflexão e inclinação nos pontos de montagem de engrenagens e rolamentos respeitam os valores de referência estabelecidos quando aplicáveis. Vale ressaltar que os valores de deflexão e inclinação no ponto de aplicação da polia deve ser avaliado de acordo com recomendações de projeto dela.

5 CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

5.1 CONCLUSÃO

A partir das análises realizadas, é possível concluir que a rotina computacional desenvolvida para o cálculo de deflexões lineares e angulares em eixos modelados como vigas apresentou desempenho satisfatório ao comparar a solução numérica em relação as soluções analíticas. A comparação entre os resultados fornecidos pela aplicação computacional e aqueles obtidos pelas teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko demonstrou que a formulação adotada é adequada para representar o comportamento da flexão elástica linear dos casos com solução analítica conhecida. O programa também apresentou desempenho suficiente ao ser aplicado na análise dos eixos escalonados com geometria mais complexa. O programa apresentou de forma objetiva as informações de curva da linha elástica e obtenção dos valores numéricos de deflexão e inclinação em qualquer ponto analisado do eixo.

Observou-se na análise dos casos de eixos com solução analítica conhecida apresentaram comportamento mais rígido da deflexão pela teoria de viga de Euler-Bernoulli em comparação com a solução da deflexão pela teoria de viga de Timoshenko e sua solução numérica pelo programa, comportamento esperado de vigas semiespessas conforme cita Soriano e Lima (2003) sobre relação de esbeltez em vigas. Ao analisar do ponto de vista da conversão entre as soluções analíticas e numéricas nos pontos de maior deflexão de cada caso, o programa demonstrou desempenho satisfatório, apresentando uma conversão da solução obtida pelo programa ao obtido através da linha elástica analítica com diferenças percentuais inferiores a 1% para uma malha mínima de 10 elementos.

Quanto à análise dos eixos da caixa de redução do protótipo baja, foi possível observar o comportamento da linha elástica com características que evidenciam a geometria escalonada do eixo. Na comparação entre resultados do programa comercial Ansys Mechanical APDL e programa desenvolvido nesse trabalho, observou-se que ambos apresentaram o mesmo comportamento da linha elástica. O erro percentual medido nos pontos de maior deflexão de cada eixo ficou abaixo dos

1% para uma malha de 50 elementos em comparação ao resultado obtido pelo programa comercial.

Por fim, os eixos da caixa de redução foram avaliados em seus pontos de interesses para aplicação de rolamentos e engrenagens. O programa forneceu a informação de deflexões nos referidos pontos, possibilitando a validação com base nos valores de referência. A utilização do programa para análise de eixos com geometrias mais complexas.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUTOS

Como consideração para trabalhos futuros com objetivo de implementação de novas funcionalidades e, portanto, novas análises pelo programa, sugere-se:

- Desenvolvimento de análises paramétricas de vigas e eixos como por exemplo dados geométricos (esbeltez, áreas da seção transversal) e propriedades mecânicas (módulo de elasticidade).
- Análise dinâmicas através da adequação da matriz de rigidez e massa para implementação no programa.
- Estudo analítico ou experimental do coeficiente de cisalhamento com auxílio do código computacional.

REFERÊNCIAS

ANSYS. *APDL: The Language of Simulation*. 2022. Disponível em: <https://www.ansys.com/blog/what-is-apdl>. Acesso em: 29 abr. 2025.

AZEVEDO, Álvaro F. M. *Método dos elementos finitos*. 1. ed. Porto, 2003. 248 p. Disponível em: <http://www.fe.up.pt/~alvaro>. Acesso em: 29 abr. 2025.

BECKER, A. J.; SILVA, D. M. I. da; DIAS, F. H. S.; PINHEIRO, L. K. *Apostila MATLAB*. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, 2020. Disponível em: https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/783/2020/02/Apostila_Matlab.pdf. Acesso em: 29 abr. 2025.

BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F. *Mecânica dos materiais*. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

BORGES, A. P. F.; SILVA JUNIOR, I. C. da; SANTOS, G. J. B. dos; LIMA, J. M. F. Aproximações em diferenças finitas dos modelos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko usando grid não uniforme. *Contribuciones a las Ciencias Sociales*, São José dos Pinhais, v. 17, n. 6, p. 1–29, 2024. DOI: 10.55905/revconv.17n.6-122. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/381360957>. Acesso em: 10 jul. 2025.

BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. *Projeto de engenharia mecânica de Shigley*. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

CAMPOS, J. V. de. *Formulação do método dos elementos finitos para análise elástica linear de vigas de Timoshenko*. 2015. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2015.

