



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ**  
**CAMPUS PICOS**  
**LICENCIATURA EM FÍSICA**

**AIZZON CAUÃ FERREIRA FAGUNDES**

**A DINÂMICA CLÁSSICA DE UMA PARTÍCULA MASSIVA EM CIRCUITOS  
FECHADOS NOS FORMATOS CIRCULAR E ELÍPTICO SUJEITA À FORÇA DE  
ATRITO**

**PICOS, PIAUÍ**  
**2026**

AIZZON CAUÃ FERREIRA FAGUNDES

A DINÂMICA CLÁSSICA DE UMA PARTÍCULA MASSIVA EM CIRCUITOS  
FECHADOS NOS FORMATOS CIRCULAR E ELÍPTICO SUJEITA À FORÇA DE  
ATRITO

Projeto do Trabalho de Conclusão de Curso apresentado, como requisito parcial, para a aprovação na disciplina de TCC-2. Curso de Licenciatura em Física, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Picos.

**Orientador:** Prof. Dr. Jeferson Dias Gonçalves

PICOS, PIAUÍ  
2026

### **Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD**

---

Fagundes, Aizzon Cauã Ferreira

F151d      A dinâmica clássica de uma partícula massiva em circuitos fechados nos formatos circular e elíptico sujeita à força de atrito / Aizzon Cauã Ferreira Fagundes. - 2026.  
81 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Picos, 2026.  
Orientador : Prof Dr. Jeferson Dias Gonçalves.

1. Dinâmica da partícula massiva. 2. Trajetórias em circuitos fechados. 3. Força de atrito cinético. 4. Circuitos elípticos com excentricidade variável..  
I. Título.

CDD - 530

---

**Elaborado por Silvio de Carvalho Gomes Coutinho CRB 3/1362**

AIZZON CAUÃ FERREIRA FAGUNDES

A DINÂMICA CLÁSSICA DE UMA PARTÍCULA MASSIVA EM CIRCUITOS  
FECHADOS NOS FORMATOS CIRCULAR E ELÍPTICO SUJEITA À FORÇA DE  
ATRITO

Projeto do Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado, como requisito parcial, para a  
aprovação na disciplina de TCC-2. Curso  
de Licenciatura em Física, Instituto Federal  
de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí,  
Campus Picos.

Aprovada em 09 de Março de 2026.

BANCA EXAMINADORA:

---

**Prof. Dr. Jeferson Dias Gonçalves(Orientador)**  
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

---

**Prof. Me. Pedro José Feitosa Alves Junior**  
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

---

**Prof. Dr. Augusto Plácido Cavalcante Melo de Lima**  
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

PICOS, PIAUÍ  
2026

Dedico este trabalho aos meus pais, Edson Fagundes e Roseany Ferreira, que sempre entenderam o valor da educação e fizeram dela o maior presente que poderiam me dar.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, ao meu orientador, Prof. Dr. Jeferson Dias Gonçalves, pela orientação rigorosa e cuidadosa, pelas discussões esclarecedoras que moldaram minha forma de pensar a Física, e pela confiança depositada em mim ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho. Sua dedicação e exigência foram determinantes para que este projeto alcançasse a profundidade que alcançou.

Aos professores que marcaram minha trajetória acadêmica, registro minha gratidão especial ao Prof. Brendon Sebastião, que me apresentou formalmente à Física e me mostrou que essa ciência é, antes de tudo, uma maneira de enxergar o mundo com mais clareza. Ao meu grande amigo Ítalo Lima, cuja presença foi incentivo constante e cuja amizade transcendeu os limites da sala de aula: se não fosse por vocês, eu provavelmente teria perdido a melhor parte da minha vida.

Ao Prof. Pedro José Feitosa Alves Junior, registro um agradecimento especial. Sua disposição em ajudar foi irrestrita e genuína — não por obrigação, mas por um compromisso verdadeiro com o crescimento de quem está ao seu redor. Mais do que um professor, foi uma presença que fez diferença concreta na minha trajetória.

Aos meus pais, por tudo que não cabe em palavras. Pela renúncia silenciosa, pelo apoio incondicional e por nunca terem duvidado de que eu chegaria até aqui. Ao meu irmão e às minhas irmãs, pelo companheirismo e pela leveza que souberam trazer nos momentos certos. À minha namorada, pela paciência inesgotável, pelo afeto e por ter sido, tantas vezes, o equilíbrio que eu precisava para continuar.

Aos colegas de graduação e membros do grupo SPIN, pelas discussões produtivas — bem como pelas deliberadamente improdutivas — e pelo companheirismo ao longo dessa jornada. A Física é mais bonita quando compartilhada, e vocês me lembraram disso repetidas vezes.

Por fim, agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Picos, por ter sido o espaço onde tudo isso foi possível.

*“O poder da educação em geral é pouco eficaz,  
exceto nas felizes ocasiões em que ele é quase supérfluo.”*

Edward Gibbon

## RESUMO

Este trabalho investiga a dinâmica do movimento de uma partícula massiva ao longo de circuitos fechados (*Loop*) nos formatos circulares e elípticos, considerando tanto o regime conservativo quanto o regime dissipativo que modela a presença de forças de atrito cinético. O objetivo central é compreender como a geometria do circuito e as forças de dissipação influenciam nas condições necessárias para que a partícula complete o percurso sem perder o contato com a pista. Além disso, objetivamos explorar o potencial didático desse sistema físico no ensino de Mecânica, através da elaboração de uma sequência didática a nível de graduação, nos valendo do referencial educacional desenvolvido por Jerome Bruner. A metodologia baseia-se na aplicação sistemática das leis de Newton e das equações generalizadas de balanço energético. De fato, veremos que somos conduzidos à formulação de *equações integrais do tipo Volterra de segunda espécie* para a velocidade da partícula ao longo do circuito. No caso do circuito em formato circular com coeficiente de atrito constante, o formalismo nos permite obter soluções analíticas fechadas para a velocidade como função do ângulo  $\phi$ . Isso nos possibilita a determinação explícita das condições de velocidade inicial mínima e dos domínios de validade associados à manutenção do contato e à continuidade do movimento da partícula no circuito. Para os circuitos em formato elíptico, tanto na orientação horizontal quanto na vertical, adotamos uma parametrização que preserva o comprimento total da trajetória percorrida. Para tanto, recorreremos à aproximação de Ramanujan para o perímetro da elipse, o que assegura uma comparação física consistente entre as diferentes geometrias estudadas. Neste contexto, a equação integral resultante não admite solução analítica simples, exigindo uma abordagem numérica para a análise do comportamento dinâmico da partícula. Em síntese, o problema da dinâmica de uma partícula em circuitos fechados, quando estendido a geometrias não circulares e à presença de atrito, revela uma rica estrutura física e matemática. Tal estrutura oferece uma classe de sistemas físicos em que é possível estudar conceitos dinâmicos — tais como energia, velocidade e forças dissipativas — ao mesmo tempo em que se faz uso de ferramentas mais avançadas, como equações integrais e elementos de geometria diferencial. Além de constituir um instrumento pedagógico eficaz para o ensino progressivo de Mecânica em níveis de graduação introdutórios e intermediários.

**Palavras-chave:** Dinâmica da partícula massiva; Trajetórias em circuitos fechados; Força de atrito cinético; Circuitos elípticos com excentricidade variável.

## ABSTRACT

This work investigates the dynamics of a massive particle moving along closed circuits (*Loops*) in circular and elliptical geometries, considering both the conservative regime and the dissipative regime that models the presence of kinetic friction forces. The central objective is to understand how the geometry of the track and dissipative forces influence the conditions required for the particle to complete the trajectory without losing contact with the surface. In addition, we aim to explore the didactic potential of this physical system in the teaching of Mechanics, through the development of a didactic sequence at the undergraduate level, grounded in the educational framework proposed by Jerome Bruner. The methodology is based on the systematic application of Newton's laws and generalized energy balance equations. In fact, we show that this approach leads naturally to the formulation of Volterra integral equations of the second kind for the particle's velocity along the track. In the case of a circular circuit with a constant coefficient of friction, the formalism allows us to obtain closed-form analytical solutions for the velocity as a function of the angle  $\phi$ . This, in turn, enables the explicit determination of the minimum initial velocity conditions, as well as the domains of validity associated with the maintenance of contact and the continuity of the particle's motion along the track. For elliptical circuits, in both horizontal and vertical orientations, we adopt a parametrization that preserves the total length of the trajectory. In this case, we employ Ramanujan's approximation for the perimeter of the ellipse, thereby ensuring a physically consistent comparison among the different geometries under consideration. Within this context, the resulting integral equation does not admit a simple analytical solution, requiring a numerical approach to analyze the dynamical behavior of the particle. In summary, the problem of a particle's dynamics in closed circuits, when extended to non-circular geometries and the presence of friction, reveals a rich physical and mathematical structure. It provides a class of physical systems in which fundamental dynamical concepts—such as energy, velocity, and dissipative forces—can be studied while simultaneously employing more advanced tools, such as integral equations and elements of differential geometry. Moreover, it constitutes an effective pedagogical instrument for the progressive teaching of Mechanics at introductory and intermediate undergraduate levels.

**Keywords:** Dynamics of a massive particle; Trajectories in closed circuits; Kinetic friction force; Elliptical circuits with variable eccentricity.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|                                                                                                                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Simulação do movimento em um <i>loop</i> circular. . . . .                                                                                                 | 26 |
| Figura 2 – Simulação do movimento em um <i>loop</i> elíptico horizontal. . . . .                                                                                      | 27 |
| Figura 3 – Simulação do movimento em um <i>loop</i> elíptico vertical. . . . .                                                                                        | 27 |
| Figura 4 – Looping Circular e os Pontos Característicos da Trajetória. . . . .                                                                                        | 28 |
| Figura 5 – Looping Circular com Atrito . . . . .                                                                                                                      | 30 |
| Figura 6 – Looping Elíptico na Orientação Horizontal (H). . . . .                                                                                                     | 38 |
| Figura 7 – Looping Elíptico na Orientação Vertical (V). . . . .                                                                                                       | 39 |
| Figura 8 – Looping Elíptico Horizontal Com Atrito . . . . .                                                                                                           | 42 |
| Figura 9 – Looping Elíptico Vertical Com Atrito . . . . .                                                                                                             | 53 |
| Figura 10 – Diagrama de fases delimitando quatro regiões no plano $(\mu, V_0)$ , correspondentes a distintos regimes dinâmicos da partícula no loop circular. . . . . | 57 |
| Figura 11 – Superfícies críticas $V_0(\mu, \varepsilon)$ para as três condições de falha no loop elíptico horizontal com atrito. . . . .                              | 59 |
| Figura 12 – Superfícies críticas $V_0(\mu, \varepsilon)$ para as três condições de falha no loop elíptico vertical com atrito. . . . .                                | 60 |

## SUMÁRIO

|          |                                                                                          |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                                        | <b>12</b> |
| 1.1      | Motivações                                                                               | 12        |
| 1.2      | Objetivo Geral                                                                           | 16        |
| 1.3      | Objetivos específicos                                                                    | 16        |
| <b>2</b> | <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>                                                             | <b>17</b> |
| 2.1      | O Aporte Pedagógico: a Teoria de Jerome Bruner                                           | 17        |
| 2.1.1    | O Ensino como Estímulo ao Desenvolvimento Intelectual                                    | 17        |
| 2.1.2    | O Currículo em Espiral Aplicado à Dinâmica de uma Partícula em um Loop                   | 17        |
| 2.1.3    | Os Modos de Representação e as Ferramentas de Aprendizagem                               | 18        |
| 2.2      | Rudimentos de Mecânica Newtoniana                                                        | 19        |
| 2.2.1    | A Dinâmica de uma Partícula em Movimento Circular                                        | 19        |
| 2.2.2    | Elementos Sobre a Força de atrito                                                        | 21        |
| 2.2.3    | O Princípio de Conservação da Energia Mecânica                                           | 23        |
| 2.3      | A Análise Evolutiva da Dinâmica de Partículas em Loopings com Diferentes Excentricidades | 25        |
| 2.3.1    | A Representação Ativa e Icônica na Exploração do Looping                                 | 26        |
| 2.3.2    | A Dinâmica da Partícula em um Loop Circular sem Atrito                                   | 27        |
| 2.3.3    | A Dinâmica da Partícula em um Loop Circular com Atrito                                   | 30        |
| 2.3.4    | A Dinâmica da Partícula em um Loop Elíptico sem Atrito                                   | 37        |
| 2.3.5    | A Dinâmica da Partícula em um Loop Elíptico com Atrito                                   | 41        |
| 2.3.5.1  | A Dinâmica da Partícula em um Loop Elíptico Horizontal com Atrito                        | 41        |
| 2.3.5.2  | A Dinâmica da Partícula em um Loop Elíptico Vertical com Atrito                          | 52        |
| <b>3</b> | <b>ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS</b>                                                | <b>57</b> |
| 3.1      | A Análise do Loop Circular com Atrito                                                    | 57        |
| 3.2      | A Análise do Loop Elíptico com Atrito                                                    | 58        |
| 3.2.1    | Síntese Comparativa dos Quatro Cenários                                                  | 60        |
| 3.2.2    | A Sequência Didática Proposta                                                            | 61        |
| <b>4</b> | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>                                                              | <b>64</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b>                                                                       | <b>66</b> |

|                                                                                                                                         |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ANEXO A – IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DAS CURVAS-LIMITE<br/>PARA AS TRÊS CONDIÇÕES CRÍTICAS NO CASO<br/>CIRCULAR COM ATRITO . . . . .</b> | <b>68</b> |
| <b>ANEXO B – SUPERFÍCIES <math>V_0(\mu, \varepsilon)</math> — LOOP ELÍPTICO HORIZON-<br/>TAL COM ATRITO . . . . .</b>                   | <b>71</b> |
| <b>ANEXO C – SUPERFÍCIES <math>V_0(\mu, \varepsilon)</math> — LOOP ELÍPTICO VERTICAL<br/>COM ATRITO . . . . .</b>                       | <b>75</b> |
| <b>ANEXO D – CONDIÇÕES DE CONTATO E O PONTO CRÍTICO <math>\phi = \pi</math></b>                                                         | <b>79</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÕES

A compreensão do movimento na história da ciência nem sempre foi pautada por trajetórias geométricas e forças dinâmicas. Historicamente, as primeiras tentativas de sistematização da modelagem do mundo físico remontam à Antiguidade Clássica. Para Aristóteles (384-322 a.C.), o movimento é explicado pelo fato de que o mundo é constituído por cinco elementos: terra, água, ar, fogo e éter; em ordem decrescente de densidade. Nesse sentido, o movimento dos corpos decorria da tendência intrínseca dos quatro elementos retornarem ao seu *lugar natural* no cosmos. Esse comportamento resultaria, portanto, da natureza própria de cada elemento, e não da ação de uma força externa [1].

Dessa maneira, a compreensão do movimento em trajetórias curvas não foi imediata na história da Ciência: era necessário um método com regras claras e um tratamento matemático adequado, o que exigiu uma ruptura com a física aristotélica. Dois nomes se destacam como pilares da teoria que hoje aplicamos para a modelagem do movimento de partículas em trajetórias curvas: Christiaan Huygens (1629-1695) e Isaac Newton (1643-1727).

Antes mesmo da publicação do *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687) de Newton, Huygens realizou estudos fundamentais sobre o movimento circular e oscilatório. Em sua obra *Horologium Oscillatorium* (1673), ele foi o primeiro a publicar formalmente a relação para a aceleração centrípeta [2, 3].

Isaac Newton sistematizou esse conceito ao fornecer uma fundamentação dinâmica unificada para o movimento em trajetórias curvas, da qual um exemplo é a dinâmica de partículas descritas pela Lei da Gravitação Universal. De fato, Newton demonstrou que as leis empíricas de Johannes Kepler decorrem da aplicação de sua segunda lei a um corpo submetido a uma força central atrativa, inversamente proporcional ao quadrado da distância. [4]

A consolidação desse arcabouço teórico, denominado *Mecânica Clássica*<sup>1</sup>, embora tenha representado um avanço decisivo na compreensão do movimento, não se traduziu de forma imediata em uma assimilação intuitiva de seus princípios fundamentais. A mecânica newtoniana, ao se apoiar em idealizações e princípios reducionistas, rompe com as interpretações espontâneas construídas a partir da experiência cotidiana. Dessa forma, o mesmo formalismo que possibilitou a generalização e unificação dos *fenômenos mecânicos*<sup>2</sup> introduziu, no âmbito do ensino e da aprendizagem, uma

<sup>1</sup> Também denominada Mecânica newtoniana ou Mecânica de Newton.

<sup>2</sup> Ou seja, todos aqueles que envolvem o movimento de um, ou mais, corpos.

tensão entre o modelo matemático abstrato, que sustenta a Mecânica Clássica, e a percepção empírica do movimento.

Desde a infância, os estudantes observam que, para manter um objeto em movimento, é necessário aplicar continuamente uma força, a qual é uma percepção puramente aristotélica. Quando a *Primeira Lei de Newton* estabelece que um corpo pode permanecer em movimento retilíneo uniforme (M.R.U) sem a necessidade de uma força resultante<sup>3</sup> exige-se uma abstração profunda, por exemplo, a capacidade de imaginar um ambiente desprovido de atrito e resistência do ar. Essa desconexão entre o mundo sensível e o modelo teórico pode criar uma barreira cognitiva onde as fórmulas passam a ser decoradas como abstrações vazias, em vez de descrições da realidade [5].

Além da barreira conceitual, a transição da linguagem descritiva do movimento para a linguagem matemática impõe um desafio adicional. A Mecânica Clássica não se limita à descrição qualitativa; ela exige o domínio da Álgebra e do Cálculo Vetoriais, do Cálculo Diferencial e Integral, e da Geometria Analítica para descrever grandezas que não são diretamente visíveis, como a aceleração instantânea ou o trabalho realizado por uma força variável.

No estudo de trajetórias curvas, como em um *loop*, o estudante precisa, por exemplo, compreender que a *força normal* e a *força gravitacional* se combinam para atuar como uma resultante centrípeta, um conceito que exige uma transição nem sempre imediata da intuição física para o formalismo simbólico. Sem uma forte base conceitual, resultante de uma exposição pedagógica adequada, que conecte esses símbolos à realidade física, o estudante perde-se na manipulação algébrica.

Por fim, a abstração torna-se ainda mais complexa quando inserimos elementos dissipativos, como o atrito, que evoca uma matemática mais avançada. Essa dificuldade torna-se ainda mais acentuada no estudo de geometrias menos frequentes na literatura básica, tais como a da elipse. Enquanto o círculo possui um raio de curvatura constante, a elipse exige que o estudante compreenda que a dinâmica de uma partícula em movimento elíptico muda a cada ponto da trajetória.

É nesse cenário que a *Teoria de Aprendizagem de Bruner* se torna essencial: se o estudante for exposto diretamente ao *nível simbólico* (as equações diferenciais do movimento) sem passar pelas representações *icônica* ou *ativa* (experimentos ou visualizações), a física torna-se um conjunto de regras abstratas. A dificuldade, portanto, não está na matemática em si, mas na falta de pontes que permitam ao estudante transitar entre o Universo físico real e a modelagem teórica deste Universo.

O ensino de Mecânica Clássica, embora imprescindível para a formação científica, frequentemente é o primeiro exemplo do distanciamento entre modelos ideais e fenômenos reais. O movimento de um corpo em um *loop*, amplamente presente em

<sup>3</sup> Isto é, a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre o corpo em estudo.

contextos lúdicos, tais como parques de diversão, oferece uma oportunidade pedagógica ímpar para a exploração de conceitos como conservação de energia e a análise dinâmica das forças.

Diante do desafio de transpor a barreira da abstração na Mecânica Clássica, este trabalho propõe uma abordagem fundamentada na teoria educacional de Jerome Bruner<sup>4</sup>. Ao adotar o conceito de *currículo em espiral*, a análise do movimento em *loops* deixa de ser um exercício acadêmico puramente algébrico para tornar-se uma ferramenta pedagógica de crescente complexidade.

Essa progressão, baseada no trabalho de [6], estrutura-se em três níveis de complexidade crescente — detalhados na Seção 2.1.3 — e não visa apenas a resolução de equações, mas a construção de uma sequência didática que respeite a transição entre a intuição física e o formalismo simbólico. Dessa forma, os objetivos a seguir buscam consolidar essa proposta, integrando o rigor da modelagem físico-matemática à intencionalidade pedagógica necessária para um Ensino de Ciências que priorize a descoberta e uma compreensão mais profunda.