DIAS, F. T.; PINHO-DA-CRUZ, J.; VALENTE, R. A. F.; SOUSA, R. J. A. de. *Método dos elementos finitos: técnicas de simulação numérica em engenharia*. 1. ed. Lisboa: IST Press, 2008.

FAGHIDIAN, A. Unified formulations of the shear coefficients in Timoshenko beam theory. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 143, n. 9, 2017.

FLEISCHFRESSER, S. A. *Uma formulação do método dos elementos de contorno para a análise de vigas de Timoshenko*. 2012. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

HIBBELER, R. C. *Resistência dos materiais*. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.

MARTHA, L. F.; BURGOS, R. Diferenças na consideração da distorção no modelo de Timoshenko de uma viga submetida a carregamento axial. *Jornada Sul Americana de Engenharia Estrutural*, Uruguai, 2014.

NEVES, R. A. de. *Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas de pisos de edifícios, considerando-se a influência das tensões cisalhantes*. 2000. 114 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

NORTON, R. L. *Projeto de máquinas: uma abordagem integrada*. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

RADE, D. A. *Método dos elementos finitos aplicados à engenharia mecânica*. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2011. Apostila didática do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

RODRIGUES, M. V. B. *Rotina de determinação das solicitações atuantes em uma transmissão de veículo tipo baja*. 2020. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Teresina Central, Teresina, 2020. Orientador: Ricardo Cardoso Soares.

SKF. *Catálogo de rolamentos SKF*. [S.l.]: SKF do Brasil Ltda, 2015. 1342 p. Publicação PUB BU/P1 10000/2 PT.BR. Disponível em: <https://www.skf.com>. Acesso em: 09 jun. 2025.

SOARES, G. A. M. *Análise comparativa entre teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko*. 2023. 56 f. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2023.

SORIANO, H. L.; LIMA, S. D. S. *Método dos elementos finitos em análise de estruturas*. 1. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

SOUZA, A. K. P. de. *Análise de vigas de Timoshenko pelo método dos elementos finitos*. 2019. 42 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

TIMOSHENKO, S. P. On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 41, p. 744–746, 1921.

TORRES, I. F. R. *Efeito da deformação por cortante no cálculo de edifícios de andares múltiplos com núcleos estruturais*. 1999. 144 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999. Disponível em: http://web.set.eesc.usp.br/static/data/producao/1999ME_IvanFranciscoRuizTorres.pdf. Acesso em: 29 dez. 2025.