Nesta etapa inicial do projeto, a perspectiva central reside na construção de uma base teórica robusta. O problema de uma partícula movendo-se em um *loop* constitui um exemplo clássico e, por isso mesmo, recorrente nos livros didáticos de Física, tanto no Ensino Médio (EM) quanto nos cursos introdutórios de Física no Ensino Superior (ES). Ele aparece, em geral, associado ao estudo do movimento circular, da força centrípeta e das leis de Newton, sendo frequentemente formulado como um problema de minimização (isto é, determinação da altura ou da velocidade mínima necessária para que uma partícula complete a trajetória sem perder o contato com a superfície do *loop*). Essa formulação tornou-se canônica por permitir a integração clara entre grandezas físicas vetoriais (pertencentes à mecânica newtoniana) e escalares (presentes no formalismo energético), além de apresentar forte apelo intuitivo e visual.

Em obras amplamente utilizadas no Ensino Superior, como [7, 8], o movimento de uma partícula em um *loop* é empregado como um problema protótipo para discutir forças de vínculo, condições de contato e da aplicação da *Segunda Lei de Newton* em trajetórias curvas. Embora as abordagens nas referências [7, 8] variem em grau de formalismo, o cenário físico é o mesmo: um *loop* circular sem atrito, analisado em regime clássico.

No Ensino Médio, e.g. nas obras [9, 10], esse problema também é largamente difundido, aparecendo em um amplo espectro de material didático e exames de seleção muitas vezes contextualizado em situações cotidianas, como carrinhos de montanha-russa. Nessa etapa, esse problema tem papel estritamente pedagógico, funcionando como um exemplo integrador entre trabalho, energia e movimento circular. Assim,

<sup>4</sup> Jerome Seymour Bruner, professor de psicologia em Harvard e Oxford, publicou relevantes trabalhos em Educação e liderou o movimento denominado *Revolução Cognitiva* na década de 1960.

sua presença constante ao longo da formação em Física consolida o problema como um modelo didático fundamental, a partir do qual extensões mais sofisticadas — como a inclusão de atrito ou a generalização geométrica da trajetória — podem ser naturalmente desenvolvidas em níveis mais avançados.

A transição entre o modelo circular ideal conservativo e o elíptico dissipativo não é vista apenas como um desafio matemático, mas como uma oportunidade de investigar como variáveis frequentemente negligenciadas no Ensino Médio e até mesmo no Ensino Superior — como o raio de curvatura variável e o coeficiente de atrito cinético — alteram fundamentalmente as condições necessárias para a partícula completar a trajetória em *loop*.

A continuidade deste estudo prevê a aplicação de ferramentas de cálculo numérico para solucionar as equações diferenciais que regem as versões mais complexas desse sistema. Dado que trajetórias elípticas e sistemas contendo forças dissipativas raramente admitem soluções analíticas fechadas, a perspectiva é utilizar métodos de aproximação, em particular a integração pelo método do trapézio, aplicado diretamente às equações integrais de Volterra resultantes. Essa abordagem permitirá não apenas a obtenção de resultados quantitativos, mas também, em trabalhos futuros, a criação de simulações que possam servir como *recursos icônicos* dentro da proposta de Bruner, permitindo que o estudante visualize o impacto das variações de cada parâmetro na trajetória do objeto em movimento.

Esta monografia destina-se, primordialmente, a estudantes e pesquisadores dos cursos de graduação em Física, bem como das diversas modalidades de Engenharia e áreas das Ciências Exatas. A relevância deste estudo para esse público reside na necessidade constante de materiais didáticos que equilibrem o rigor do formalismo matemático com estratégias de ensino que facilitem a transição entre modelos teóricos ideais e sistemas físicos complexos. Ao abordar temas como o atrito e a geometria elíptica por meio de métodos numéricos, o trabalho oferece um recurso que dialoga diretamente com as disciplinas de: Mecânica Clássica; Cálculo Diferencial, Integral e Numérico; e Física Geral presentes nas grades curriculares desses cursos.

Além dos discentes, o conteúdo aqui desenvolvido visa servir como material de apoio para docentes que buscam implementar metodologias ativas e o conceito de aprendizagem por descoberta em suas aulas. Para o estudante de engenharia, a modelagem de partículas em *loops* não conservativos fornece uma visão aplicada de dinâmica não trivial, enquanto para o estudante de física, juntamente com a fundamentação em Bruner, oferece uma reflexão crítica sobre o próprio fazer científico e a transposição didática de conceitos abstratos buscando gerar uma *aprendizagem significativa* [5].

Por fim, este trabalho almeja a elaboração de uma síntese comparativa entre os quatro cenários propostos: *loops* circulares e elípticos, com e sem a presença de

atrito. A expectativa é que, ao final deste processo, seja possível propor uma sequência didática que possa ser replicada em ambientes de Ensino Superior ou técnico.

## 1.2 OBJETIVO GERAL

Realizar um estudo analítico e numérico, sistemático e pedagogicamente orientado sobre a dinâmica do movimento de uma partícula em trajetórias do tipo *loop* circular e elíptico, contemplando tanto sistemas conservativos quanto sistemas dissipativos, pela inclusão do atrito cinético. Pretende-se, com isso, desenvolver um tratamento teórico que una enfoque matemático e interpretação física, organizando a progressão dos níveis de complexidade à luz da Teoria de Aprendizagem de Jerome Bruner. Dessa forma, busca-se não apenas aprofundar a compreensão dos fenômenos e conceitos dinâmicos envolvidos, mas também estruturar uma proposta didática que favoreça a *aprendizagem significativa* [5] de estudantes de graduação em Física e áreas correlatas, articulando intuição física, modelagem matemática e formalização conceitual de maneira gradual e coerente.

## 1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar os princípios da Teoria de Bruner, com ênfase no conceito de currículo em espiral e nos três modos de representação (ativo, icônico e simbólico), para estruturar a sequência didática do trabalho.
- Deduzir as equações de movimento e para o *loop* circular em condições ideais, estabelecendo a velocidade mínima crítica no ponto superior.
- Desenvolver a modelagem matemática para a partícula em um *loop* circular com atrito, transformando a *Equação Integral de Volterra* resultante em uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de 1ª ordem para obter sua solução analítica.
- Analisar o movimento da partícula em trajetórias elípticas, incorporando a variação do raio de curvatura, através da parametrização geométrica necessária para descrever a dinâmica de forças no caso elíptico com atrito.
- Estabelecer e fazer uso das três condições fundamentais (velocidade da partícula no primeiro quarto<sup>5</sup>, contato da partícula no topo da pista e velocidade final da partícula) que garantem o movimento completo pelo circuito em ambas as geometrias.
- Simular essas dinâmicas, fazendo uso da plataforma PhET Colorado, para viabilizar as representações ativa e icônica do fenômeno, enquanto a monografia fornece o detalhamento dos cálculos levando à representação simbólica.

---

<sup>5</sup> Ou primeiro quadrante.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo destina-se a apresentar o embasamento teórico-metodológico que fundamentará a presente pesquisa, articulando os domínios da psicologia da aprendizagem com o formalismo da mecânica clássica. Inicialmente, será exposto o suporte pedagógico e didático do trabalho, pautado na teoria de Jerome Bruner, que orienta a estruturação dos conteúdos e a progressão do conhecimento aqui propostos.

Subsequentemente, procederemos à descrição e análise técnica dos sistemas físicos a serem trabalhados. Essa fundamentação visa estabelecer as bases necessárias para a modelagem matemática e as futuras simulações numéricas que caracterizam o núcleo analítico deste estudo.

### 2.1 O APORTE PEDAGÓGICO: A TEORIA DE JEROME BRUNER

A construção de um saber científico sólido exige que a transição entre o senso comum e a modelagem cientificamente aceita seja mediada por uma estratégia pedagógica clara. Neste trabalho, a análise dinâmica de partículas em *loops* é estruturada sob a luz da teoria de Jerome Bruner, cujo foco reside no desenvolvimento intelectual do aprendiz por meio da descoberta e da organização estrutural do conhecimento.

#### 2.1.1 O Ensino como Estímulo ao Desenvolvimento Intelectual

De acordo com Jerome Bruner, o ensino não se reduz à mera transmissão de informações, mas constitui um esforço sistemático voltado a auxiliar e orientar o desenvolvimento intelectual do aprendiz. Nessa perspectiva, parte-se da premissa de que qualquer conteúdo pode ser ensinado de maneira intelectualmente honesta a qualquer estudante, desde que se respeite seu estágio de desenvolvimento cognitivo e se adotem modos de representação adequados à sua compreensão.

Bruner inicialmente enfatizou que o aspecto verdadeiramente central de uma área do conhecimento reside em sua organização interna, isto é, na rede de conceitos e princípios que lhe confere coerência e poder explicativo. Ao privilegiar essa estrutura disciplinar, o processo de ensino-aprendizagem favorece a compreensão conceitual em detrimento de procedimentos meramente algorítmicos [11].

#### 2.1.2 O Currículo em Espiral Aplicado à Dinâmica de uma Partícula em um Loop

A opção por apresentar inicialmente o problema do *looping* circular sem atrito, seguido do caso circular com atrito e, por fim, do *looping* elíptico com atrito, fundamenta-se no conceito de *Currículo em espiral*. Segundo essa concepção, a *aprendizagem*

*significativa* ocorre quando o estudante revisita um mesmo tópico ao longo do tempo, em níveis progressivamente mais profundos e complexos.

No contexto desta monografia, a espiral se desenvolve em três níveis distintos:

Nível Inicial: o estudo do *looping* circular sem atrito possibilita ao estudante concentrar-se na estrutura fundamental do problema, explorando as regularidades associadas à conservação da energia mecânica.

Nível Intermediário: a introdução do atrito exige a mobilização dos conhecimentos previamente adquiridos para lidar com uma variável adicional de maior complexidade, cuja compreensão seria mais onerosa sem a prévia análise do caso idealizado.

Nível Avançado: o estudo do *looping* elíptico com atrito representa a aplicação dos mesmos princípios fundamentais a uma geometria mais sofisticada, demandando um grau elevado de abstração e formalização matemática.

Essa sequência reflete a própria estrutura da Física como disciplina científica, enfatizando ideias fundamentais como as Leis de Newton e o princípio da Conservação da Energia em detrimento da memorização fragmentada de fórmulas isoladas.

### 2.1.3 Os Modos de Representação e as Ferramentas de Aprendizagem

A eficácia da sequência didática proposta para este trabalho reside na transição harmônica entre os três modos de representação de Bruner: o ativo, o icônico e o simbólico. Para materializar esses estágios e garantir que o ensino seja "intelectualmente honesto", este projeto prevê o uso de ferramentas específicas que auxiliam o desenvolvimento intelectual do aprendiz.

No estágio inicial, a representação ativa ou enativa será viabilizada por meio da plataforma *PhET Interactive Simulations* (Universidade do Colorado) [12]. Esta ferramenta permite que o estudante interaja diretamente com o fenômeno físico em um ambiente virtual, manipulando variáveis como altura de lançamento, massa e coeficientes de atrito. Essa manipulação ativa é fundamental para que o estudante sinta a relação de causa e efeito na análise dinâmica da partícula no *loop*, promovendo a aprendizagem por descoberta em vez da mera recepção passiva de informações.

Simultaneamente, o simulador PhET servirá, também, de suporte para a representação icônica, ao fornecer visualizações gráficas imediatas, como vetores de força e diagramas de energia visuais das energias no sistema. Tais recursos visuais permitem que o estudante reconheça a lógica do movimento e identifique padrões significativos nas condições críticas de *looping*, o que facilita a organização do conhecimento e fortalece a memória a longo prazo.

À medida que o currículo em espiral avança para o cálculo preciso das grandezas envolvidas, a representação simbólica assumirá o papel central. Nesta monografia, esse estágio será consolidado pelo detalhamento das deduções matemáticas. Ao traduzir os princípios fundamentais da mecânica em leis e equações complexas —

como as equações integrais de Volterra —, a modelagem matemática deixa de ser um procedimento meramente algorítmico e passa a ser uma ferramenta de *potência efetiva* [11]. Esse aprofundamento simbólico permite que o estudante desenvolva *modelos mentais* robustos, capazes de serem aplicados à análise de outros sistemas físicos análogos e inéditos [5].

## 2.2 RUDIMENTOS DE MECÂNICA NEWTONIANA

O estudo do movimento em trajetórias curvas, especificamente no contexto de *loopings*, demanda a integração de dois pilares fundamentais da Mecânica Clássica: a dinâmica newtoniana e o Princípio de Conservação da Energia Mecânica. Com base nesses fundamentos, esta seção dedica-se à análise da estrutura conceitual e matemática indispensável à compreensão precisa do problema de uma partícula se movendo em um *loop*, estabelecendo os pressupostos físicos e as ferramentas analíticas que servirão de base para o desenvolvimento subsequente dos modelos e da discussão dos resultados.

### 2.2.1 A Dinâmica de uma Partícula em Movimento Circular

Inicialmente podemos enunciar, na forma convencional, aquelas que são conhecidas como as *Leis de Newton*:

- Primeira Lei de Newton: um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, exceto sob a atuação de uma força resultante não nula.
- Segunda Lei de Newton: um corpo sob a atuação de uma força resultante se move de tal forma que a taxa de variação temporal do *momentum linear* se iguala à força resultante que atua sobre o corpo.
- Terceira Lei de Newton: se dois corpos exercem força entre si, essas forças serão iguais em magnitude e direção e opostas em sentido. Além disso, cada força desse par atua em um corpo diferente.

Para mais detalhes vide [13]. Essas três leis constituem o alicerce da Mecânica Clássica e fornecem o arcabouço conceitual necessário para a descrição do movimento de corpos materiais. Dentre elas, a Segunda Lei de Newton desempenha papel central na análise quantitativa da dinâmica, ao estabelecer a relação fundamental entre a força resultante aplicada a um corpo e a variação temporal de seu *momentum linear*. No caso particular de uma partícula de massa constante, essa lei assume a forma:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}, \quad (2.1)$$

em que  $\sum_i \vec{F}_i$  representa a somatória de todas as forças, ou seja a força resultante, atuando no corpo e  $\vec{a}$  representa sua aceleração.

Quando o movimento ocorre ao longo de uma trajetória curva, a aplicação direta da Eq. (2.1) torna-se possível ao decomposmos a aceleração em componentes associadas à geometria do movimento. Em cada ponto da trajetória, o vetor velocidade é tangente ao percurso, de modo que a aceleração pode ser decomposta em uma componente tangencial, responsável pela variação do módulo da velocidade, e uma componente normal, associada exclusivamente à variação da direção do vetor velocidade.

Considere uma partícula descrevendo movimento circular de raio  $r$  com rapidez<sup>1</sup> constante  $v$ . Embora o módulo da velocidade permaneça constante, o vetor velocidade  $\vec{v}(t)$  muda continuamente de direção, pois é sempre tangente à trajetória. A aceleração instantânea é definida, de maneira geral, como a taxa de variação temporal do vetor velocidade,

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

Para explicitar a direção e o módulo de  $\vec{a}$ , comparamos os vetores  $\vec{v}(t)$  e  $\vec{v}(t + \Delta t)$  em dois instantes separados por um intervalo  $\Delta t$ . Nesse intervalo, a partícula percorre um arco correspondente a um pequeno incremento angular  $\Delta\theta$  com respeito ao centro do círculo. Como o vetor velocidade é tangente à trajetória, o ângulo entre  $\vec{v}(t)$  e  $\vec{v}(t + \Delta t)$  também é  $\Delta\theta$ . Assim, ao construir o triângulo vetorial de subtração  $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ , observa-se que  $\Delta\vec{v}$  aponta aproximadamente na direção radial para dentro (direção de  $-\hat{r}$ ), e essa aproximação torna-se exata no limite  $\Delta t \rightarrow 0$ . Logo, a aceleração é puramente normal (radial), apontando para o centro do círculo.

Resta determinar seu módulo. Como  $|\vec{v}(t)| = |\vec{v}(t + \Delta t)| = v$ , os dois vetores velocidade têm pontas sobre um círculo de raio  $v$  no espaço de velocidades. O comprimento da corda  $|\Delta\vec{v}|$  subtendendo o ângulo  $\Delta\theta$  é, para  $\Delta\theta$  pequeno, aproximadamente igual ao comprimento do arco correspondente. Portanto,

$$|\Delta\vec{v}| \simeq v |\Delta\theta|, \quad (2.3)$$

o que se torna exato no limite diferencial. Dividindo ambos os lados por  $\Delta t$  e tomando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\theta|}{\Delta t} = v\omega, \quad (2.4)$$

sendo  $\omega = d\theta/dt$  é a velocidade angular.

Como no *movimento circular uniforme* (M.C.U) vale a relação cinemática  $v = r\omega$ , segue que:

$$|\vec{a}| = v\omega = v \left( \frac{v}{R} \right) = \frac{v^2}{R}. \quad (2.5)$$

<sup>1</sup> Ou seja, o módulo da velocidade.

Além disso, a direção de  $\vec{a}$  é radial apontando para o centro da circunferência, isto é, na direção  $-\hat{r}$ . Portanto, a aceleração no movimento circular uniforme pode ser escrita na forma vetorial,

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \hat{r} = -\omega^2 R \hat{r}. \quad (2.6)$$

A Eq. (2.6) é a expressão da chamada *aceleração centrípeta*, uma aceleração cujo módulo é  $v^2/R$  e cuja direção aponta continuamente para o centro de curvatura. Essa conclusão ressalta um ponto essencial para a análise de *loopings*.

### 2.2.2 Elementos Sobre a Força de atrito

A *força de atrito* é uma interação de natureza eletromagnética que se manifesta entre duas superfícies sólidas quando em contato, opondo-se ao movimento relativo ou à tendência de movimento. Em escala microscópica, essa força surge como a soma de inúmeras interações entre os átomos de ambas as superfícies. Neste nível, mesmo materiais polidos apresentam irregularidades e rugosidades, de modo que o contato ocorre em pontos específicos. Nesses pontos formam-se verdadeiras “soldagens a frio”, nas quais átomos de uma superfície aderem temporariamente aos da outra, criando uma resistência que precisa ser vencida para que o deslizamento do corpo, em nível macroscópico, ocorra [7].

Do ponto de vista conceitual, a força de atrito não constitui uma força fundamental da natureza, mas sim uma força efetiva introduzida no âmbito da Mecânica Clássica como um modelo fenomenológico. As Leis de Newton não prescrevem a forma funcional das forças que atuam sobre um corpo; elas estabelecem apenas a relação dinâmica entre a força resultante atuante sobre um corpo e a aceleração adquirida por este. Cabe, portanto, à modelagem física identificar e caracterizar as forças relevantes em cada situação concreta.

No âmbito da Mecânica Clássica, essa resistência é descrita em dois regimes. No regime estático, a *força de atrito estática* ( $\vec{f}_s$ ) equilibra a força externa aplicada sobre um corpo até um valor máximo dado por:

$$f_{s,\max} = \mu_s F_N, \quad (2.7)$$

em que  $\mu_s$  é o *coeficiente de atrito estático* e  $F_N$  é o módulo da força normal. Uma vez superado esse limite, o movimento se inicia e passa a atuar a *força de atrito cinético*<sup>2</sup> ( $\vec{f}_k$ ), cujo módulo é:

$$f_k = \mu_k F_N, \quad (2.8)$$

com  $\mu_k$  representando o *coeficiente de atrito cinético*. O coeficiente de atrito ( $\mu$ ) é uma grandeza adimensional que depende das propriedades físico-químicas dos materiais

---

<sup>2</sup> Ou força de atrito dinâmico.

em contato, enquanto a força normal  $\vec{F}_N$  expressa a intensidade com que um corpo pressiona a superfície.

Quando introduzimos o atrito no estudo de movimentos sobre trilhos curvos — em particular, no problema do looping circular ou elíptico — o comportamento dinâmico do sistema é profundamente alterado. Isso ocorre porque a força normal  $\vec{F}_N$  deixa de ser constante ao longo da trajetória. Como a força de atrito é proporcional à normal, sua intensidade varia continuamente em função da posição angular  $\phi$  e da velocidade instantânea  $v(\phi)$  da partícula.

Essa variação implica que o trabalho realizado pela força de atrito — isto é, a energia dissipada pelo sistema — deve ser calculada de forma cumulativa ao longo do percurso. Em termos matemáticos, tal trabalho é obtido por meio de uma integral de linha, cujo valor depende do histórico do movimento.

A consequência física mais importante é que a *Energia Mecânica*<sup>3</sup> deixa de ser conservada: parte da energia cinética é continuamente convertida em *energia térmica*<sup>4</sup> devido às “soldagens microscópicas” que se rompem durante o deslizamento.

Diante disso, a partícula deve iniciar o movimento com uma energia cinética superior àquela prevista no modelo ideal sem atrito, de modo a compensar as perdas dissipativas e ainda satisfazer as condições críticas do *looping* — como, por exemplo, a manutenção do contato no topo do *loop*. A formulação matemática desse problema, como veremos na Seção 2.3.3, conduz naturalmente a uma equação integral cuja solução em cada ponto depende do histórico dissipativo ao longo de toda a trajetória percorrida anteriormente.

O trabalho realizado pela força de atrito ao longo de uma trajetória arbitrária é definido pela integral de linha:

$$W_f = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}, \quad (2.9)$$

sendo  $\vec{f}$  é a força de atrito e  $d\vec{r}$  é o elemento diferencial de deslocamento ao longo do caminho  $C$ . Como, no regime cinético, a força de atrito é antiparalela ao movimento, podemos escrevê-la como  $\vec{f} = -\mu_k F_N \hat{t}$ , em que  $\hat{t}$  é o versor tangente à trajetória,  $\mu_k$  é o coeficiente de atrito cinético e  $F_N$  é o módulo da força normal. Substituindo essa expressão na definição de trabalho, obtemos:

$$W_f = - \int_C \mu_k F_N dr, \quad (2.10)$$

o que evidencia que o trabalho da força de atrito é sempre negativo, representando a dissipação contínua de energia mecânica ao longo do percurso.

<sup>3</sup> Ou seja, a soma das energias cinética e potencial da partícula.

<sup>4</sup> Este termo não tem definição única na literatura. No entanto, em nosso trabalho ele é o calor dissipado através da interação da partícula com o circuito. O qual não pode ser recuperado em forma de energia útil.

Em síntese, o atrito não apenas reduz a velocidade da partícula ao longo do movimento, mas impõe a necessidade de um equilíbrio delicado entre energia inicial, ganho de energia potencial gravitacional e dissipação contínua da energia mecânica devido à presença da força de atrito. É justamente esse balanço que distingue o limite entre a conclusão bem-sucedida do percurso ou a perda de contato entre a partícula e a pista e, a consequente, interrupção do movimento.

### 2.2.3 O Princípio de Conservação da Energia Mecânica

Além da formulação dinâmica baseada na Segunda Lei de Newton, a mecânica clássica dispõe de uma descrição escalar complementar, de grande relevância para a análise de sistemas com vínculos geométricos bem definidos. Essa descrição é fornecida pelo formalismo energético, no qual a evolução do movimento é caracterizada não pela aceleração vetorial instantânea, mas pelas trocas de energia associadas às forças atuantes sobre a partícula ao longo da trajetória [13].

Essa abordagem escalar revela-se particularmente adequada em problemas nos quais a trajetória é previamente conhecida, como no caso do *looping*, pois permite relacionar diretamente diferentes estados do sistema sem a necessidade de acompanhar detalhadamente o movimento intermediário. Enquanto a aplicação direta da Segunda Lei de Newton exige a decomposição vetorial das forças e da aceleração ponto a ponto, o formalismo energético concentra-se exclusivamente nas grandezas escalares associadas à capacidade do sistema de realizar trabalho [14].

Do ponto de vista formal, o princípio da conservação da energia mecânica pode ser obtido a partir da componente da Segunda Lei de Newton na direção tangencial ao movimento e de sua integração ao longo da trajetória. Nesse sentido, o formalismo energético não constitui um princípio independente da dinâmica newtoniana, mas sim uma consequência direta dela, válida sempre que as forças envolvidas forem conservativas [15].

A adoção desse formalismo escalar é de extrema importância para a análise desenvolvida neste trabalho, pois permite estabelecer relações diretas entre a velocidade da partícula e sua posição ao longo da trajetória, fornecendo critérios claros para a determinação das condições críticas do movimento. Nos casos ideais, tais relações assumem a forma de igualdades algébricas simples. Já na presença de forças dissipativas, como o atrito, a mesma estrutura conceitual conduz naturalmente à equação generalizada de balanço energético, nos quais a dissipação de energia “acumulada” ao longo do percurso deve ser considerada [7].

Dessa forma, a conservação da energia mecânica é uma ferramenta fundamental e complementar à abordagem newtoniana vetorial, oferecendo uma perspectiva particularmente eficiente na análise de movimentos em trilhos curvos, tanto em regimes conservativos quanto dissipativos.

A energia mecânica ( $E_{mec}$ ) de um sistema é definida como a soma da energia cinética  $K$  dos objetos que o compõem com a energia potencial  $U$  do sistema [7]:

$$E_{mec} = K + U. \quad (2.11)$$

Este é o *Princípio da Conservação de Energia Mecânica*, que se fundamenta na premissa de que as transferências de energia ocorrem exclusivamente por meio de forças conservativas, sem a atuação de forças de atrito ou arrasto. Adicionalmente, considera-se o sistema isolado do ambiente externo.

Quando uma força conservativa realiza trabalho  $W$ , a variação da energia cinética é expressa por  $\Delta K = W$ , enquanto a variação da energia potencial é dada por  $\Delta U = -W$ . A relação entre essas variações é:

$$\Delta K = -\Delta U, \quad (2.12)$$

para as provas desses importantes teoremas veja, por exemplo, [8]. Dessa forma, ao comparar dois estados distintos do sistema (1 e 2), a soma das energias deve permanecer constante:

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1. \quad (2.13)$$

Este é o *Princípio da Conservação de Energia*. Conclui-se que, em um sistema isolado sob forças conservativas, a variação da energia mecânica total é nula:

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = 0. \quad (2.14)$$

O uso deste princípio simplifica a análise de sistemas complexos, permitindo igualar o conteúdo energético de dois estados físicos diferentes do sistema, sem a necessidade de detalhar trajetórias intermediárias ou calcular trabalhos das forças que atuam sobre a partícula em cada momento da dinâmica.

De forma mais geral, os teoremas trabalho–energias<sup>5</sup> podem ser generalizados. Com efeito, quando forças conservativas e certas classes de força não conservativas atuam simultaneamente, a variação da energia cinética é dada pela soma dos trabalhos realizados por todas as forças envolvidas. Assim, pode-se escrever:

$$\sum_i W_i^{(c)} + \sum_i W_i^{(nc)} = \Delta K, \quad (2.15)$$

em que  $W_i^{(c)}$  representa o trabalho realizado pela força conservativa  $\vec{F}_i^{(c)}$ , e  $W_i^{(nc)}$  o trabalho realizado pela força não conservativa  $\vec{F}_i^{(nc)}$ . Nota-se que os somatórios presentes na Eq. (2.15) apresentam apenas um subíndice,  $i$ . Toda vez que a notação for essa, isto significa que estamos subentendendo a soma sobre todos os valores possíveis para a variável,  $i$ . Ou seja, sobre as 'n' forças agindo sobre a partícula.

<sup>5</sup> As equações  $K = W$  e  $U = -W$ .

Para forças conservativas, o trabalho pode ser expresso em termos de uma energia potencial associada, de modo que:

$$W_i^{(c)} = -\Delta U_i, \quad (2.16)$$

sendo  $U_i$  a energia potencial correspondente à força conservativa  $\vec{F}_i^{(c)}$ . A energia potencial total do sistema é, portanto, definida como:

$$U = \sum_i U_i. \quad (2.17)$$

Substituindo essas relações na expressão geral do teorema trabalho–energia, obtemos:

$$\sum_i W_i^{(nc)} = \Delta K + \sum_i \Delta U_i = \Delta(K + U). \quad (2.18)$$

Pela definição de energia mecânica total do sistema (2.11), segue-se que:

$$\Delta E_{mec} = \sum_i W_i^{(nc)}. \quad (2.19)$$

A Eq. (2.19) expressa o balanço energético mais geral para uma partícula sujeita a um conjunto de forças quaisquer. Ela mostra que a energia mecânica total é conservada apenas quando o trabalho realizado pelas forças não conservativas é nulo. Em particular, forças de atrito realizam trabalho negativo, promovendo a dissipação contínua da energia mecânica em outras formas de energia, como energia térmica.

No contexto desta pesquisa, essa formulação generalizada é de importância central, pois permite estender a análise do movimento de partículas em *loops* para além do regime ideal conservativo. A presença do atrito implica que a variação da energia mecânica ao longo da trajetória depende do trabalho das forças dissipativas "acumulado", o qual deve ser calculado explicitamente ao longo do percurso. Essa característica conduz naturalmente a descrições integrais do movimento, nas quais o estado dinâmico da partícula em um dado ponto depende da *história do movimento*<sup>6</sup>.

### 2.3 A ANÁLISE EVOLUTIVA DA DINÂMICA DE PARTÍCULAS EM LOOPINGS COM DIFERENTES EXCENTRICIDADES

Nesta seção, aplicamos o formalismo desenvolvido nas seções anteriores para analisar matematicamente cada nível do currículo em espiral proposto na Seção 2.1.3. O objetivo é quantificar como a introdução do atrito e a mudança de geometria modificam as condições de movimento, os requisitos energéticos e o comportamento dinâmico do sistema.

<sup>6</sup> I.e., a trajetória que representa a dinâmica da partícula no espaço de fase [14].

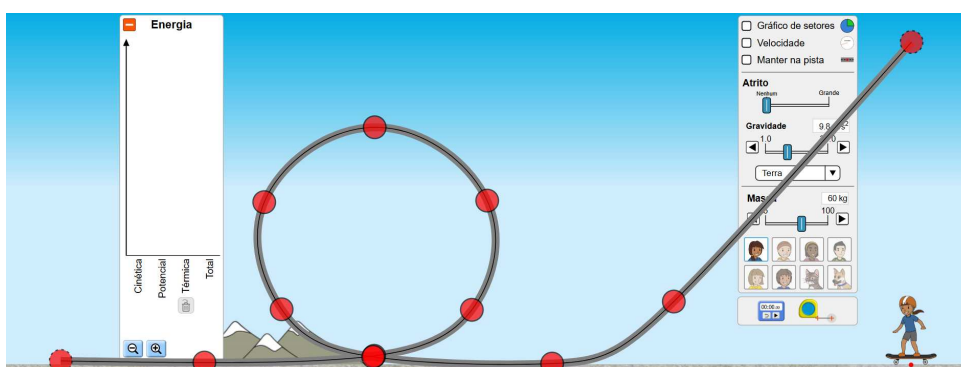
### 2.3.1 A Representação Ativa e Icônica na Exploração do Looping

Introduz-se uma etapa exploratória que concretiza, no plano prático, a progressão entre os três modos de representação de Bruner. Os quais são descritos na Seção 2.1.3 e vão do estágio ativo ao icônico, preparando a estrutura cognitiva do estudante para a formalização simbólica desenvolvida nas subseções seguintes.

O estágio ativo é concretizado por meio da plataforma *PhET Interactive Simulations* [12], já apresentada na Seção 2.1.3. Neste contexto específico, a manipulação das variáveis do sistema — altura de lançamento, massa e coeficiente de atrito — permite ao estudante observar diretamente como cada parâmetro altera as condições para a partícula percorrer o *loop*, enquanto os diagramas de energia e de posição fornecem o suporte icônico para o reconhecimento de padrões.

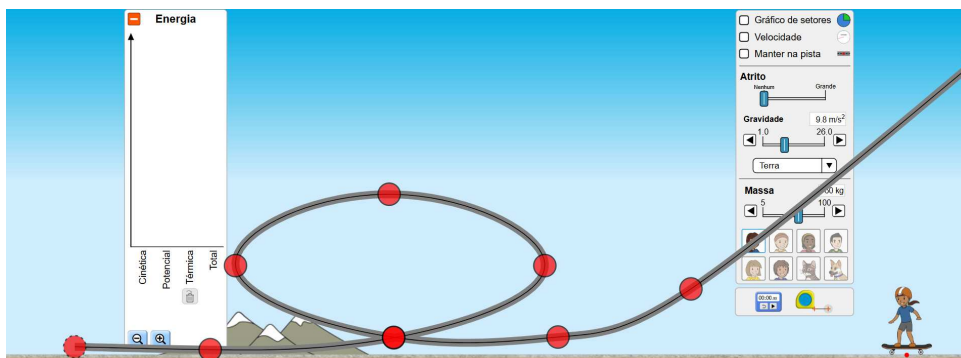
As Figuras 1, 2 e 3 ilustram diferentes configurações geométricas exploradas na simulação. Vale destacar que, pelas limitações da simulação, não é garantido que as formas geométricas escolhidas sejam perfeitas, exigindo certa prática e esforço do usuário. Parte-se do caso idealizado do *loop* circular e avança-se para variações elípticas com diferentes excentricidades, o que permite observar como alterações na geometria da trajetória afetam a distribuição de energia e as condições de manutenção do contato entre a partícula e a pista.

Figura 1 – Simulação do movimento em um *loop* circular.



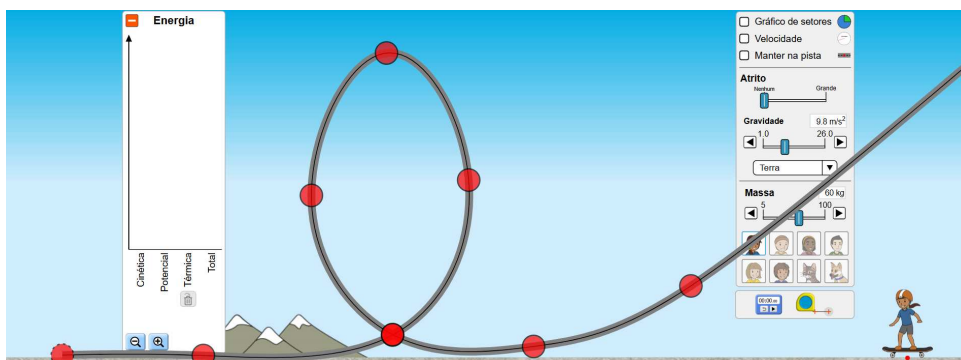
Fonte: PhET Interactive Simulations, University of Colorado Boulder. Disponível em: <https://phet.colorado.edu>.

Figura 2 – Simulação do movimento em um *loop* elíptico horizontal.



Fonte: PhET Interactive Simulations, University of Colorado Boulder. Disponível em: <https://phet.colorado.edu>.

Figura 3 – Simulação do movimento em um *loop* elíptico vertical.



Fonte: PhET Interactive Simulations, University of Colorado Boulder. Disponível em: <https://phet.colorado.edu>.

A transição entre os estágios ativo e icônico desenvolve os elementos necessários para a representação simbólica. A intuição construída pela exploração e pela leitura dos gráficos será formalizada, nas seções seguintes, pelas equações de movimento e pelas condições energéticas que governam a realização completa do *looping*.

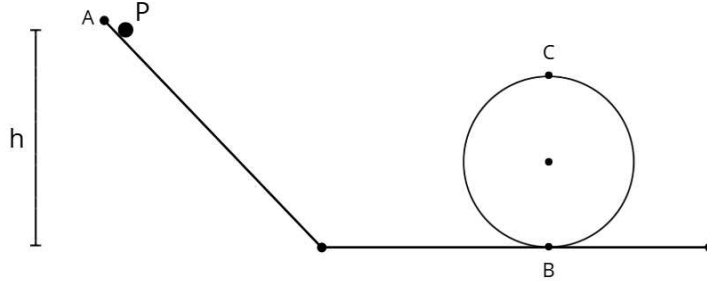
### 2.3.2 A Dinâmica da Partícula em um Loop Circular sem Atrito

Pretende-se, agora, determinar a altura mínima a partir da qual uma partícula deve ser liberada para que seja capaz de completar integralmente a trajetória circular de um *looping* na ausência de forças dissipativas. De forma equivalente, busca-se estabelecer o valor mínimo da velocidade da partícula, na base do *loop*, necessário para garantir a manutenção do contato da partícula com a pista ao longo de todo o movimento.

Definimos os seguintes pontos característicos da pista: o ponto *A* corresponde ao ponto de liberação da partícula, situado a uma altura *h* em relação à base do *loop*; o

ponto  $B$  representa o ponto mais baixo da trajetória circular; e o ponto  $C$  corresponde ao topo do *loop*, localizado a uma altura  $2R$ .

Figura 4 – Looping Circular e os Pontos Característicos da Trajetória.



Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

Nesse contexto, tendo em vista a Fig. 4, formulam-se, nos livros didáticos, tais como [9, 7], as seguintes questões fundamentais: Qual é a velocidade mínima  $v_B$  que a partícula deve possuir ao passar pelo ponto  $B$ ? Qual é a altura mínima  $h$  a partir da qual a partícula deve ser abandonada para que complete o *looping*?

Como o sistema é conservativo, a energia mecânica total da partícula se conserva ao longo de toda a trajetória. Admitindo que a partícula seja liberada do repouso no ponto  $A$ , sua energia mecânica inicial é exclusivamente potencial gravitacional. No topo do *looping*, ponto  $C$ , essa energia se distribui entre as formas potencial e cinética. Assim, temos:

$$E_m^A = E_m^C. \quad (2.20)$$

Explicitando os termos da Eq. (2.20), obtém-se:

$$mgh = mg(2R) + \frac{1}{2}mv_C^2. \quad (2.21)$$

Dividindo ambos os lados da equação por  $mg$  e isolando a altura  $h$ , resulta:

$$h = 2R + \frac{v_C^2}{2g}. \quad (2.22)$$

A Eq. (2.22) estabelece a relação fundamental entre a geometria do trilho e a dinâmica da partícula no topo do *loop*.

Uma das condições para que a partícula seja capaz de completar integralmente a trajetória circular mantendo o contato com o trilho, é que exista, em todos os pontos do movimento, uma força resultante dirigida ao longo da direção normal à trajetória, isto é, apontando para o centro de curvatura do círculo. Essa força resultante é responsável pela aceleração centrípeta exigida pelo movimento curvilíneo.

No ponto mais alto da trajetória, onde a direção radial coincide com a vertical para baixo, as únicas forças com componente radial são a força gravitacional<sup>7</sup> da partícula,  $mg$ , e a força normal exercida pelo trilho sobre a partícula,  $F_N$ , ambas orientadas em direção ao centro do círculo. Nessas condições, a aplicação da Segunda Lei de Newton ao longo da direção radial conduz diretamente à equação:

$$F_N + mg = m \frac{v_C^2}{R}. \quad (2.23)$$

A *condição limite* para a manutenção do contato com o trilho ocorre quando a força normal se anula, caracterizando o limiar entre o movimento vinculado e a iminente perda de contato entre a partícula e o trilho. Impõe-se, assim,  $F_N = 0$ , o que conduz à velocidade mínima no topo do *loop*:

$$mg = m \frac{v_{C,\min}^2}{R}, \quad (2.24)$$

ou, equivalentemente,

$$v_{C,\min} = \sqrt{gR}. \quad (2.25)$$

Conhecida a velocidade mínima no topo do *loop*, é possível determinar a altura mínima a partir da qual a partícula deve ser liberada. Substituindo a Eq. (2.25) na Eq. (2.22), obtém-se:

$$h = 2R + \frac{1}{2g}(gR), \quad (2.26)$$

o que resulta em:

$$h_{\min} = 2,5R. \quad (2.27)$$

Uma vez estabelecida a condição de energia mínima no topo do *loop*, retornamos à análise energética entre os pontos  $B$  e  $C$  para determinar a velocidade mínima na base dessa trajetória. Aplicando novamente o princípio da conservação da energia mecânica, temos:

$$\frac{1}{2}mv_{B,\min}^2 = \frac{1}{2}mv_{C,\min}^2 + mg(2R). \quad (2.28)$$

Substituindo o valor de  $v_{C,\min}^2 = gR$ , segue que:

$$v_{B,\min}^2 = gR + 4gR = 5gR, \quad (2.29)$$

e, portanto,

$$v_{B,\min} = \sqrt{5gR} \quad (2.30)$$

<sup>7</sup> Para detalhes veja [7].

As Eqs. (2.27) e (2.30) são fisicamente equivalentes, pois ambas determinam a energia mecânica mínima necessária para que a partícula inicie a trajetória. Para evitar repetições, nos problemas seguintes adotaremos como referência a velocidade mínima na base do looping, pois essa grandeza expressa diretamente a condição energética inicial e facilita a extensão da análise para sistemas não conservativos e trajetórias não circulares.

Esse resultado é amplamente apresentado tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, sendo frequentemente tratado como um problema elementar da Mecânica Clássica. No entanto, essa aparente simplicidade suscita uma questão natural: até que ponto tal simplicidade se mantém quando se introduz força dissipativas, como o atrito, ou quando se modifica a geometria da trajetória considerada?