APENDICE A – ESTRUTURA DO CÓDIGO SCRIPT EM MATLAB

- Função assembly_matrix

```
function [p,P,K_g,F_e] = assembly_matrix(fi,N,n,Ls,diam,E,v,q1,tipo,dist)
%% Informações
% Geometria e Propriedades Mecânicas
% N = número de seções
% Ls = [x1, x2, x3, ...] vetor comprimento de cada seção [mm]
% diam = [y1, y2, y3, ...]vetor diâmetro de cada seçãob[mm]
% E = módulo de elasticidade [N/m²]
% v = coeficiente de poisson
% n = número de elementos

% Vinculação
% cc = [a1, a2, a3, ...] % vetor de tamanho 2*(N+1), representando os graus
% de liberdade das extremidades e uniões entre
% seções. Os valores possíveis são: 0 para o grau
% de liberdade livre; 1 para os graus de liberdade
% restritos(nulos)

% Carregamento
% q1 = [x1, x2, x3, ...];% Vetor carregamento externo para cada seção.
% Carregamento concentrado em [N]; Carregamento
% distribuído em [N/m]
% tipo = [y1, y2, y3, ...];% Tipo de carregamento. Os valores possíveis
% são: '1', para carregamento concentrado;
% '2', para carregamento distribuído.
% dist = [x1,x2,x3,...];% Vetor distância de aplicação da força em cada seção.
% Para carregamento concentrado, será aplicado ao nó
% mais próximo correspondente a distância mencionada.
% Atenção ao mencionar uma distância maior que o
% comprimento da seção. Não se aplica a carregamento
% distribuído, pois ele se aplica a toda a seção.

%% Rotina de cálculos
alfa = (6*(1+v)^2)/(7+12*v+4*v^2); % fator de correção da área cisalhada.
A = (pi*(diam*0.001).^2)/4; % área da seção longitudinal da seção[N]. [m²]
Ac = alfa*A; % área corrigida pelo fator alfa. [m²]
I = (pi*(diam*0.001).^4)/64; % momento de inércia da seção transversal.[m4]
G = E/(2*(1+v)); % módulo de elasticidade longitudinal do material. [N/m²]
EI = E*I;
GAc = G*Ac;
L = Ls*0.001/n; % comprimento do elemento
p = 2*(n+1); % Número de graus de liberdade para n elementos.

for j = 1:N
    if fi == 1
        K_elemento = (EI(j)/L(j))*[0 0 0 0; 0 1 0 -1; 0 0 0 0; 0 -1 0 1] + ...
            (GAc(j)/L(j))*[1 L(j)/2 -1 L(j)/2; ...
                L(j)/2 L(j)^2/3 -L(j)/2 L(j)^2/6; -1 -L(j)/2 1 -L(j)/2; ...
                L(j)/2 L(j)^2/6 -L(j)/2 L(j)^2/3];% Matriz de rigidez do elemento
    end
    if fi == 2
        g = 6*EI(j)/(GAc(j)*(L(j))^2);
```

```

        K_elemento = (EI(j)/(1+2*g))*[12/(L(j)^3) 6/(L(j)^2) -12/(L(j)^3)
6/(L(j)^2); ...
        6/(L(j)^2) 2*(2+g)/L(j) -6/(L(j)^2) 2*(1-g)/L(j); ...
        -12/(L(j)^3) -6/(L(j)^2) 12/(L(j)^3) -6/(L(j)^2); ...
        6/(L(j)^2) 2*(1-g)/L(j) -6/(L(j)^2) 2*(2+g)/L(j)];
    end
    F_seccao = carga_ext(tipo(j),q1(j),Ls(j),n,dist(j));
    for i =1:n
        if i == 1
            K_seccao = zeros(p,p);
            K_seccao(1:4,1:4) = K_elemento;
        end
        if i > 1
            m = 2*(i-1)+1;
            o = m+3;
            K_seccao(m:o,m:o) = K_seccao(m:o,m:o)+K_elemento;
        end
    end

end
P = N*p - 2*(N-1);
if j == 1
    K_g = zeros(P,P);
    K_g(1:p,1:p) = K_seccao;
    F_e = zeros(P,1);
    F_e(1:p,:) = F_seccao;
end
if j > 1
    Pi = j*p - 2*(j-1);
    x = Pi-p+1;
    y = x+p-1;
    K_g(x:y,x:y) = K_g(x:y,x:y) + K_seccao;
    F_e(x:y,:) = F_e(x:y,:) + F_seccao;
end
end
F_e; % vetor carregamentos nodais em cada nó.
K_g; % matriz de rigidez global da estrutura.
p; % numero de nós para n elementos em cada seção.
P; % numero de nós da matriz global.

```

- Função carga_ext

```

function [Ce,N] = carga_ext(tipo,q,Ls,n,dist)

%% Informações
% q = [x1, x2, x3, ...];% Vetor carregamento externo para cada seção.
%                               % Carregamento concentrado em [N]; Carregamento
%                               % distribuído em [N/m]
% tipo = [y1, y2, y3, ...];% Tipo de carregamento. Os valores possíveis
%                               % são: '1', para carregamento concentrado;
%                               % '2', para carregamento distribuído.
% dist = [x1,x2,x3,...];% Vetor distância de aplicação da força em cada seção.
%                               % Para carregamento concentrado, será aplicado ao nó
%                               % mais próximo correspondente a distancia mencionada.
%                               % Atenção ao mencionar uma distância maior que o
%                               % comprimento da seção. Não se aplica a carregamento
%                               % distribuído, pois o mesmo se aplica a toda a seção.
% Ls = [x1, x2, x3, ...] vetor comprimento de cada seção. [mm]
% n = número de elementos.
%% Rotina de Cálculos

```

```

p = 2*(n+1);
Ce = zeros(p,1);
if dist > Ls
    warning('Distância atribuída é maior que o comprimento da seção.')
end
i = 3;
j = 1;
if tipo == 1
    N = Ls/n;
    if dist == 0
        Ce(1,1) = q;
    end
    if dist == Ls
        Ce(p-1,1) = q;
    end
    if dist ~= 0 || dist ~= Ls
        while N < dist
            i = i + 2;
            N = N+(Ls/n);
        end
        Ce(i,1) = q;
    end
end
if tipo == 2
    L = Ls*0.001/n;
    q_elemento = [q*(L/3)+q*(L/6); 0; q*(L/6)+q*(L/3); 0];
    for k = 1:n
        if k == 1
            Ce(1:4,:) = q_elemento;
        end
        if k > 1
            m = 2*(k-1)+1;
            o = m+3;
            Ce(m:o,:) = Ce(m:o,:)+ q_elemento;
        end
    end
end
end
Ce; % vetor carregamentos nodais da estrutura.