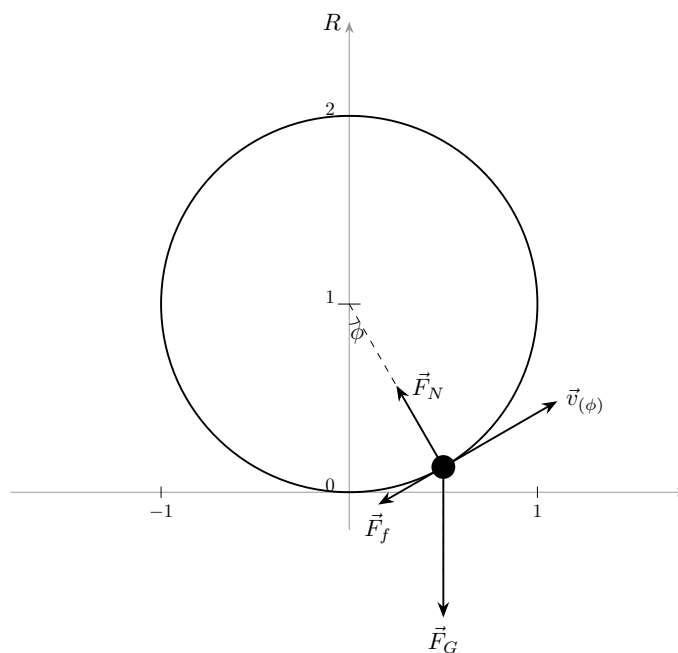
### 2.3.3 A Dinâmica da Partícula em um Loop Circular com Atrito

Consideramos agora o looping circular com atrito cinético ao longo de toda a trajetória. Nesse caso, a energia mecânica não é conservada, sendo continuamente dissipada pelo trabalho da força de atrito.

Mantemos a geometria do problema anterior (trilho circular de raio  $R$ ) e adotamos a parametrização pelo ângulo  $\phi$ , medido a partir do centro da circunferência. A posição da partícula é dada por

$$x = R \sin \phi, \quad y = R(1 - \cos \phi), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (2.31)$$

Figura 5 – Looping Circular com Atrito



Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

Como vimos, a força de atrito cinético atua tangencialmente à trajetória com módulo  $F_f = \mu F_N$ , em que  $\mu$  é o coeficiente de atrito e  $F_N$  a força normal. Aplicando a segunda lei de Newton na direção radial<sup>8</sup>,

$$F_N - mg \cos \phi = m \frac{v^2(\phi)}{R}, \quad (2.32)$$

e portanto:

$$F_f = \mu \left( mg \cos \phi + m \frac{v^2(\phi)}{R} \right). \quad (2.33)$$

A presença dessa força dissipativa exige que a análise do movimento seja conduzida a partir da equação generalizada de balanço energético, no qual o trabalho realizado pela força de atrito seja explicitamente levado em conta. O balanço energético do sistema, seguindo [6], é expresso por:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2(\phi) + mgy(\phi) + \int_0^{l(\phi)} F_f ds, \quad (2.34)$$

em que  $v_0$  é a velocidade da partícula na base do *loop* ( $\phi = 0$ ),  $l(\phi) = R\phi$  é o comprimento de arco percorrido pela partícula e o termo integral é trabalho realizado pela força de atrito ao longo do caminho.

Ao substituir a expressão da força de atrito, Eq. (2.33), no termo integral da Eq. (2.34), temos:

$$\int_0^{l(\phi)} F_f(s) ds = \int_0^{R\phi} \mu \left( mg \cos \phi' + \frac{mv^2(\phi')}{R} \right) ds. \quad (2.35)$$

Realizando a mudança de variável para o domínio angular, sendo  $s = R\phi'$  e, consequentemente,  $ds = R d\phi'$ , a integral pode ser decomposta em duas componentes distintas, uma relacionada à projeção radial da força gravitacional e outra vinculada à força centrípeta. Assim:

$$\int_0^{l(\phi)} F_f(s) ds = \mu mgR \int_0^\phi \cos \phi' d\phi' + \mu m \int_0^\phi v^2(\phi') d\phi', \quad (2.36)$$

resolvendo a primeira integral e substituindo em (2.34):

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2(\phi)}{2} + mgR(1 - \cos \phi) + \mu mgR \sin \phi + \mu m \int_0^\phi v^2(\phi') d\phi', \quad (2.37)$$

multiplicando todos os termos por  $\frac{2}{mgR}$ , introduz-se a velocidade adimensional definida como:

$$V(\phi) = \frac{v(\phi)}{\sqrt{gR}}, \quad (2.38)$$

<sup>8</sup> Vale ressaltar que a partir desse momento adotamos as convenções de sinal da referencia [6], para a direção radial, a qual difere da convenção adotada na seção 2.2.1.

como sugere [6]. Após as manipulações algébricas e a reorganização dos termos, obtém-se uma equação integral que governa o sistema:

$$V^2(\phi) = V_0^2 + 2(\cos \phi - \mu \sin \phi - 1) - 2\mu \int_0^\phi V^2(\phi') d\phi'. \quad (2.39)$$

A Eq. (2.39) é uma equação integral de Volterra de segunda espécie, cuja forma geral é:

$$f(t) = g(t) + \int_a^t K(t, s) f(s) ds. \quad (2.40)$$

Esse tipo de equação desempenha papel central na modelagem de sistemas com memória, sendo particularmente adequado à descrição de processos dissipativos [16]. Quando o núcleo  $K(t, s)$  é suficientemente regular, a equação de Volterra equivale a uma EDO, o que permite resolvê-la por derivação direta.

Isto posto, para resolvê-la vamos usar o método de transformação de EDO equivalente de [17]<sup>9</sup>, derivando (2.39) em relação a  $\phi$  e definindo  $Y(\phi) \equiv V^2(\phi)$ , obtém-se a EDO linear de primeira ordem:

$$\frac{d}{d\phi} Y(\phi) = -2 \sin \phi - 2\mu \cos \phi - 2\mu Y(\phi). \quad (2.41)$$

A resolução da Eq. (2.41) segue diretamente pelo método do fator integrante. O fator integrante associado é dado por:

$$\mathcal{I}(\phi) = \exp\left(\int 2\mu d\phi\right) = e^{2\mu\phi}. \quad (2.42)$$

multiplicando a Eq. (2.41) por  $\mathcal{I}(\phi)$ , obtém-se:

$$\frac{d}{d\phi} \left( e^{2\mu\phi} Y(\phi) \right) = -2e^{2\mu\phi} \sin \phi - 2\mu e^{2\mu\phi} \cos \phi. \quad (2.43)$$

Integrando ambos os lados entre 0 e  $\phi$ , segue que:

$$e^{2\mu\phi} Y(\phi) - Y(0) = \int_0^\phi \left[ -2e^{2\mu\phi'} \sin \phi' - 2\mu e^{2\mu\phi'} \cos \phi' \right] d\phi'. \quad (2.44)$$

Para obter uma expressão fechada para a primitiva consideremos inicialmente as integrais indefinidas:

$$I_s \equiv \int e^{2\mu\phi'} \sin \phi' d\phi', \quad I_c \equiv \int e^{2\mu\phi'} \cos \phi' d\phi'. \quad (2.45)$$

Aplicando integração por partes em  $I_s$ , tomamos  $u = \sin \phi'$ ,  $dv = e^{2\mu\phi'} d\phi'$ , de modo que  $du = \cos \phi' d\phi'$  e  $v = \frac{1}{2\mu} e^{2\mu\phi'}$ . Logo:

<sup>9</sup> o método de fator integrante é padrão na literatura, mas não para resolver esse tipo de integral. Isto é uma inovação deste matemático.

$$I_s = \frac{e^{2\mu\phi'}}{2\mu} \sin \phi' - \frac{1}{2\mu} \int e^{2\mu\phi'} \cos \phi' d\phi' = \frac{e^{2\mu\phi'}}{2\mu} \sin \phi' - \frac{1}{2\mu} I_c. \quad (2.46)$$

De forma análoga, para  $I_c$  escolhemos  $u = \cos \phi'$ ,  $dv = e^{2\mu\phi'} d\phi'$ , de modo que  $du = -\sin \phi' d\phi'$  e o mesmo  $v = \frac{1}{2\mu} e^{2\mu\phi'}$ . Assim:

$$I_c = \frac{e^{2\mu\phi'}}{2\mu} \cos \phi' + \frac{1}{2\mu} \int e^{2\mu\phi'} \sin \phi' d\phi' = \frac{e^{2\mu\phi'}}{2\mu} \cos \phi' + \frac{1}{2\mu} I_s. \quad (2.47)$$

As Eqs. (2.46) e (2.47) formam um sistema linear em  $(I_s, I_c)$ . Substituindo (2.46) em (2.47), obtemos:

$$I_c = \frac{e^{2\mu\phi'}}{2\mu} \cos \phi' + \frac{1}{2\mu} \left( \frac{e^{2\mu\phi'}}{2\mu} \sin \phi' - \frac{1}{2\mu} I_c \right), \quad (2.48)$$

isto é,

$$\left( 1 + \frac{1}{4\mu^2} \right) I_c = \frac{e^{2\mu\phi'}}{2\mu} \cos \phi' + \frac{e^{2\mu\phi'}}{4\mu^2} \sin \phi', \quad (2.49)$$

e portanto

$$I_c = \frac{e^{2\mu\phi'}}{1 + 4\mu^2} (2\mu \cos \phi' + \sin \phi') + C. \quad (2.50)$$

Substituindo (2.50) em (2.46), segue

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{e^{2\mu\phi'}}{2\mu} \sin \phi' - \frac{1}{2\mu} \frac{e^{2\mu\phi'}}{1 + 4\mu^2} (2\mu \cos \phi' + \sin \phi') + C \\ &= \frac{e^{2\mu\phi'}}{1 + 4\mu^2} (2\mu \sin \phi' - \cos \phi') + C. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Com essas expressões, a primitiva do integrando de (2.44) é obtida diretamente:

$$\begin{aligned} \int \left[ -2e^{2\mu\phi'} \sin \phi' - 2\mu e^{2\mu\phi'} \cos \phi' \right] d\phi' &= -2I_s - 2\mu I_c \\ &= -\frac{2e^{2\mu\phi'}}{1 + 4\mu^2} (2\mu \sin \phi' - \cos \phi') \\ &\quad - \frac{2\mu e^{2\mu\phi'}}{1 + 4\mu^2} (2\mu \cos \phi' + \sin \phi') + C \\ &= \frac{e^{2\mu\phi'}}{1 + 4\mu^2} \left[ (2 - 4\mu^2) \cos \phi' + 6\mu \sin \phi' \right] + C. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Aplicando os limites  $\phi' = 0$  e  $\phi' = \phi$  na Eq. (2.44), e utilizando  $\cos 0 = 1$  e  $\sin 0 = 0$ , obtém-se:

$$e^{2\mu\phi} Y(\phi) - Y(0) = \frac{e^{2\mu\phi}}{1 + 4\mu^2} \left[ (2 - 4\mu^2) \cos \phi + 6\mu \sin \phi \right] - \frac{2 - 4\mu^2}{1 + 4\mu^2}. \quad (2.53)$$

Retornando a variável original e isolando  $V^2(\phi)$ , resulta:

$$V^2(\phi) = e^{-2\mu\phi} V_0^2 + \frac{(2 - 4\mu^2) \cos \phi + 6\mu \sin \phi}{1 + 4\mu^2} - \frac{(2 - 4\mu^2)}{1 + 4\mu^2} e^{-2\mu\phi} \quad (2.54)$$

$$= e^{-2\mu\phi} \left( V_0^2 + \frac{2(1 - 2\mu^2)}{1 + 4\mu^2} \right) - \frac{2}{1 + 4\mu^2} \left[ (2\mu^2 - 1) \cos \phi + 3\mu \sin \phi \right]. \quad (2.55)$$

Para compactar a notação e alinhar a escrita com a literatura, introduzem-se as constantes:

$$\zeta \equiv 1 + 4\mu^2, \quad \xi \equiv 2\mu^2 - 1, \quad (2.56)$$

de modo que a solução assume a forma final:

$$\boxed{V^2(\phi) = e^{-2\mu\phi} \left( V_0^2 - \frac{2\xi}{\zeta} \right) - \frac{2}{\zeta} (\xi \cos \phi + 3\mu \sin \phi)}. \quad (2.57)$$

A expressão (2.57) fornece o perfil completo da velocidade adimensional ao longo do *loop* circular sob atrito cinético. O fator exponencial  $e^{-2\mu\phi}$  evidencia que a dissipação atua de forma cumulativa ao longo do arco percorrido, e não em função do tempo, refletindo o caráter geométrico do atrito cinético neste sistema.

A partir dessa solução, para que a partícula complete o movimento de *looping*, três condições devem ser satisfeitas simultaneamente:

1.  $V(\phi) > 0$ , para  $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ , garantindo que a partícula não pare no primeiro quarto do trilho;
2.  $F_N(\phi) > 0$ , para  $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$ , garantindo a manutenção do contato com o trilho no trecho superior;
3.  $V(\phi) > 0$ , para  $\frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi$ , garantindo que a partícula consiga completar o último quarto do trilho.

A primeira condição imposta ao movimento exige que a velocidade da partícula permaneça estritamente positiva ao longo do intervalo

$$V(\phi) > 0, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}. \quad (2.58)$$

Do ponto de vista físico, essa restrição assegura que a partícula não interrompa seu movimento antes de alcançar a região superior da trajetória. No caso crítico, correspondente à situação limite em que a partícula possui a menor velocidade inicial, ainda compatível com a conclusão do percurso, pode-se impor a condição:

$$V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (2.59)$$

Substituindo  $\phi = \pi/2$  na expressão geral para  $V(\phi)$ , obtém-se:

$$0 = e^{-\mu\frac{\pi}{2}} \left[ V_0^2 + \frac{2(2\mu^2 - 1)}{1 + 4\mu^2} \right] - \frac{2}{1 + 4\mu^2} \left[ (2\mu^2 - 1) \cos \frac{\pi}{2} + 3\mu \sin \frac{\pi}{2} \right]. \quad (2.60)$$

Utilizando  $\cos(\pi/2) = 0$  e  $\sin(\pi/2) = 1$ , a equação acima se reduz a:

$$0 = e^{-\mu \frac{\pi}{2}} \left[ V_0^2 + \frac{2(2\mu^2 - 1)}{1 + 4\mu^2} \right] - \frac{6\mu}{1 + 4\mu^2}. \quad (2.61)$$

Isolando o termo correspondente à velocidade inicial, encontra-se:

$$V_0^2 = \frac{6\mu}{1 + 4\mu^2} e^{\frac{\pi}{2}\mu} - \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2}. \quad (2.62)$$

Desse modo, para que a condição  $V(\phi) > 0$  seja satisfeita ao longo de todo o intervalo considerado ( $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ ), a velocidade inicial deve obedecer à desigualdade:

$$V_0 \geq \sqrt{\frac{6\mu e^{\frac{\pi}{2}\mu} - 4\mu^2 + 2}{1 + 4\mu^2}}. \quad (2.63)$$

Para formular a inequação da velocidade mínima,  $V(\phi)$ , para se manter em contato com a região superior do trilho, parte-se da segunda condição de conclusão, ou seja:  $F_N(\phi) > 0$ , para  $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$ . Desse modo, vamos usar a Eq. 2.32, dividida por  $mg$  para trabalharmos com a velocidade adimensional definida. Logo:

$$\frac{F_N(\phi)}{mg} = \cos \phi + V^2(\phi). \quad (2.64)$$

A manutenção do contato exige:

$$F_N(\phi) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos \phi + V^2(\phi) \geq 0, \quad (2.65)$$

para os valores de  $\phi$  correspondentes à região superior do *loop*. O ponto potencialmente mais crítico para o contato é o topo da trajetória,  $\phi = \pi$ , pois ali  $\cos \phi$  assume seu valor mínimo. Assim, impõe-se:

$$\cos \pi + V^2(\pi) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 + V^2(\pi) \geq 0, \quad (2.66)$$

isto é,

$$V^2(\pi) \geq 1. \quad (2.67)$$

Substituindo  $\phi = \pi$  na expressão de  $V^2(\phi)$  e usando  $\cos \pi = -1$  e  $\sin \pi = 0$ , obtém-se:

$$V^2(\pi) = e^{-2\mu\pi} \left( V_0^2 + \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} \right) - \frac{2}{1 + 4\mu^2} [(2\mu^2 - 1) \cos \pi + 3\mu \sin \pi], \quad (2.68)$$

de modo que:

$$V^2(\pi) = e^{-2\mu\pi} \left( V_0^2 + \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} \right) - \frac{2}{1 + 4\mu^2} [(2\mu^2 - 1)(-1) + 3\mu \cdot 0]. \quad (2.69)$$

simplificando o termo entre colchetes, segue que:

$$V^2(\pi) = e^{-2\mu\pi} \left( V_0^2 + \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} \right) + \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2}. \quad (2.70)$$

Impondo a condição de contato no topo, Eq. (2.67), e substituindo a Eq. (2.70), obtém-se a desigualdade:

$$e^{-2\mu\pi} \left( V_0^2 + \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} \right) + \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} \geq 1. \quad (2.71)$$

isolando o termo exponencial:

$$e^{-2\mu\pi} \left( V_0^2 + \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} \right) \geq 1 - \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} = \frac{3}{1 + 4\mu^2}. \quad (2.72)$$

multiplicando ambos os lados por  $e^{2\mu\pi}$  e, em seguida, isolando  $V_0^2$ , resulta:

$$V_0^2 + \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} \geq \frac{3e^{2\mu\pi}}{1 + 4\mu^2} \implies V_0^2 \geq \frac{3e^{2\mu\pi}}{1 + 4\mu^2} - \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2}. \quad (2.73)$$

logo,

$$V_0^2 \geq \frac{3e^{2\mu\pi} - 4\mu^2 + 2}{1 + 4\mu^2}. \quad (2.74)$$

pode-se escrever finalmente a condição 2 na forma:

$$\boxed{V_0 \geq \sqrt{\frac{3e^{2\mu\pi} - 4\mu^2 + 2}{1 + 4\mu^2}}}. \quad (2.75)$$

A condição 3 é introduzida para assegurar que, após a passagem pela região superior, a partícula não tenha sua velocidade anulada no trecho final do percurso. Em termos matemáticos, exige-se que:

$$V(\phi) > 0, \quad \frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi. \quad (2.76)$$

No regime crítico, isto é, no limiar em que a partícula completa a volta com a menor velocidade inicial admissível, pode-se impor a seguinte condição no ponto final:

$$V^2(2\pi) = 0, \quad (2.77)$$

partindo da expressão geral obtida anteriormente para  $V^2(\phi)$ ,

$$V^2(\phi) = e^{-2\mu\phi} \left( V_0^2 + \frac{2(2\mu^2 - 1)}{1 + 4\mu^2} \right) - \frac{2}{1 + 4\mu^2} [(2\mu^2 - 1) \cos \phi + 3\mu \sin \phi], \quad (2.78)$$

substitui-se  $\phi = 2\pi$  e utiliza-se  $\cos(2\pi) = 1$  e  $\sin(2\pi) = 0$ , obtendo:

$$V^2(2\pi) = e^{-4\pi\mu} \left( V_0^2 + \frac{2(2\mu^2 - 1)}{1 + 4\mu^2} \right) - \frac{2}{1 + 4\mu^2} [(2\mu^2 - 1) \cdot 1 + 3\mu \cdot 0], \quad (2.79)$$

impondo a condição crítica  $V^2(2\pi) = 0$ , segue que:

$$0 = e^{-4\pi\mu} \left( V_0^2 + \frac{2(2\mu^2 - 1)}{1 + 4\mu^2} \right) - \frac{2(2\mu^2 - 1)}{1 + 4\mu^2}, \quad (2.80)$$

reescreve-se:

$$0 = e^{-4\pi\mu} \left( V_0^2 + \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} \right) - \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2}. \quad (2.81)$$

reorganizando:

$$e^{-4\pi\mu} \left( V_0^2 + \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} \right) = \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2}, \quad (2.82)$$

multiplicando ambos os lados por  $e^{4\pi\mu}$ :

$$V_0^2 + \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} = \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} e^{4\pi\mu}. \quad (2.83)$$

isolando  $V_0^2$ , obtém-se:

$$V_0^2 = \frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} (e^{4\pi\mu} - 1). \quad (2.84)$$

Portanto, para que a condição  $V(\phi) > 0$  seja satisfeita em  $\frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi$ , deve-se exigir que:

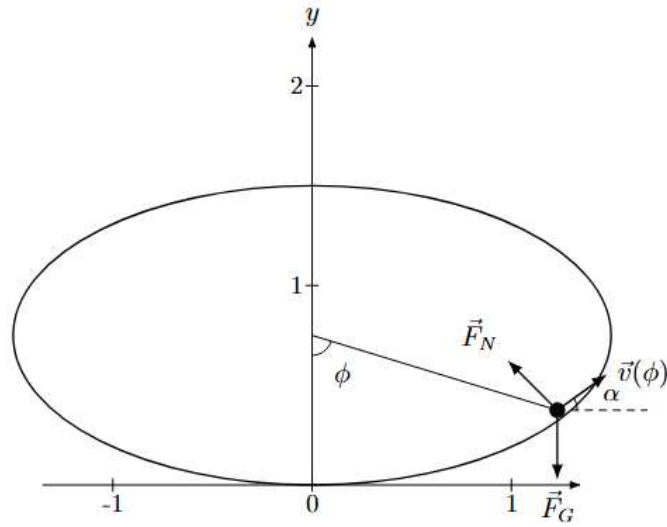
$$V_0 \geq \sqrt{\frac{4\mu^2 - 2}{1 + 4\mu^2} (e^{4\pi\mu} - 1)}. \quad (2.85)$$

Cada condição define uma curva limite no plano  $(\mu, V_0)$ : abaixo dessas curvas, ao menos uma condição é violada e o percurso não é completado; acima delas, o movimento é fisicamente admissível. A representação gráfica dessas funções permite identificar qual condição é dominante para cada valor de  $\mu$ .

#### 2.3.4 A Dinâmica da Partícula em um Loop Elíptico sem Atrito

Diferentemente do caso circular, em que a simetria facilita bastante a dinâmica, o *loop* elíptico exige mais cuidado com a geometria da trajetória e sua orientação em relação à gravidade. Neste trabalho, seguindo [6], consideramos duas posições da elipse: a *ellipse horizontal* (H), com o semieixo maior na horizontal, e a *ellipse vertical* (V), com o semieixo maior na vertical. Essas duas configurações permitem comparar como a forma da elipse influencia o movimento da partícula que percorre esses *loops*.

Figura 6 – Looping Elíptico na Orientação Horizontal (H).



Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

Inicialmente, é preciso definir um critério geométrico que permita comparar, de forma consistente, o *loop* circular e o *loop* elíptico. Para isso, escolhe-se uma parametrização da elipse cujo comprimento total seja aproximadamente igual ao da circunferência de referência. Como o perímetro de uma elipse não possui expressão analítica simples, utiliza-se a aproximação proposta por Ramanujan, conhecida por sua alta precisão na estimativa desse comprimento.

Com base nesse critério, a parametrização da elipse horizontal é escrita como:

$$x(\phi) = R p \sin \phi, \quad y(\phi) = R p \varepsilon (1 - \cos \phi), \quad (2.86)$$

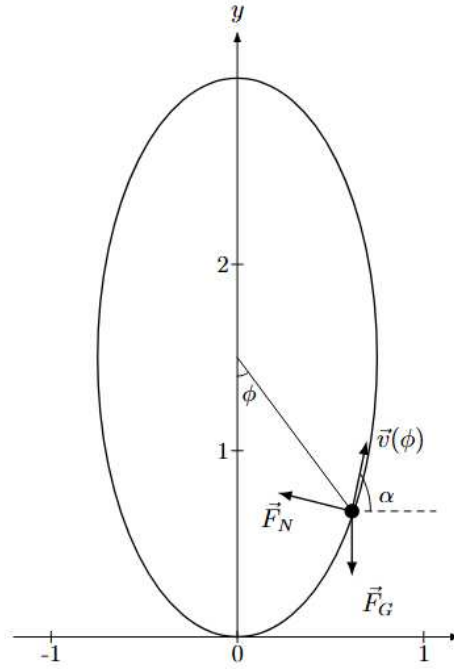
enquanto, para a elipse vertical, tem-se:

$$x(\phi) = R p \varepsilon \sin \phi, \quad y(\phi) = R p (1 - \cos \phi), \quad (2.87)$$

Em que  $\phi$  é o parâmetro angular, com  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . O parâmetro  $R$  desempenha o papel de uma escala característica do sistema, análoga ao raio no caso circular. O parâmetro  $\varepsilon$ , denominado *excentricidade* da elipse, está associado à forma da elipse e é definido pela razão entre os semi-eixos,

$$\varepsilon = \frac{b}{a}, \quad (2.88)$$

Figura 7 – Looping Elíptico na Orientação Vertical (V).



Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

sendo  $a$  e  $b$  os semi-eixos horizontal e vertical, respectivamente. Por fim, o fator adimensional  $p(\varepsilon)$  é introduzido como um fator geométrico de correção, de modo a ajustar o comprimento total da trajetória elíptica ao comprimento do *loop* circular de referência, sendo dado pela expressão aproximada:

$$p(\varepsilon) = \frac{2}{3(1 + \varepsilon) - \sqrt{(3 + \varepsilon)(1 + 3\varepsilon)}}. \quad (2.89)$$

Uma vez estabelecida a parametrização geométrica da trajetória, torna-se possível formular a modelagem dinâmica do problema em regime conservativo. A evolução do sistema é governada pela conservação da energia mecânica. Como vimos, a conservação da energia pode ser expressa como:

$$\frac{1}{2}mv^2(\phi) + mgy(\phi) = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad (2.90)$$

sendo  $v_0$  é a velocidade inicial da partícula no ponto mais baixo da trajetória. Dessa relação segue-se que a velocidade da partícula ao longo do percurso pode ser escrita formalmente como:

$$v^2(\phi) = v_0^2 - 2gy(\phi). \quad (2.91)$$

Introduzindo, como antes, a velocidade adimensional  $V(\phi) = v(\phi)/\sqrt{gR}$ , obtemos:

$$\boxed{V^2(\phi) = V_0^2 - \frac{2y(\phi)}{R}}. \quad (2.92)$$

A primeira condição crítica — análoga à Condição 1 estabelecida na Seção 2.3.3 — é imposta por:  $V(\phi) > 0$ , para  $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ , garantindo que a partícula não pare no primeiro quarto do trilho.

No caso da elipse horizontal, cuja coordenada vertical é dada por (2.86), obtém-se:

$$V^2(\phi) = V_0^2 + 2p\varepsilon(\cos \phi - 1). \quad (2.93)$$

avaliando essa expressão em  $\phi = \pi/2$ , segue que:

$$V_0^2 - 2p\varepsilon > 0, \quad (2.94)$$

o que conduz à condição:

$$V_0 > \sqrt{2p\varepsilon}. \quad (2.95)$$

De maneira análoga, para a elipse vertical, caracterizada por (2.87), obtém-se:

$$V^2(\phi) = V_0^2 + 2p(\cos \phi - 1), \quad (2.96)$$

e a exigência  $V(\pi/2) > 0$  resulta em:

$$V_0 > \sqrt{2p}. \quad (2.97)$$

Essas desigualdades constituem condições necessárias para que a partícula atinja o primeiro quarto da trajetória sem interromper o movimento. É ainda necessário assegurar que o contato da partícula com a trajetória seja mantido ao longo da metade superior do percurso, ou seja,  $F_N(\phi) > 0$ , para  $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$ . Essa exigência decorre da equação da dinâmica na direção normal à curva,

$$F_N - mg \cos \alpha(\phi) = m \frac{v^2(\phi)}{\rho(\phi)}, \quad (2.98)$$

em que  $\rho(\phi)$  representa o raio de curvatura local da trajetória e  $\alpha(\phi)$  é o ângulo entre a normal à pista e a vertical. A força normal pode, portanto, ser escrita como:

$$F_N = m \left( \frac{v^2(\phi)}{\rho(\phi)} + g \cos \alpha(\phi) \right). \quad (2.99)$$

A manutenção do contato exige que  $F_N > 0$  ao longo de toda a metade superior do looping. O ponto mais crítico ocorre no topo da trajetória,  $\phi = \pi$ , em que  $\cos \alpha(\pi) = -1$ , de modo que a condição reduz-se a:

$$v^2(\pi) > g \rho(\pi), \quad (2.100)$$

ou, em termos adimensionais,

$$V^2(\pi) > \frac{\rho(\pi)}{R}. \quad (2.101)$$

Para avaliar essa condição, faz-se necessário o conhecimento explícito do raio de curvatura no topo do looping. A partir da geometria da elipse analisada em [18], obtém-se:

$$\rho_H(\pi) = \frac{Rp}{\varepsilon}, \quad \rho_V(\pi) = Rp\varepsilon^2, \quad (2.102)$$

para as orientações horizontal e vertical, respectivamente. Por outro lado, a conservação da energia fornece pela Eq. (2.92), no topo da trajetória,

$$V^2(\pi) = \begin{cases} V_0^2 - 4p\varepsilon, & \text{(elipse horizontal),} \\ V_0^2 - 4p, & \text{(elipse vertical).} \end{cases} \quad (2.103)$$

Impondo a condição de contato, obtém-se finalmente as desigualdades:

$$V_0^2 > p \left( 4\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right), \quad V_0^2 > p(4 + \varepsilon^2), \quad (2.104)$$

o que conduz às condições finais:

$$V_0 > \sqrt{p \left( 4\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right)} \quad \text{(elipse horizontal),} \quad (2.105)$$

$$V_0 > \sqrt{p(4 + \varepsilon^2)} \quad \text{(elipse vertical).} \quad (2.106)$$

Esses resultados evidenciam que, mesmo na ausência de atrito, a velocidade mínima necessária para completar o *loop* depende de maneira sensível da geometria da trajetória, por meio da variação do raio de curvatura e da altura efetivamente atingida pela partícula. No limite  $\varepsilon = 1$ , correspondente ao caso circular, tem-se  $p = 1$ , e as expressões recuperam corretamente os valores clássicos  $V_0 > \sqrt{2}$  e  $V_0 > \sqrt{5}$ , confirmando a consistência do formalismo adotado.

### 2.3.5 A Dinâmica da Partícula em um Loop Elíptico com Atrito

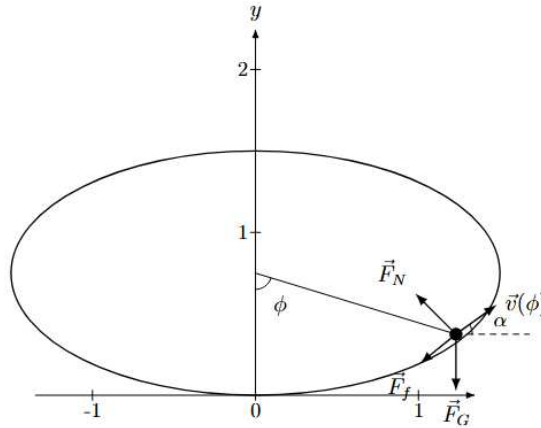
Daremos prosseguimento à análise do movimento em *loops* elípticos ao incorporar, agora, a presença de atrito cinético ao longo de toda a trajetória. À semelhança do que foi estabelecido no tópico anterior, impõe-se que o comprimento total da elipse seja mantido igual ao do *loop* circular de referência; por essa razão, adotaremos a mesma parametrização previamente introduzida. A análise será, contudo, organizada em dois subtópicos distintos: um dedicado ao caso da elipse com eixo maior orientado horizontalmente e outro ao caso da elipse com eixo maior orientado verticalmente.

#### 2.3.5.1 A Dinâmica da Partícula em um Loop Elíptico Horizontal com Atrito

Consideremos, inicialmente, o caso da elipse horizontal, isto é, aquela cujo semi-eixo maior se encontra disposto ao longo da direção horizontal. A trajetória da

partícula permanece descrita pela parametrização apresentada na Eq. (2.86), que será empregada nesta etapa da análise.

Figura 8 – Looping Elíptico Horizontal Com Atrito



Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

Ademais, a expressão geral para a força normal no caso elíptico, dada pela Eq. (2.99), permanece plenamente válida para o caso com atrito. A partir dessa força normal, torna-se possível determinar a força de atrito cinético que atua sobre a partícula ao longo da trajetória, assim:

$$F_f(\phi) = \mu \left[ mg \cos \alpha_H(\phi) + \frac{mv^2(\phi)}{\rho_H(\phi)} \right]. \quad (2.107)$$

Para determinar explicitamente a projeção da força gravitacional na direção normal, é necessário obter uma expressão para  $\cos \alpha_H(\phi)$ , em que  $\alpha_H(\phi)$  é o ângulo que a tangente à trajetória (direção da velocidade) faz com o eixo horizontal. A inclinação da tangente é dada por:

$$\tan \alpha_H(\phi) = \frac{dy/d\phi}{dx/d\phi}. \quad (2.108)$$

A partir da parametrização da elipse horizontal, dada pela Eq. (2.86), obtém-se diretamente:

$$\tan \alpha_H(\phi) = \varepsilon \tan \phi, \quad (2.109)$$

utilizando a identidade trigonométrica  $\cos \alpha = (1 + \tan^2 \alpha)^{-1/2}$ , segue que:

$$\cos \alpha_H(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \tan^2 \phi}}. \quad (2.110)$$

reescrevendo o denominador em termos de  $\sin \phi$  e  $\cos \phi$ ,

$$1 + \varepsilon^2 \tan^2 \phi = \frac{\cos^2 \phi + \varepsilon^2 \sin^2 \phi}{\cos^2 \phi}, \quad (2.111)$$

o que permite escrever:

$$\cos \alpha_H(\phi) = \frac{|\cos \phi|}{\sqrt{\cos^2 \phi + \varepsilon^2 \sin^2 \phi}}. \quad (2.112)$$

fatorando  $\varepsilon^2$  no denominador, obtém-se:

$$\cos \alpha_H(\phi) = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\tan^2 \phi + \varepsilon^{-2}}}. \quad (2.113)$$

Para garantir o sinal correto da projeção quando  $\cos \phi < 0$ , introduz-se o fator  $\gamma = \text{sgn}(\cos \phi)$  e define-se:

$$Q_H(\phi) = \sqrt{\tan^2 \phi + \varepsilon^{-2}}, \quad (2.114)$$

de modo que a expressão final assume a forma:

$$\boxed{\cos \alpha_H(\phi) = \frac{\gamma}{\varepsilon Q_H(\phi)}}. \quad (2.115)$$

Além disso, para determinar o raio de curvatura da elipse horizontal, recorremos à definição geral da curvatura de uma curva plana parametrizada por um parâmetro  $\phi$ , dada por [16]:

$$\kappa(\phi) = \frac{x'(\phi) y''(\phi) - y'(\phi) x''(\phi)}{[x'(\phi)^2 + y'(\phi)^2]^{3/2}}, \quad \rho(\phi) = \kappa(\phi)^{-1}. \quad (2.116)$$

A partir da parametrização fornecida pela Eq. (2.86) obtém-se as derivadas de primeira ordem:

$$x'(\phi) = pR \cos \phi, \quad y'(\phi) = pR \varepsilon \sin \phi, \quad (2.117)$$

e as derivadas de segunda ordem:

$$x''(\phi) = -pR \sin \phi, \quad y''(\phi) = pR \varepsilon \cos \phi. \quad (2.118)$$

Substituindo-se essas expressões no numerador da curvatura, resulta:

$$\begin{aligned} x' y'' - y' x'' &= (pR \cos \phi)(pR \varepsilon \cos \phi) - (pR \varepsilon \sin \phi)(-pR \sin \phi) \\ &= p^2 R^2 \varepsilon (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = p^2 R^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Por outro lado, o denominador, por sua vez, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} (x'^2 + y'^2)^{3/2} &= [(pR)^2 (\cos^2 \phi + \varepsilon^2 \sin^2 \phi)]^{3/2} \\ &= p^3 R^3 (\cos^2 \phi + \varepsilon^2 \sin^2 \phi)^{3/2}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Assim, a curvatura da elipse horizontal assume a forma:

$$\kappa_H(\phi) = \frac{\varepsilon}{pR (\cos^2 \phi + \varepsilon^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}. \quad (2.121)$$

Para reescrever essa expressão em termos do fator geométrico  $Q_H(\phi)$ , utiliza-se:

$$\cos^2 \phi + \varepsilon^2 \sin^2 \phi = \varepsilon^2 \cos^2 \phi (\tan^2 \phi + \varepsilon^{-2}) = \varepsilon^2 \cos^2 \phi Q_H(\phi)^2, \quad (2.122)$$

da qual segue:

$$(\cos^2 \phi + \varepsilon^2 \sin^2 \phi)^{3/2} = \varepsilon^3 |\cos \phi|^3 Q_H(\phi)^3. \quad (2.123)$$

Substituindo-se na expressão da curvatura e invertendo o resultado, obtém-se finalmente o raio de curvatura da elipse horizontal:

$$\rho_H(\phi) = pR \varepsilon^2 |\cos \phi|^3 Q_H(\phi)^3. \quad (2.124)$$

Para encontrar o elemento de arco ao longo da elipse usamos as derivadas na Eq. (2.117), logo:

$$ds_H = \sqrt{dx^2 + dy^2} = pR \varepsilon |\cos \phi| Q_H(\phi) d\phi. \quad (2.125)$$

Reescreve-se agora o trabalho realizado pela força de atrito em função do parâmetro angular  $\phi$ . Para isso, substitui-se na Eq. (2.107) as expressões obtidas para  $\cos \alpha_H(\phi)$ , para o raio de curvatura  $\rho_H(\phi)$  e para o elemento de arco  $ds_H$ . Dessa forma, a integral do trabalho da força de atrito assume a forma:

$$\int_0^\phi F_f ds_H = \mu m \int_0^\phi \left( g \frac{\text{sgn}(\cos \phi)}{\varepsilon Q_H} + \frac{v^2(\phi)}{Rp \varepsilon^2 |\cos \phi|^3 Q_H^3} \right) Rp \varepsilon |\cos \phi| Q_H d\phi. \quad (2.126)$$

Observa-se que a integral acima contém diversos fatores comuns no numerador e no denominador. Ao se realizar as simplificações algébricas correspondentes, o termo dissipativo pode ser decomposto naturalmente em duas contribuições distintas:

$$\int_0^\phi F_f ds_H = \mu m g Rp \int_0^\phi \text{sgn}(\cos \phi) |\cos \phi| d\phi + \mu m \int_0^\phi \frac{v^2(\phi)}{\varepsilon |\cos \phi|^2 Q_H^2} d\phi. \quad (2.127)$$

No primeiro termo, utiliza-se a identidade:  $\text{sgn}(\cos \phi) |\cos \phi| = \cos \phi$ , enquanto, no segundo termo, emprega-se a relação geométrica:  $|\cos \phi|^2 Q_H(\phi)^2 = \sin^2 \phi + \varepsilon^{-2} \cos^2 \phi$ . Com isso, a Eq. (2.126) pode ser reescrita como:

$$\mu m g Rp \int_0^\phi \cos \phi d\phi + \frac{m\mu}{\varepsilon} \int_0^\phi \frac{v^2(\phi)}{\sin^2 \phi + \varepsilon^{-2} \cos^2 \phi} d\phi. \quad (2.128)$$

A integração direta do primeiro termo fornece  $\sin \phi$ , resultando finalmente em:

$$\int_0^\phi F_f ds_H = \mu m g Rp \sin \phi + \frac{m\mu}{\varepsilon} \int_0^\phi \frac{v^2(\phi)}{\sin^2 \phi + \varepsilon^{-2} \cos^2 \phi} d\phi, \quad (2.129)$$

expressão que evidencia explicitamente a contribuição gravitacional e a contribuição associada à dissipação dependente da velocidade ao longo da trajetória.