```

- Função vínculos

```

function [K,F,id_node] = vinculos(N,p,cc,K_g,F_e)
%% Informações
% N = x1;                número de seções longitudinais.
% p = y1;                número de nós para n elementos em cada seção.
% K_g = [x1 x2 ...;...]; matriz global da estrutura.
% F_e = [y1; y2; y3;...]; vetor global de carregamentos nodais.
% cc = [x1 x2 x3 ...];  vetor de tamanho 2*(N+1), representando os graus
                        % de liberdade das extremidades e uniões entre
                        % seções. Os valores possíveis são: 0 para o grau
                        % de liberdade livre; 1 para os graus de liberdade
                        % restritos(nulos)

%% Rotinas de cálculos
id_nodes = zeros(1,4);
id_node = zeros(1,length(cc));
for i = N:-1:1
    P = i*p - 2*(i-1);
    j = i + (i-1);
    c(1,1:4) = cc(1,j:j+3);

```

```

nodes = [P-p+1 P-p+2 P-1 P];
for k = 1:4
    id_nodes(1,k) = nodes(1,k)*c(1,k);
end
id_node(1,j:j+3) = id_nodes(1,1:4);
end

for x = length(cc):-1:1
    if id_node(1,x) ~= 0
        K_g(id_node(1,x),:) = [];
        K_g(:,id_node(1,x)) = [];
        F_e(id_node(1,x),:) = [];
    end
end
K = K_g; % matriz de rigidez global corrigida.
F = F_e; % vetor corrigido carregamentos global em cada nó.
id_node; % vetor identificador dos GDL com deslocamento pré-escritos.

```

- Função trat_dados

```

function [D,R] = trat_dados(P,id_node,u)
%% Informações
% P = numero de GDL da matriz global.
% id_node = % vetor identificador dos GDL com deslocamento pré-escritos.
% u = deslocamentos nodais obtidos na solução do sistema de equações
% matriciais.
%% Rotinas de cálculos
U = ones(P,1);
for z = 1:length(id_node)
    if id_node(1,z) ~= 0
        U(id_node(z),1) = 0;
    end
end
no_pre = find(U);
U(no_pre,1) = u;
for i = 1:P/2
    d(1) = U(1);
    d(i) = U(i+(i-1));
    r(i) = U(i+i);
end
D = d; % vetor deslocamentos transversais, incluindo os pré-escritos.
R = r; % vetor deslocamentos angulares, incluindo os pré-escritos.

```

- Programa principal

```

clear all
clc
close all
format long
%% MEF em vigas - Programa genérico para solução de viga de Timochenko
%% carregamento concentrado ou distribuído na seção

%% =====PRÉ-PROCESSAMENTO=====

% Geometria e Propriedades Mecânicas

N = 5; % número de seções.
Ls = [150 23.5 14.4 32.3 7.5]; % vetor comprimento de cada seção. [mm]

```



```

diam = [19 25 25 23 20]; % vetor diâmetro de cada seção. [mm]
E = 205e09; % módulo de elasticidade. [N/m²]
v = 0.3; % coeficiente de poisson.
n = 50; % número de elementos.
% VINCULAÇÃO
cc = [0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0]; % vetor de tamanho 2*(N+1). [0] para os graus de
%liberdade livres; [1] para os graus de liberdade com restrição.
% CARREGAMENTOS
tipo = [1 2 2 1 2]; % [1] para concentrado. [N]; [2] para distribuído. [N.m]
q1 = [-1070.95 0 0 1242.5 0]; % vetor carregamento. [N] para tipo: 1; [N.m] para
tipo 2.
dist = [102 0 0 12.5 0]; % distância de aplicação da força. [mm]
fi = 2;

%% =====PROCESSAMENTO=====

% MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR FORÇAS NODAIS EXTERNAS
[p,P,K_g,F_e] = assembly_matrix(fi,N,n,Ls,diam,E,v,q1,tipo,dist);

% ATRIBUIÇÃO DE DESLOCAMENTOS PRÉ-ESCRITOS (CONDIÇÕES DE CONTORNO)
[K,F,id_node] = vinculos(N,p,cc,K_g,F_e);

% RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES
u = K^-1*F;

% VETORES DESLOCAMENTOS E ROTAÇÃO
[d,c] = trat_dados(P,id_node,u);

%% =====PÓS-PROCESAMENTO=====
Deslocamentos = d'; % Deslocamentos [m]
Rota = c'; % Rotações [rad]

L = zeros(N*n+1,1);
for i = 1:N*n+1
    L(i) = L(i)+i;
end

num_elem = N*n;
vetor = zeros(N,1);
comp = zeros(N*n,1);
total_seccao = zeros(num_elem,1);

for i = 1:N
    elem = Ls(i)/n;
    vetor(i,1) = elem;
    if i == 1
        total_seccao(1:n,:) = vetor(i);
    end
    if i > 1
        b = i-1;
        total_seccao(b*n+1:i*n,:) = elem;
    end
end

for j = 1:num_elem
    if j == 1
        comp(j,1) = comp(j,1)+total_seccao(j);
    end
end