Substituindo-se a expressão obtida para o trabalho da força de atrito, Eq. (2.129), na equação de balanço energético, obtém-se:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2(\phi)}{2} + mgpR\varepsilon(1 - \cos \phi) + m\mu gpR \sin \phi + \frac{m\mu}{\varepsilon} \int_0^\phi \frac{v^2(\phi')}{\sin^2 \phi' + \varepsilon^{-2} \cos^2 \phi'} d\phi'. \quad (2.130)$$

Isolando-se o termo cinético  $v^2(\phi)$  e multiplicando-se ambos os lados por  $2/m$ , a expressão acima pode ser reescrita como:

$$v^2(\phi) = v_0^2 - 2gpR\varepsilon(1 - \cos \phi) - 2\mu gpR \sin \phi - \frac{2\mu}{\varepsilon} \int_0^\phi \frac{v^2(\phi')}{\sin^2 \phi' + \varepsilon^{-2} \cos^2 \phi'} d\phi'. \quad (2.131)$$

Dividindo-se a Eq. (2.131) por  $gR$  e, evidenciando-se a forma adimensional da equação, introduz-se, como antes, a velocidade reduzida  $V(\phi) = \frac{v(\phi)}{\sqrt{gR}}$ ,  $V_0 = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}$ . Obtém-se:

$$V^2(\phi) = V_0^2 + 2p\varepsilon(\cos \phi - 1) - 2\mu p \sin \phi - \frac{2\mu}{\varepsilon} \int_0^\phi \frac{V^2(\phi')}{\sin^2 \phi' + \varepsilon^{-2} \cos^2 \phi'} d\phi'. \quad (2.132)$$

Com o objetivo de compactar a notação e destacar o papel da geometria elíptica, define-se o fator geométrico:

$$\text{si}_{CH}(\phi, \varepsilon) = (\varepsilon \sin^2 \phi + \varepsilon^{-1} \cos^2 \phi)^{-1}. \quad (2.133)$$

o que permite escrever a Eq. (2.132) na forma final:

$$V^2(\phi) = V_0^2 + 2p\varepsilon \left( \cos \phi - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \phi - 1 \right) - 2\mu \int_0^\phi V^2(\phi') \text{si}_{CH}(\phi', \varepsilon) d\phi'. \quad (2.134)$$

A Eq. (2.134) é uma equação integral de Volterra de segunda espécie — estruturalmente análoga à Eq. (2.39) do caso circular —, a qual coincide com o resultado do artigo de referência [6].

Para proceder à resolução dessa equação, utilizam-se ferramentas análogas caso da partícula se movendo em um *loop* circular com atrito de [17], ou seja, usando o método do fator integrante na EDO análoga a equação integral que temos. Logo, introduzimos a função auxiliar:

$$y(\phi) \equiv V^2(\phi), \quad (2.135)$$

o que permite reescrever a Eq. (2.134) de forma mais compacta. Derivando ambos os lados da equação em relação ao parâmetro angular  $\phi$ , obtém-se, no membro direito:

$$\frac{d}{d\phi} \left[ \int_0^\phi y(\phi') \text{si}_{CH}(\phi', \varepsilon) d\phi' \right] = y(\phi) \text{si}_{CH}(\phi, \varepsilon), \quad (2.136)$$

transformando o termo integral em uma contribuição local. Efetuando explicitamente a derivação do termo não integral,

$$\frac{d}{d\phi} \left[ V_0^2 + 2p\varepsilon \left( \cos \phi - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \phi - 1 \right) \right] = -2p\varepsilon \sin \phi - 2\mu p \cos \phi, \quad (2.137)$$

chega-se, após reorganização dos termos, à equação diferencial ordinária linear de primeira ordem:

$$y'(\phi) + 2\mu \operatorname{si}_{CH}(\phi, \varepsilon) y(\phi) = -2p\varepsilon \sin \phi - 2\mu p \cos \phi, \quad (2.138)$$

A Eq. (2.138) possui a forma padrão de uma EDO linear de primeira ordem e pode ser resolvida pelo método do fator integrante [19]. O fator integrante associado é definido por:

$$\mathcal{I}(\phi) = \exp \left( 2\mu \int_0^\phi \operatorname{si}_{CH}(u, \varepsilon) du \right), \quad (2.139)$$

o qual, ao multiplicar toda a equação diferencial, permite escrever o membro esquerdo como a derivada total do produto  $\mathcal{I}(\phi) y(\phi)$ , ou seja,

$$\mathcal{I}(\phi) y'(\phi) + 2\mu \operatorname{si}_{CH}(\phi, \varepsilon) \mathcal{I}(\phi) y(\phi) = \mathcal{I}(\phi) (-2p\varepsilon \sin \phi - 2\mu p \cos \phi), \quad (2.140)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{d\phi} [\mathcal{I}(\phi) y(\phi)] = \mathcal{I}(\phi) (-2p\varepsilon \sin \phi - 2\mu p \cos \phi), \quad (2.141)$$

Definindo-se a função auxiliar:  $f'(\phi') = -2p\varepsilon \sin \phi' - 2\mu p \cos \phi'$ . Integra-se a expressão resultante no intervalo  $[0, \phi]$ . A aplicação direta do *Teorema Fundamental do Cálculo*, [18], conduz a:

$$[\mathcal{I}(\phi') y(\phi')]_0^\phi = \int_0^\phi \mathcal{I}(\phi') f'(\phi') d\phi'. \quad (2.142)$$

Ademais, a avaliação explícita do termo à esquerda fornece:

$$\mathcal{I}(\phi) y(\phi) - \mathcal{I}(0) y(0) = \int_0^\phi \mathcal{I}(\phi') f'(\phi') d\phi', \quad (2.143)$$

pela definição do fator integrante, dada por Eq. (2.139), segue-se imediatamente que:  $\mathcal{I}(0) = \exp(0) = 1$ , uma vez que a integral definida com limites coincidentes é nula. Consequentemente, o termo  $\mathcal{I}(0) y(0)$  reduz-se simplesmente a  $y(0)$ . Desse modo, a Eq. (2.143) pode ser reescrita:

$$\mathcal{I}(\phi) y(\phi) = y(0) + \int_0^\phi \mathcal{I}(\phi') f'(\phi') d\phi', \quad (2.144)$$

isolando-se  $y(\phi)$  em (2.144), chega-se a:

$$y(\phi) = \mathcal{I}(\phi)^{-1} y(0) + \mathcal{I}(\phi)^{-1} \int_0^\phi \mathcal{I}(\phi') f'(\phi') d\phi'. \quad (2.145)$$

O termo  $\mathcal{I}(\phi)^{-1}$  que multiplica a integral pode entrar nela, pois não depende de  $\phi'$ . Nesse sentido, a razão  $\mathcal{I}(\phi)^{-1}\mathcal{I}(\phi')$  pode ser simplificada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\phi)^{-1}\mathcal{I}(\phi') &= \exp\left(-2\mu \int_0^\phi \text{si}_{CH}(u, \varepsilon) du\right) \exp\left(2\mu \int_0^{\phi'} \text{si}_{CH}(u, \varepsilon) du\right) \\ &= \exp\left(-2\mu \int_{\phi'}^\phi \text{si}_{CH}(u, \varepsilon) du\right). \end{aligned} \quad (2.146)$$

Introduz-se, portanto, a *função de propagação*  $G(\phi, \phi'; \varepsilon)$ , também referida como *núcleo auxiliar* por [16], cuja finalidade é codificar de maneira compacta o efeito “acumulado” do termo dissipativo proporcional a  $\text{si}_{CH}$  ao longo do intervalo angular  $[\phi', \phi]$ . Em outras palavras,  $G(\phi, \phi'; \varepsilon)$  desempenha o papel de um *fator de transporte multiplicativo*: dado um estado conhecido em  $\phi'$ , ela prescreve como esse estado é reponderado ao ser “evoluído” até  $\phi$  sob a ação do coeficiente efetivo  $2\mu \text{si}_{CH}$ . Essa interpretação fica evidente ao notar que  $G$  depende apenas dos limites  $\phi'$  e  $\phi$  e da integral do coeficiente ao longo do caminho, e satisfaz as propriedades usuais de um propagador escalar, em particular  $G(\phi, \phi; \varepsilon) = 1$  e, para  $\phi' \leq \phi$ ,  $G(\phi, \phi'; \varepsilon)$  atua como um fator de amortecimento determinado pela intensidade do atrito ( $\mu$ ) e pela geometria embutida em  $\text{si}_{CH}$  [16, 20]. Assim:

$$G(\phi, \phi'; \varepsilon) \equiv \exp\left(-2\mu \int_{\phi'}^\phi \text{si}_{CH}(u, \varepsilon) du\right), \quad 0 \leq \phi' \leq \phi, \quad (2.147)$$

de modo que (2.145) assume a forma:

$$y(\phi) = y(0) G(\phi, 0; \varepsilon) + \int_0^\phi G(\phi, \phi'; \varepsilon) f'(\phi') d\phi'. \quad (2.148)$$

Nesta etapa, reescreve-se a solução (2.148) de maneira a recuperar uma forma integral em termos de  $f(\phi)$  (e não de  $f'(\phi)$ ), o que é particularmente conveniente para comparação com a formulação resolvente padrão de Volterra. Para isso, integra-se por partes o termo integral:

$$\int_0^\phi G(\phi, \phi'; \varepsilon) f'(\phi') d\phi' = \left[G(\phi, \phi'; \varepsilon) f(\phi')\right]_0^\phi - \int_0^\phi f(\phi') \frac{\partial}{\partial \phi'} G(\phi, \phi'; \varepsilon) d\phi'. \quad (2.149)$$

calcula-se agora  $\partial G/\partial \phi'$ . A partir de (2.147),

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \phi'} G(\phi, \phi'; \varepsilon) &= G(\phi, \phi'; \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \phi'} \left( -2\mu \int_{\phi'}^{\phi} \text{si}_{CH}(u, \varepsilon) du \right) \\
 &= G(\phi, \phi'; \varepsilon) \left( -2\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \phi'} \int_{\phi'}^{\phi} \text{si}_{CH}(u, \varepsilon) du \right) \\
 &= G(\phi, \phi'; \varepsilon) \left( -2\mu \cdot \left[ -\text{si}_{CH}(\phi', \varepsilon) \right] \right) \\
 &= 2\mu \text{si}_{CH}(\phi', \varepsilon) G(\phi, \phi'; \varepsilon).
 \end{aligned} \tag{2.150}$$

Substituindo-se (2.150) em (2.149), obtém-se:

$$\int_0^{\phi} G(\phi, \phi'; \varepsilon) f'(\phi') d\phi' = \left[ G(\phi, \phi'; \varepsilon) f(\phi') \right]_0^{\phi} - 2\mu \int_0^{\phi} \text{si}_{CH}(\phi', \varepsilon) G(\phi, \phi'; \varepsilon) f(\phi') d\phi'. \tag{2.151}$$

Avaliando os termos, Como  $G(\phi, \phi; \varepsilon) = \exp(0) = 1$ , tem-se:

$$\left[ G(\phi, \phi'; \varepsilon) f(\phi') \right]_0^{\phi} = G(\phi, \phi; \varepsilon) f(\phi) - G(\phi, 0; \varepsilon) f(0) = f(\phi) - G(\phi, 0; \varepsilon) f(0). \tag{2.152}$$

Inserindo (2.151) e (2.152) em (2.148), segue que:

$$\begin{aligned}
 y(\phi) &= y(0) G(\phi, 0; \varepsilon) + \left[ f(\phi) - G(\phi, 0; \varepsilon) f(0) \right] - 2\mu \int_0^{\phi} \text{si}_{CH}(\phi', \varepsilon) G(\phi, \phi'; \varepsilon) f(\phi') d\phi' \\
 &= f(\phi) + \left[ y(0) - f(0) \right] G(\phi, 0; \varepsilon) - 2\mu \int_0^{\phi} \text{si}_{CH}(\phi', \varepsilon) G(\phi, \phi'; \varepsilon) f(\phi') d\phi'.
 \end{aligned} \tag{2.153}$$

Além disso, no presente problema, por construção,

$$y(0) = V^2(0) = V_0^2 \quad \text{e} \quad f(0) = V_0^2 + 2p\varepsilon(\cos 0 - 1) - 2\mu p \sin 0 = V_0^2. \tag{2.154}$$

Portanto, obtém-se finalmente a forma resolvente:

$$y(\phi) = f(\phi) - 2\mu \int_0^{\phi} R_H(\phi, \phi'; \varepsilon) f(\phi') d\phi', \tag{2.155}$$

em que se identifica o núcleo resolvente:

$$R_H(\phi, \phi'; \varepsilon) \equiv \text{si}_{CH}(\phi', \varepsilon) G(\phi, \phi'; \varepsilon) = \text{si}_{CH}(\phi', \varepsilon) \exp \left( -2\mu \int_{\phi'}^{\phi} \text{si}_{CH}(u, \varepsilon) du \right). \tag{2.156}$$

Voltando à variável física,  $y(\phi) = V^2(\phi)$ , a solução pode ser apresentada como:

$$\begin{aligned}
 V^2(\phi) &= \left[ V_0^2 + 2p\varepsilon \left( \cos \phi - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \phi - 1 \right) \right] - 2\mu \int_0^{\phi} \text{si}_{CH}(\phi', \varepsilon) \exp \left( -2\mu \int_{\phi'}^{\phi} \text{si}_{CH}(u, \varepsilon) du \right) \\
 &\quad \times \left[ V_0^2 + 2p\varepsilon \left( \cos \phi' - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \phi' - 1 \right) \right] d\phi'.
 \end{aligned} \tag{2.157}$$

A expressão (2.157) é a reescrita da solução obtida via fator integrante na forma de uma equação integral de Volterra com núcleo resolvente  $R_H$ . Portanto, é imediatamente adequada para comparação direta com formulações integrais de referência e para implementação numérica, mediante, é claro, a aplicação das condições críticas.

Após obter a representação integral da solução no caso elíptico com atrito, dada pela (2.157), torna-se natural utilizar os critérios mínimos que garantam que a partícula seja capaz de completar a volta no *loop*. É importante destacar que, assim como [6], usaremos as mesmas condições críticas — Condições 1, 2 e 3 — estabelecidas na Seção 2.3.3 para o caso do *looping* circular.

Em particular, a primeira condição crítica (Condição 1, cf. Seção 2.3.3) está associada à exigência de que a velocidade permaneça estritamente positiva no primeiro quarto do *loop*, isto é,

$$V(\phi) > 0, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}. \quad (2.158)$$

O caso fronteiroço corresponde à situação crítica em que a velocidade se anula exatamente no extremo superior do intervalo considerado. Assim, impõe-se a condição:

$$V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (2.159)$$

Partindo da solução integral geral, na Eq. (2.157), avaliamos essa expressão em  $\phi = \pi/2$ . A imposição da condição crítica (2.159) conduz a:

$$\begin{aligned} 0 = & \left[ V_0^2 + 2p\varepsilon \left( \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] \\ & - 2\mu \int_0^{\pi/2} \text{sic}_H(\phi', \varepsilon) \exp \left( -2\mu \int_{\phi'}^{\pi/2} \text{sic}_H(u, \varepsilon) du \right) \left[ V_0^2 + 2p\varepsilon \left( \cos \phi' - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \phi' - 1 \right) \right] d\phi'. \end{aligned} \quad (2.160)$$

Nota-se que o termo fora da integral pode ser simplificado, segue então que:

$$\begin{aligned} 2p\varepsilon \left( \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \frac{\pi}{2} - 1 \right) &= 2p\varepsilon \left( 0 - \frac{\mu}{\varepsilon} - 1 \right) \\ &= -2p\mu - 2p\varepsilon = -2p(\mu + \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.161)$$

Substituindo-se o resultado da Eq. (2.161) na Eq. (2.160) e rearranjando-se os termos, de modo a isolar no lado esquerdo a velocidade inicial  $V_0^2$  e no lado direito os termos dependentes da trajetória, obtém-se a equação crítica associada à primeira condição:

$$\boxed{V_0^2 = 2p(\mu + \varepsilon) + 2\mu \int_0^{\pi/2} R_H\left(\frac{\pi}{2}, \phi'\right) \left[ V_0^2 + 2p\varepsilon \left( \cos \phi' - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \phi' - 1 \right) \right] d\phi'}. \quad (2.162)$$

A Eq. (2.162) estabelece, para valores fixos dos parâmetros  $\mu$  e  $\varepsilon$ , o limiar mínimo da velocidade inicial  $V_0$  para cumprir a primeira condição.

A segunda condição (Condição 2, cf. Seção 2.3.3), como sabe-se, está associada à perda de contato entre a partícula e a pista. A condição física necessária para a manutenção do contato é, portanto:

$$F_N(\phi) > 0, \quad \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}. \quad (2.163)$$

O ponto mais crítico desse intervalo, seguindo [6], é o topo do *looping* elíptico horizontal, correspondente a  $\phi = \pi$ . Assim, o caso limítrofe de contato contínuo é definido por:

$$F_N(\pi) = 0. \quad (2.164)$$

Partindo da Eq. (2.99), que relaciona a força normal à aceleração centrípeta ao longo de uma trajetória plana de raio de curvatura  $\rho(\phi)$ , impõe-se a condição crítica dada pela Eq. (2.164) na Eq. (2.99) e assumindo-se  $m \neq 0$ , obtém-se a expressão geral para a velocidade quadrada mínima necessária no topo para a manutenção do contato:

$$v^2(\pi) = -g\rho(\pi) \cos \alpha(\pi). \quad (2.165)$$

Resta-se, portanto, determinar explicitamente os valores de  $\rho(\pi)$  e  $\cos \alpha(\pi)$ . No que diz respeito ao ângulo entre a direção tangente à trajetória e à horizontal, utiliza-se as definições:

$$\cos \alpha_H(\phi) = \frac{\gamma}{\varepsilon Q_H(\phi)}, \quad \gamma = \text{sig}(\cos \phi), \quad Q_H(\phi) = \sqrt{\tan^2 \phi + \varepsilon^{-2}}. \quad (2.166)$$

no topo da trajetória,  $\phi = \pi$ , tem-se  $\cos \pi = -1$ , de modo que  $\gamma = -1$ , e como  $\tan \pi = 0$ , segue que:

$$Q_H(\pi) = \varepsilon^{-1}. \quad (2.167)$$

Substituindo-se esses resultados na Eq. (2.166), chega-se a:

$$\cos \alpha(\pi) = -1. \quad (2.168)$$

Esse resultado é fisicamente esperado, uma vez que, no topo do *loop*, a direção tangente ao trilho aponta no sentido contrário em relação ao sentido positivo da direção horizontal.

O raio de curvatura da elipse horizontal é dado pela Eq. (2.124), nesse sentido, avaliando essa expressão em  $\phi = \pi$ , para o qual  $|\cos \pi| = 1$  e  $Q_H(\pi) = \varepsilon^{-1}$ , encontra-se:

$$\rho(\pi) = \frac{Rp}{\varepsilon}. \quad (2.169)$$

Substituindo-se as Eqs. (2.168) e (2.169) na Eq. (2.165), resulta em:

$$v^2(\pi) = \frac{gRp}{\varepsilon}. \quad (2.170)$$

Na notação adimensional empregada ao longo deste trabalho, em que  $V^2 \equiv v^2/(gR)$ , a condição crítica de contato no topo assume a forma:

$$V^2(\pi) = \frac{p}{\varepsilon}. \quad (2.171)$$

Para traduzir essa condição em uma restrição sobre a velocidade inicial  $V_0$ , utiliza-se a solução integral geral para  $V^2(\phi)$  dada pela Eq. (2.157), avaliada em  $\phi = \pi$ . Utilizando as igualdades  $\cos \pi = -1$  e  $\sin \pi = 0$ , e impondo-se, por fim, a condição crítica (2.171), obtém-se a equação integral que define o limiar crítico da velocidade inicial:

$$V_0^2 = \frac{p}{\varepsilon} + 4p\varepsilon + 2\mu \int_0^\pi R_H(\pi, \phi') \left[ V_0^2 + 2p\varepsilon \left( \cos \phi' - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \phi' - 1 \right) \right] d\phi'. \quad (2.172)$$

Além disso, mesmo que a partícula consiga transpor o topo, a dissipação de energia ao longo do percurso pode ser suficiente para impedir que ela complete a volta. O que leva à interrupção do movimento durante a descida final, antes de retornar ao ponto inicial. Essa situação é evitada se, e somente se, a velocidade permanecer estritamente positiva no último quarto da trajetória, isto é,

$$V(\phi) > 0, \quad \frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi. \quad (2.173)$$

Caso a condição dada pela Eq. (2.173) não seja satisfeita, existe um ponto  $\phi \in (3\pi/2, 2\pi)$  no qual a velocidade se anula, caracterizando-se uma parada na descida final, a saber, essa é a exata mesma condição 3 do caso circular. O caso limítrofe que separa os regimes em que o *loop* é completado, daqueles em que o movimento se interrompe prematuramente, corresponde à situação crítica em que a velocidade da partícula se anula exatamente ao final do percurso. Isto é, no ponto em que  $\phi = 2\pi$ . Impõe-se, portanto, a condição:

$$V(2\pi) = 0. \quad (2.174)$$

Para obter a restrição correspondente sobre a velocidade inicial, parte-se da solução integral geral para a velocidade adimensional ao longo da trajetória, dada pela Eq. (2.157), e avalia-se essa expressão em  $\phi = 2\pi$ . A imposição da condição crítica da Eq. (2.174) conduz a:

$$0 = V_0^2 + 2p\varepsilon \left( \cos 2\pi - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin 2\pi - 1 \right) - 2\mu \int_0^{2\pi} R_H(2\pi, \phi') \left[ V_0^2 + 2p\varepsilon \left( \cos \phi' - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \phi' - 1 \right) \right] d\phi'. \quad (2.175)$$

Nota-se que o termo algébrico externo à integral simplifica-se imediatamente, o que resulta em:

$$2p\varepsilon \left( \cos 2\pi - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin 2\pi - 1 \right) = 2p\varepsilon(1 - 0 - 1) = 0. \quad (2.176)$$

Consequentemente, a condição crítica reduz-se a uma relação integral que envolve exclusivamente o histórico dissipativo ao longo de toda a trajetória:

$$V_0^2 = 2\mu \int_0^{2\pi} R_H(2\pi, \phi') \left[ V_0^2 + 2p\varepsilon \left( \cos \phi' - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \phi' - 1 \right) \right] d\phi'. \quad (2.177)$$

A Eq. (2.177) define a *terceira condição crítica* do caso elíptico horizontal com atrito. As três análises precedentes permitem caracterizar de forma completa os mecanismos de falha do movimento no *loop* horizontal elíptico com atrito, conduzindo a três condições críticas distintas, cada uma associada a uma restrição específica sobre a velocidade inicial  $V_0$ .

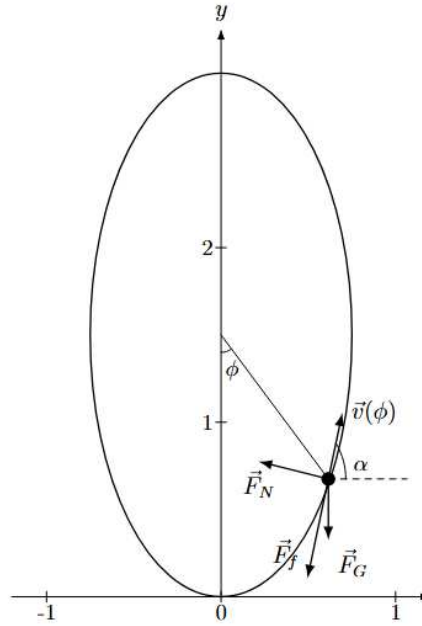
Do ponto de vista matemático, essas três condições assumem a forma de equações integrais não lineares para  $V_0$ , nas quais a velocidade inicial aparece tanto de maneira explícita quanto no interior dos termos integrais, por meio do núcleo resolvente  $R_H$ . Em virtude dessa dependência implícita e da presença de integrais não elementares, não é possível obter expressões analíticas fechadas para os valores críticos de  $V_0$ , diferentemente do caso circular com atrito.

Consequentemente, a determinação quantitativa das velocidades iniciais críticas associadas a cada mecanismo de falha deve ser realizada por meio de um *métodos numéricos*. A comparação entre os três valores críticos obtidos permite, então, identificar qual condição é a mais restritiva em cada região do espaço de parâmetros, estabelecendo de forma completa o critério mínimo para que o *loop* elíptico horizontal seja efetivamente completado mesmo com a presença de atrito.

#### 2.3.5.2 A Dinâmica da Partícula em um Loop Elíptico Vertical com Atrito

Considera-se, agora, o caso da elipse vertical, isto é, aquela cujo semi-eixo maior se encontra disposto ao longo da direção vertical. A trajetória da partícula permanece descrita pela parametrização apresentada na Eq. (2.87), que será empregada nesta etapa da análise.

Figura 9 – Looping Elíptico Vertical Com Atrito



Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

Tal como no caso horizontal, a Eq. (2.99) permanece válida, e a força de atrito cinético é dada por:

$$F_f(\phi) = \mu \left[ mg \cos \alpha_V(\phi) + \frac{mv^2(\phi)}{\rho_V(\phi)} \right]. \quad (2.178)$$

Para determinar a projeção da força gravitacional na direção normal, é necessário obter uma expressão para  $\cos \alpha_V(\phi)$ , em que  $\alpha_V(\phi)$  é o ângulo que a tangente à trajetória (direção da velocidade) faz com o eixo horizontal. A inclinação da tangente é dada por:

$$\tan \alpha_V(\phi) = \frac{dy/d\phi}{dx/d\phi}. \quad (2.179)$$

Assim, o ângulo  $\alpha_V(\phi)$  entre a tangente à trajetória e o eixo horizontal satisfaz  $\tan \alpha_V(\phi) = \varepsilon^{-1} \tan \phi$ , de onde, por procedimento inteiramente análogo ao do caso horizontal, obtém-se:

$$\boxed{\cos \alpha_V(\phi) = \frac{\gamma}{Q_V(\phi)}}, \quad (2.180)$$

em que  $\gamma = \text{sgn}(\cos \phi)$  e o fator geométrico do caso vertical é definido como:

$$Q_V(\phi) = \sqrt{\varepsilon^{-2} \tan^2 \phi + 1}. \quad (2.181)$$

Note que, em contraste com o caso horizontal,  $\cos \alpha_V$  não carrega o fator  $\varepsilon^{-1}$ , o que reflete a diferente orientação do semi-eixo maior e produzirá consequências diretas no balanço energético.

Além disso, para encontrar o raio de curvatura no caso do *loop* em formato elíptico vertical, o numerador da curvatura é idêntico ao do caso horizontal:

$$x'y'' - y'x'' = (Rp\varepsilon \cos \phi)(Rp \cos \phi) + (Rp \sin \phi)(Rp\varepsilon \sin \phi) = R^2 p^2 \varepsilon. \quad (2.182)$$

Por outro lado, o denominador, por sua vez, assume a forma:

$$(x'^2 + y'^2)^{3/2} = [R^2 p^2 (\varepsilon^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi)]^{3/2} = R^3 p^3 (\varepsilon^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi)^{3/2}. \quad (2.183)$$

Utilizando-se a identidade  $\varepsilon^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = \varepsilon^2 \cos^2 \phi Q_V(\phi)^2$ , obtém-se o raio de curvatura:

$$\rho_V(\phi) = Rp \varepsilon^2 |\cos \phi|^3 Q_V(\phi)^3, \quad (2.184)$$

e o elemento de arco:

$$ds_V = \sqrt{dx^2 + dy^2} = pR \varepsilon |\cos \phi| Q_V(\phi) d\phi. \quad (2.185)$$

Reescreve-se, agora, o trabalho realizado pela força de atrito em função do parâmetro angular  $\phi$ , substituí-se na Eq. (2.178) as expressões obtidas para  $\cos \alpha_V(\phi)$ , para o raio de curvatura  $\rho_V(\phi)$  e para o elemento de arco  $ds_V$ . Dessa forma, a integral do trabalho da força de atrito assume a forma:

$$\int_0^\phi F_f ds_V = \mu m \int_0^\phi \left( g \frac{\gamma}{Q_V} + \frac{v^2(\phi)}{pR \varepsilon^2 |\cos \phi|^3 Q_V^3} \right) pR \varepsilon |\cos \phi| Q_V d\phi. \quad (2.186)$$

O primeiro termo, de natureza gravitacional, carrega agora um fator  $\varepsilon$  explícito — ausente no caso horizontal —, que decorre diretamente da orientação vertical do semi-eixo maior.

Substituindo-se a Eq. (2.186) na equação de balanço energético, em que a variação de altura ao longo da trajetória é  $\Delta y = Rp(1 - \cos \phi)$ , e introduzindo-se a velocidade reduzida  $V(\phi) = v(\phi)/\sqrt{gR}$ ,  $V_0 = v_0/\sqrt{gR}$ , chega-se à equação integral de Volterra de segunda espécie para o caso vertical:

$$\boxed{V^2(\phi) = V_0^2 + 2p(\cos \phi - \varepsilon \mu \sin \phi - 1) - 2\mu \int_0^\phi V^2(\phi') \text{si}_{CV}(\phi', \varepsilon) d\phi'}, \quad (2.187)$$

em que o fator geométrico do caso vertical é:

$$\text{si}_{CV}(\phi, \varepsilon) = (\varepsilon^{-1} \sin^2 \phi + \varepsilon \cos^2 \phi)^{-1}. \quad (2.188)$$

A comparação direta com a Eq. (2.134) revela a dualidade entre os dois casos: a substituição  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^{-1}$  em  $\text{si}_{CH}$  reproduz  $\text{si}_{CV}$ . Essa equação coincide com o resultado apresentado no apêndice do artigo de referência [6].

A resolução da Eq. (2.187) segue exatamente o mesmo procedimento do caso horizontal: derivação em  $\phi$  para eliminar o termo integral, aplicação do método do fator

integrante e integração por partes para recuperar a forma resolvente. Esses passos, detalhados na subseção anterior, conduzem à EDO:

$$y'(\phi) + 2\mu \text{si}_{CV}(\phi, \varepsilon) y(\phi) = -2p \sin \phi - 2\mu p \varepsilon \cos \phi, \quad (2.189)$$

sendo  $y(\phi) \equiv V^2(\phi)$ , e à solução na forma resolvente:

$$V^2(\phi) = [V_0^2 + 2p(\cos \phi - \varepsilon \mu \sin \phi - 1)] - 2\mu \int_0^\phi \text{si}_{CV}(\phi', \varepsilon) \exp\left(-2\mu \int_{\phi'}^\phi \text{si}_{CV}(u, \varepsilon) du\right) [V_0^2 + 2p(\cos \phi' - \varepsilon \mu \sin \phi' - 1)] d\phi', \quad (2.190)$$

identifica-se, assim, o núcleo resolvente do caso vertical:

$$R_V(\phi, \phi'; \varepsilon) \equiv \text{si}_{CV}(\phi', \varepsilon) \exp\left(-2\mu \int_{\phi'}^\phi \text{si}_{CV}(u, \varepsilon) du\right). \quad (2.191)$$

Com a solução (2.190) estabelecida, passamos à determinação das condições críticas. Como no caso horizontal, identificam-se três mecanismos distintos de falha, cada um impondo uma restrição sobre a velocidade inicial  $V_0$ .

A primeira condição crítica (Condição 1), associada à parada da partícula no primeiro quarto da trajetória ascendente, é imposta pela exigência  $V(\pi/2) = 0$ . Avaliando-se a Eq. (2.190) em  $\phi = \pi/2$  e utilizando-se  $\cos(\pi/2) = 0$ ,  $\sin(\pi/2) = 1$ , encontra-se:

$$V_0^2 = 2p(1 + \varepsilon \mu) + 2\mu \int_0^{\pi/2} R_V\left(\frac{\pi}{2}, \phi'; \varepsilon\right) [V_0^2 + 2p(\cos \phi' - \varepsilon \mu \sin \phi' - 1)] d\phi'. \quad (2.192)$$

O limiar sem atrito deste caso,  $2p$ , difere do correspondente horizontal,  $2p\varepsilon$ , refletindo a maior energia potencial que a partícula necessita vencer na configuração vertical.

A segunda condição crítica (Condição 2) decorre da imposição  $F_N(\pi) = 0$ , ou seja, perda de contato no topo. Para a elipse vertical, avaliando-se as expressões geométricas em  $\phi = \pi$  — em que  $\tan \pi = 0$ ,  $|\cos \pi| = 1$  e, portanto,  $Q_V(\pi) = 1$  —, alcança-se:

$$\cos \alpha_V(\pi) = -1, \quad \rho_V(\pi) = Rp\varepsilon^2. \quad (2.193)$$

Substituindo-se na condição de perda de contato,  $v^2(\pi) = -g\rho_V(\pi) \cos \alpha_V(\pi)$ , e passando para a forma adimensional, a velocidade crítica no topo é:

$$V^2(\pi) = p\varepsilon^2. \quad (2.194)$$

Este resultado contrasta com o do caso horizontal,  $V^2(\pi) = p/\varepsilon$ : enquanto lá a curvatura no topo é  $Rp/\varepsilon$ , na elipse vertical ela vale  $Rp\varepsilon^2$ , de modo que elipses muito alongadas verticalmente impõe-se uma condição de contato muito mais severa. Utilizando a Eq. (2.194) na solução (2.190) com  $\cos \pi = -1$  e  $\sin \pi = 0$ :

$$V_0^2 = p\varepsilon^2 + 4p + 2\mu \int_0^\pi R_V(\pi, \phi'; \varepsilon) [V_0^2 + 2p(\cos \phi' - \varepsilon \mu \sin \phi' - 1)] d\phi'. \quad (2.195)$$

Por fim, a terceira condição crítica (Condição 3), associada à parada da partícula durante a descida final, é imposta por  $V(2\pi) = 0$ . O termo algébrico externo à integral se anula trivialmente, pois  $\cos 2\pi - 1 = 0$  e  $\sin 2\pi = 0$ , o que é geometricamente natural: a partícula retorna à mesma altura de onde partiu. A condição crítica resulta assim em:

$$V_0^2 = 2\mu \int_0^{2\pi} R_V(2\pi, \phi'; \varepsilon) [V_0^2 + 2p(\cos \phi' - \varepsilon\mu \sin \phi' - 1)] d\phi', \quad (2.196)$$

que expressa que toda a energia cinética inicial deve ser exatamente consumida pelo atrito ao longo da volta completa.

As Eqs. (2.192), (2.195) e (2.196) possuem a mesma estrutura integral não linear identificada no caso horizontal, e pela mesma razão não admitem solução analítica fechada. A determinação quantitativa dos limiares críticos no espaço de parâmetros  $(\mu, \varepsilon)$  é realizada numericamente, conforme descrito no Capítulo 3.

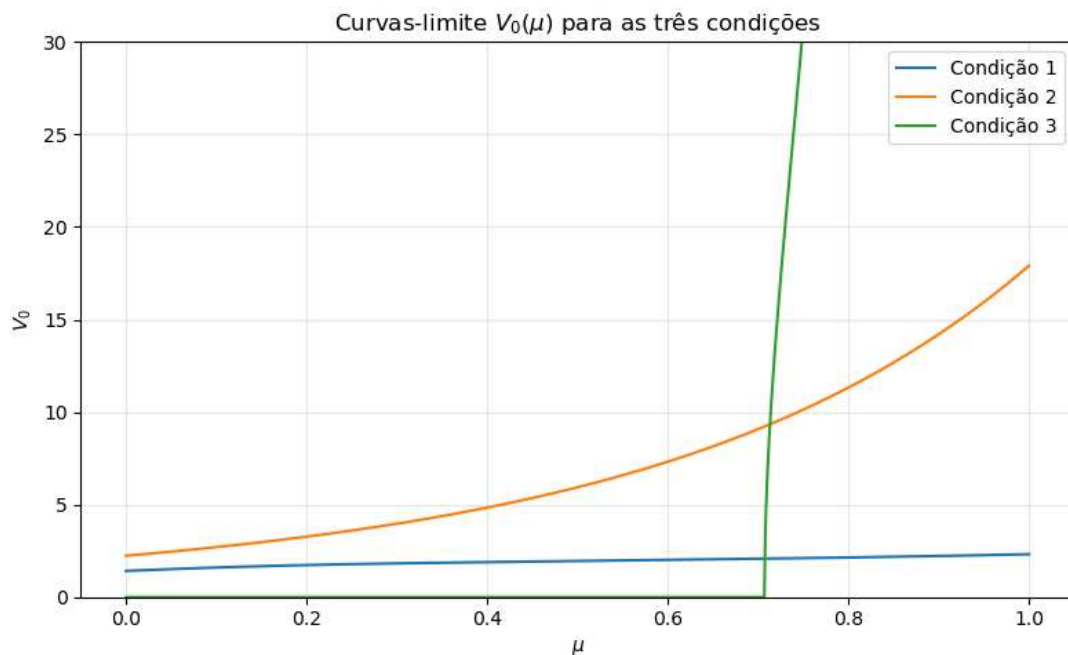
### 3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Apresentam-se, neste capítulo, os resultados obtidos a partir das condições críticas de movimento para os diferentes cenários investigados, com ênfase na interpretação física das soluções encontradas. O objetivo é compreender como a interação entre força gravitacional, força de atrito e geometria da trajetória determina o sucesso ou a falha do movimento em cada caso.

#### 3.1 A ANÁLISE DO LOOP CIRCULAR COM ATRITO

No caso do *loop* circular com atrito cinético constante, a equação integral de Volterra se reduz a uma EDO linear de primeira ordem com solução analítica fechada (Eq. (2.57)), o que permite determinar explicitamente as três condições críticas sobre a velocidade inicial mínima  $V_0$  necessária à travessia completa do *looping*.

Figura 10 – Diagrama de fases delimitando quatro regiões no plano  $(\mu, V_0)$ , correspondentes a distintos regimes dinâmicos da partícula no loop circular.



Fonte: Elaborado pelos autores (2026), inspirado em [6].

A Figura 10, produzida com o código do Anexo A, reproduz com precisão as curvas do artigo de referência [6]. O movimento é viável somente quando  $V_0$  satisfaz simultaneamente todas as restrições, definindo um domínio de estabilidade dinâmica no plano  $(\mu, V_0)$ .

A Condição 1 delimita a parada prematura no primeiro quadrante: para  $\mu$  suficientemente alto, a dissipação acumulada anula a energia cinética antes que a partícula alcance a região superior. A Condição 2 caracteriza a perda de contato no semicírculo superior, quando a força normal se anula por insuficiência de aceleração centrípeta; ela é dominante para  $\mu \leq 0,7$ , impondo uma curva  $V_0(\mu)$  de crescimento moderado. A Condição 3 torna-se relevante apenas a partir de  $\mu \geq 0,7$ : mesmo após a transposição do topo, o atrito durante a descida final é suficiente para interromper o movimento no último quadrante, exigindo um crescimento exponencial de  $V_0$ . Esse cruzamento de dominância entre as Condições 2 e 3 é um resultado qualitativamente novo em relação ao caso conservativo e evidencia o caráter cumulativo da dissipação ao longo de toda a trajetória.

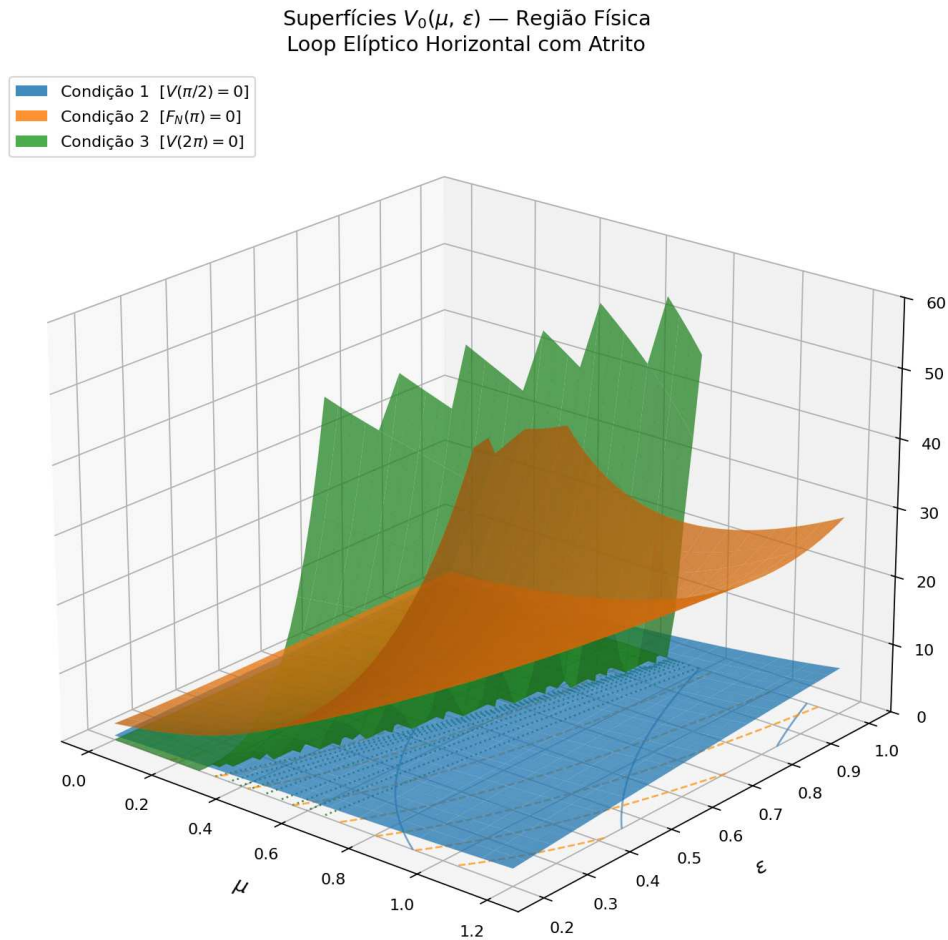
### 3.2 A ANÁLISE DO LOOP ELÍPTICO COM ATRITO

A introdução da geometria elíptica altera qualitativamente o problema: o raio de curvatura passa a depender da posição angular, eliminando a possibilidade de solução analítica fechada e exigindo tratamento numérico via integração pelo método do trapézio, detalhado nos Anexos B e C.