```

```

    end
    if j > 1
        comp(j,1) = comp(j-1,1)+total_seccao(j);
    end
end

vetor_comp = [0 comp'];
comp_viga = vetor_comp';

Resultado = table(L,vetor_comp',Deslocamentos*1000,Rota)

```

```

t = tiledlayout(2,1);
title(t,"LINHA ELÁSTICA")

```

```

nexttile
plot(vetor_comp,d'*1000)
title("Deflexão linear")
ylabel('Flexão[mm]')
grid on
nexttile
plot(vetor_comp,c)
title("Inclinação")
ylabel('rotação[rad]')
grid on
%

```

FIM

```

%% EIXO DE ENTRADA CAIXA DE REDUÇÃO
%% Pré-Processamento
% Geometria e Propriedades Mecânicas
N = 5; % número de seções.
Ls = [150 23.5 14.4 32.3 7.5]; % vetor comprimento de cada seção. [mm]
diam = [19 25 25 23 20]; % vetor diâmetro de cada seção. [mm]
E = 205e09; % módulo de elasticidade. [N/m²]
v = 0.3; % coeficiente de poisson.
n = 20; % número de elementos.
% VINCULAÇÃO
cc = [0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0]; % vetor de tamanho 2*(N+1). [0] para os graus de
%liberdade livres; [1] para os graus de liberdade com restrição.
% CARREGAMENTOS
tipo = [1 2 2 1 2]; % [1] para concentrado. [N]; [2] para distribuído. [N.m]
q1 = [-1070.95 0 0 -1242.5 0]; % vetor carregamento. [N] para tipo: 1; [N.m] para
tipo 2.
dist = [102 0 0 12.5 0]; % distância de aplicação da força. [mm]
fi = 2;

```

```

%% EIXO INTERMEDIÁRIO CAIXA DE REDUÇÃO

```

```

%% MEF em vigas - Programa genérico para solução de viga de timochenko
%% carregamento concentrado ou distribuído na seção
%% Premissas
% material homogêneo;
% regime linear;
% pequenos deslocamentos;6
% Viga prismática;
% tan(teta) = teta.

```

```

%% Pré-Processamento
% Geometria e Propriedades Mecânicas
N = 4; % número de seções.
Ls = [8.5 30.9 41.60 8.5]; % vetor comprimento de cada seção. [mm]
diam = [20 25 25 20]; % vetor diâmetro de cada seção. [mm]
E = 205e09; % módulo de elasticidade. [N/m²]
v = 0.3; % coeficiente de poisson.
n = 20; % número de elementos.
% VINCULAÇÃO
cc = [1 0 0 0 0 0 0 0 1 0]; % vetor de tamanho 2*(N+1). [0] para os graus de
%liberdade livres; [1] para os graus de liberdade com restrição.
% CARREGAMENTOS
tipo = [2 1 1 2]; % [1] para concentrado. [N]; [2] para distribuído. [N.m]
q1 = [0 -1242.5 3288.9 0]; % vetor carregamento. [N] para tipo: 1; [N.m] para tipo
2.
dist = [0 30.9/2 41.60/2 0]; % distância de aplicação da força. [mm]
fi = 2;

```

APENDICE B – DIMENSÕES DOS EIXOS

Tabela B.1 - Valores das dimensões do eixo de entrada para inserção no programa.

Seção	Comprimento seção	Diâmetro da seção
D_1	150	19
D_2	23,5	25
D_3	14,4	25
D_4	32,3	23
D_5	7,5	20

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela B.2 - Valores das dimensões do eixo de intermediário para inserção no programa.

Seção	Comprimento seção	Diâmetro da seção
D_8	8,5	20
D_9	30,9	25
D_{10}	41,6	25
D_{11}	8,5	20

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela B.3 - Valores das dimensões do eixo de saída para inserção no programa.

Seção	Comprimento seção	Diâmetro da seção
D_1	150	19
D_2	23,5	25
D_3	14,4	25
D_4	32,3	23

Fonte: elaborado pelo autor.