Os três mecanismos de falha identificados no caso circular permanecem presentes, mas passam a ser modulados pelo parâmetro de excentricidade  $\varepsilon$ . A condição crítica deixa de ser determinada apenas por critérios locais e passa a refletir a interação não linear entre geometria e dissipação: pequenas variações em  $\varepsilon$  podem deslocar significativamente o limiar mínimo de  $V_0$ . O caso circular é recuperado no limite  $\varepsilon \rightarrow 1$ , quando os semi-eixos se igualam e as equações retornam exatamente à forma da Seção 2.3.3.

A dependência simultânea de  $V_0$  com  $\mu$  e  $\varepsilon$  é sintetizada por uma superfície crítica no espaço tridimensional  $(\mu, \varepsilon, V_0)$ . No **Loop elíptico horizontal** é possível ver que na Fig. 11 a superfície da Condição 2 domina o espaço paramétrico para a maior parte dos valores de  $\mu$  e  $\varepsilon$ : o raio de curvatura no topo  $\rho_H(\pi) = Rp(\varepsilon)/\varepsilon$  cresce sem limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , pois  $p(\varepsilon)$  permanece finito enquanto  $1/\varepsilon$  diverge, exigindo velocidade centrípeta cada vez maior. A Condição 3 eleva-se acima das demais apenas para  $\mu$  alto, onde a dissipação acumulada ao longo da volta completa torna-se o fator limitante. A Condição 1 permanece a menos restritiva em toda a região física, pois a altura máxima do primeiro quarto,  $y(\pi/2) = Rp(\varepsilon)\varepsilon$ , é a menor entre todos os pontos críticos da trajetória.

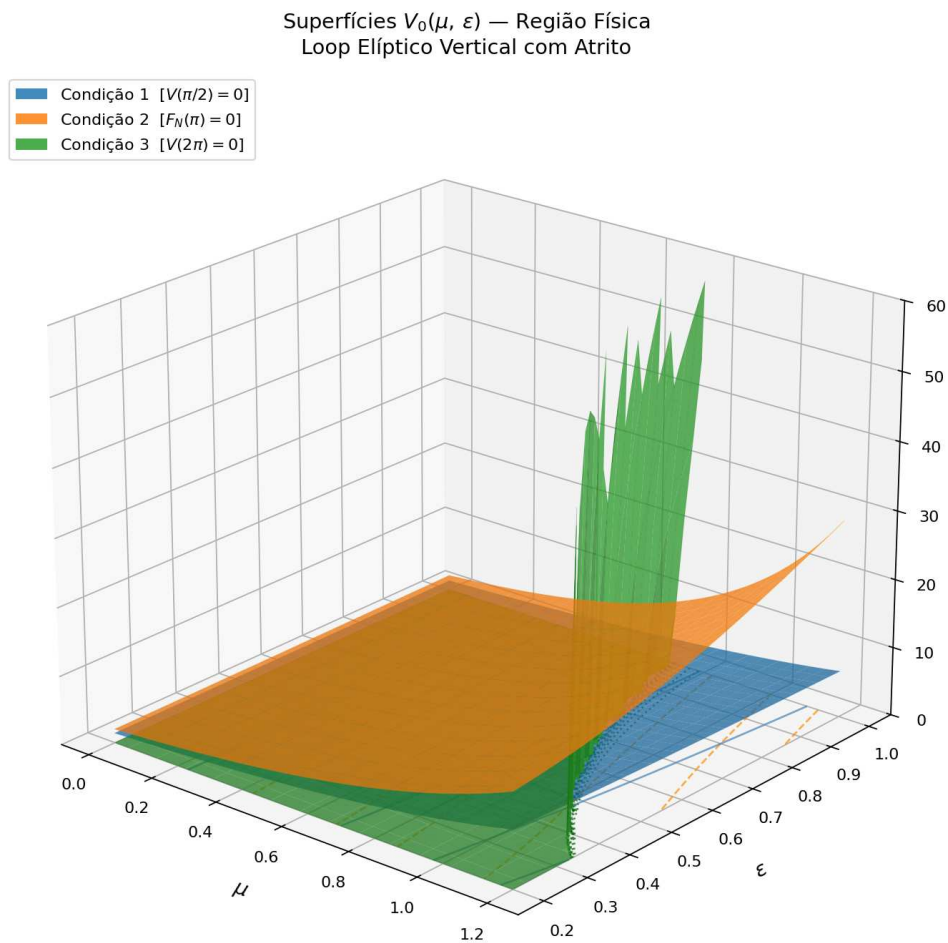
Figura 11 – Superfícies críticas  $V_0(\mu, \varepsilon)$  para as três condições de falha no loop elíptico horizontal com atrito.



Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

Já no **Loop elíptico vertical** é possível ver na Fig. 12 que a hierarquia entre as condições se altera em relação ao caso horizontal. O raio de curvatura no topo  $\rho_V(\pi) = Rp(\varepsilon)\varepsilon^2 \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o que *alivia* localmente a Condição 2 — pois  $V^2(\pi) \geq p(\varepsilon)\varepsilon^2$  torna-se trivialmente satisfeita para elipses estreitas. Contudo, esse alívio é contrabalançado por dois efeitos que se combinam: o fator geométrico  $p(\varepsilon)$  cresce de  $p(1) = 1$  para  $p(0) \approx 1,58$ , elevando a altura real do topo para  $\Delta y = 2Rp(\varepsilon) > 2R$  e exigindo maior energia para alcançá-lo; e a função geométrica  $siC_V(\phi, \varepsilon)$  apresenta picos intensos nas vizinhanças do topo e da base quando  $\varepsilon$  é pequeno, concentrando a dissipação nessas regiões e agravando severamente a Condição 3. É essa dupla penalidade — maior altura efetiva e dissipação concentrada — que explica o crescimento abrupto das superfícies críticas para combinações de  $\varepsilon$  pequeno e  $\mu$  moderado, visível na Figura 12.

Figura 12 – Superfícies críticas  $V_0(\mu, \varepsilon)$  para as três condições de falha no loop elíptico vertical com atrito.



Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

Em ambos os casos elípticos, a topologia não planar das superfícies evidencia o caráter não linear do sistema: regiões de maior inclinação indicam sensibilidade paramétrica elevada, enquanto regiões mais suaves correspondem a regimes de comportamento aproximadamente regular. Esse acoplamento entre dissipação, geometria e condições dinâmicas de contato não pode ser revelado pelo caso circular, cuja simetria oculta a dependência posicional de  $\rho$ .

### 3.2.1 Síntese Comparativa dos Quatro Cenários

A análise conjunta dos quatro cenários permite identificar duas tendências gerais que atravessam toda a progressão estudada.

A primeira é a **transição de dominância entre condições**: no regime conservativo, apenas a Condição 2 é relevante; com a introdução do atrito, a Condição 3 emerge para  $\mu$  alto; com a mudança de geometria para o elíptico vertical, a Condição 3

passa a dominar mesmo para  $\mu$  moderado, quando  $\varepsilon$  é pequeno. A Condição 1, em todos os casos, permanece a menos restritiva.

A segunda é o **papel ativo da geometria**: a progressão circular  $\rightarrow$  elíptico H  $\rightarrow$  elíptico V representa um aumento na severidade das restrições dinâmicas, mesmo a  $\mu$  fixo. A geometria não é um mero pano de fundo — ela modula diretamente a intensidade e a localização da dissipação ao longo da trajetória, através do raio de curvatura variável e do fator  $p(\varepsilon)$ . A Tabela 1 sintetiza esse panorama.

Tabela 1 – Comparação qualitativa entre as quatro configurações analisadas.

| Geometria           | Atrito | $\rho(\phi)$                                | Tipo de solução | Condição dominante                                                |
|---------------------|--------|---------------------------------------------|-----------------|-------------------------------------------------------------------|
| Circular            | Não    | $R$                                         | Algébrica       | Cond. 2                                                           |
| Circular            | Sim    | $R$                                         | Analítica       | Transição: Cond. 2 $\rightarrow$ 3<br>(limiar $\approx 0,7$ )     |
| Elíptico horizontal | Sim    | $pR\varepsilon^2  \cos \phi ^3 Q_H(\phi)^3$ | Numérica        | Transição: Cond. 2 $\rightarrow$ 3<br>(limiar $\approx 0,3-0,7$ ) |
| Elíptico vertical   | Sim    | $Rp\varepsilon^2  \cos \phi ^3 Q_V(\phi)^3$ | Numérica        | Transição: Cond. 2 $\rightarrow$ 3<br>(limiar $\approx 1,2-0,7$ ) |

Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

Portanto, o limiar de transição entre a Condição 2 e a Condição 3 apresenta comportamentos distintos dependendo da geometria do *loop*. No caso do *loop* circular, esse limiar permanece constante, em torno de 0,7. Para o *loop* elíptico horizontal, observa-se um comportamento crescente, variando aproximadamente de 0,3 até 0,7. Já no caso do *loop* elíptico vertical, o limiar apresenta comportamento decrescente, partindo de aproximadamente 1,2 e convergindo para cerca de 0,7.

### 3.2.2 A Sequência Didática Proposta

A partir dos fundamentos expostos nas seções anteriores, apresenta-se a sequência didática (SD) estruturada para o ensino da dinâmica de partículas em *loops*, organizada segundo os três níveis do currículo em espiral de Bruner e os respectivos modos de representação. A SD destina-se, primariamente, a estudantes de graduação em Física ou áreas correlatas, podendo ser adaptada para cursos técnicos de nível médio com supressão dos desenvolvimentos matemáticos mais avançados.

#### Nível 1 — Loop Circular sem Atrito (2 aulas de 50 min)

**Objetivos:** construir a base conceitual do problema, identificar as forças atuantes, compreender a condição de manutenção do contato e aplicar o princípio de conservação da energia mecânica.

Na primeira aula, o **estágio ativo** é viabilizado por meio da plataforma PhET [12]. O estudante configura um *loop* circular sem atrito e realiza as seguintes tarefas explo-

ratórias: (i) variar sistematicamente a altura de lançamento e registrar se a partícula completa o percurso; (ii) estimar a menor altura compatível com a conclusão do *loop*; (iii) observar, pelos gráficos de energia do simulador, como as formas de energia<sup>1</sup> se alternam ao longo da trajetória. O docente encerra essa etapa com uma discussão breve sobre a existência de um limiar energético mínimo para que a partícula consiga completar o *looping*.

O **estágio icônico** é conduzido na sequência: o estudante esboça o diagrama de forças no ponto mais alto do *loop*, identificando força gravitacional e força normal como únicas componentes radiais, e associa esse esboço aos vetores exibidos pelo simulador. A Fig. 4 do presente trabalho pode ser apresentada como sistematização dessa representação.

Na segunda aula, o **estágio simbólico** é consolidado. O docente aplica a Segunda Lei de Newton na direção radial, impõe  $F_N = 0N$  no topo e obtém  $v_{C,\min}(= \sqrt{gR})$ . Em seguida, utiliza a conservação da energia para determinar  $v_{B,\min}(= \sqrt{5gR})$  e  $h_{\min}(= 2,5R)$ , conforme a Seção 2.3.2. Recomenda-se a resolução de exercícios de fixação com variação dos parâmetros  $R$  e  $g$ .

### Nível 2 — Loop Circular com Atrito (3 aulas de 50 min)

*Objetivos:* estender a análise para o regime dissipativo, compreendendo como o atrito cinético modifica as condições críticas e conduz a uma equação integral para a velocidade.

O **estágio ativo** inicia a terceira aula: o estudante “ativa” o atrito no PhET e repete o procedimento exploratório do Nível 1. A questão orientadora proposta é: “Para um mesmo raio  $R$ , como o coeficiente de atrito  $\mu$  modifica a velocidade mínima necessária que a partícula teve ter na base do *loop*?” O docente instiga o estudante a perceber que a resposta não é trivialmente proporcional a  $\mu$ .

O **estágio icônico** segue com a apresentação da Fig. 10 (diagrama no plano  $(\mu, V_0)$ ). O estudante é convidado a identificar, no gráfico, as regiões de viabilidade dinâmica delimitadas pelas três curvas críticas, desenvolvendo a leitura interpretativa de representações gráficas de sistemas físicos não triviais.

As duas aulas seguintes dedicam-se ao **estágio simbólico**: o docente deriva a equação integral de Volterra de segunda espécie (Eq. (2.39)), demonstra sua equivalência a uma EDO linear de primeira ordem e obtém a solução analítica fechada pelo método do fator integrante (Eq. (2.57)). As três condições críticas — denominadas Condições 1, 2 e 3 na Seção 2.3.3 — são analisadas sequencialmente, e os respectivos limiares de  $V_0$  são determinados. Sugere-se que o estudante reproduza os cálculos de forma guiada antes de resolver problemas com parâmetros distintos.

### Nível 3 — Loop Elíptico com Atrito (3 aulas de 50 min)

*Objetivos:* aplicar os princípios consolidados nos níveis anteriores a uma

<sup>1</sup> Cinética, potencial e térmica.

geometria mais complexa, compreendendo o papel do raio de curvatura variável e a necessidade de tratamento numérico.

No **estágio ativo**, o estudante configura no PhET um *loop* aproximadamente elíptico (cf. as Fig. 2 e 3) e observa as diferenças qualitativas em relação ao caso circular: o ponto de maior risco de perda de contato desloca-se ou não, e se a energia mínima necessária passa a depender da forma da elipse. A questão orientadora é: “O que muda na dinâmica quando o loop deixa de ser circular?”

O **estágio icônico** é desenvolvido com a apresentação das superfícies tridimensionais  $V_0(\mu, \varepsilon)$  das Fig. 11 e 12. O estudante interpreta como variações em  $\varepsilon$  deslocam os limiares críticos, identificando regiões de maior sensibilidade e comparando as hierarquias entre as condições nos casos horizontal e vertical.

O **estágio simbólico** ocupa as duas últimas aulas: a parametrização da elipse, a aproximação de Ramanujan para o perímetro e a derivação da equação integral de Volterra para os casos horizontal (Eq. (2.134)) e vertical (Eq. (2.187)) devem ser expostas com detalhamento. O raio de curvatura variável  $\rho(\varphi)$  é calculado explicitamente e a solução numérica via método do trapézio é discutida em conjunto com os códigos dos Anexos A, B e C. O estudante é convidado a executar os códigos, variar  $\mu$  e  $\varepsilon$  e interpretar fisicamente as superfícies geradas, fechando o ciclo do currículo em espiral ao revisitar, com plena formalização matemática, o mesmo problema introduzido no Nível 1. A Tabela 2 sintetiza a organização da sequência.

Tabela 2 – Síntese da sequência didática proposta.

| Conteúdo                      | Aulas    | Atividades                                             | Repr.     |
|-------------------------------|----------|--------------------------------------------------------|-----------|
| Loop circular<br>(sem atrito) | 2        | PhET (exploração) + dedução de $v_{\min}$ e $h_{\min}$ | A → I → S |
| Loop circular<br>(com atrito) | 3        | PhET ( $\mu$ variável) + solução analítica             | A → I → S |
| Loop elíptico<br>(com atrito) | 3        | PhET ( $\varepsilon$ variável) + método numérico       | A → I → S |
| <b>Total</b>                  | <b>8</b> |                                                        |           |

**Legenda:** A = Representação ativa; I = Representação icônica; S = Representação simbólica.

Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como propósito revisar, organizar e reinterpretar os cálculos associados ao problema da partícula em *looping* — circular e elíptico — sob a ação da força gravitacional e força de atrito cinético, com ênfase na sistematização das condições críticas que determinam a completude do movimento. Partindo do caso circular clássico e avançando para a generalização elíptica, buscou-se consolidar a estrutura matemática do problema e explicitar os mecanismos físicos responsáveis pela estabilidade ou falha do movimento de *looping*.

No caso circular com atrito, foram retomadas e discutidas as condições associadas à parada prematura e à perda de contato, evidenciando-se a hierarquia entre esses mecanismos no plano paramétrico  $(V_0, \mu)$ . A análise permitiu organizar de forma clara o domínio de viabilidade dinâmica do sistema, destacando como a dissipação desloca os limiares críticos em relação ao caso conservativo clássico.

A extensão para o loop elíptico introduz dependência geométrica explícita na curvatura, eliminando a possibilidade de solução analítica fechada para o caso com atrito e exigindo tratamento numérico para a determinação da velocidade inicial mínimo. Embora os cálculos fundamentais já estivessem estabelecidos na literatura, sua reinterpretação no contexto comparativo entre os casos circular e elíptico permitiu explicitar o papel ativo da geometria na dinâmica do sistema.

Entre as contribuições deste trabalho está a construção da superfície crítica tridimensional no espaço  $(\mu, V_0, \varepsilon)$ , a qual sintetiza, em uma única representação, a interação entre dissipação e geometria variável. Essa visualização permite compreender de forma global a estrutura paramétrica do problema.

Assim, mais do que propor novos resultados analíticos, o estudo contribui para a consolidação conceitual do problema, organizando seus regimes críticos de maneira integrada e oferecendo uma representação geométrica que amplia a compreensão da estabilidade dinâmica em sistemas não conservativos. A abordagem adotada também estabelece base sólida para investigações futuras que explorem outras geometrias ou modelos dissipativos mais gerais. Dentre elas, incluindo uma análise para o caso em que o coeficiente de atrito  $(\mu)$  varia com a velocidade. E uma análise mais cuidadosa e geral sobre a Condição 2 em geometrias mais gerais.

Além disso, destacamos a contribuição pedagógica fornecida por esta pesquisa. De fato, ela adota como metodologia a utilização do currículo espiral de Bruner para analisar o problema de uma partícula percorrendo diferentes *loops*. Com isso, trouxemos à discussão uma classe de problemas — até onde sabemos — pouco ou não explorada em sua completude em livros-texto universitários. Assim, também se encontra entre nossas contribuições a exposição dessa classe de problemas de

forma sistemática, em língua portuguesa e com elevado detalhamento dos cálculos. Trata-se de um fato que, pelo que nos consta, é inédito na literatura da área em nível de graduação. Bem como, uma proposta de sequência didática do tema abordado em nível de Ensino Superior com possibilidade de adaptação para o Ensino Médio.

Ainda do ponto de vista pedagógico, as ferramentas computacionais desenvolvidas neste estudo, em especial as rotinas em Python utilizadas para a geração das superfícies críticas, apresentam um amplo potencial para a transposição didática no Ensino Superior. Sob a ótica da teoria de Jerome Bruner, esses recursos tecnológicos atuam como mediadores eficazes entre as representações ativa, icônica e simbólica. E portanto, um docente da disciplina de Mecânica Clássica pode empregar essas simulações numéricas para permitir que os estudantes manipulem, em tempo real, parâmetros como o coeficiente de atrito cinético ( $\mu$ ) e a excentricidade da trajetória ( $\epsilon$ ). Essa interação reduz a distância cognitiva entre a complexidade abstrata das equações integrais de Volterra e a intuição física do movimento, efetivando a proposta do currículo em espiral ao revisitar um problema elementar com um nível de profundidade, formalismo e complexidade matemática adequados à formação em nível de graduação.

## REFERÊNCIAS

- 1 CAMPOS, A. Algumas considerações sobre os movimentos dos corpos na antiguidade e na idade média: a teoria do ímpeto e a inércia. **Ensino & Multidisciplinaridade**, São Luís, MA, v. 8, n. 1, p. e0322, 2022. Citado na página 12.
- 2 HUYGENS, C. **Horologium Oscillatorium sive de Motu Pendulorum ad Horologia Aptato Demonstrationes Geometricae**. Paris: F. Muguet, 1673. Primeira edição. Citado na página 12.
- 3 FILHO, K. d. S. O.; SARAIVA, M. d. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013. Citado na página 12.
- 4 COHEN, I. B. **The Birth of a New Physics**. Revised and updated. New York: W. W. Norton & Company, 1985. Citado na página 12.
- 5 MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 13, 15, 16 e 19.
- 6 KŁOBUS, W. Motion on a vertical loop with friction. **American Journal of Physics**, v. 79, n. 9, p. 1008–1015, 2011. Citado 9 vezes nas páginas 14, 31, 32, 37, 45, 49, 50, 54 e 57.
- 7 HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física – Volume 1: Mecânica**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 14, 21, 23, 24, 28 e 29.
- 8 NUSSENZVEIG, H. M. **Física Básica: Mecânica**. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2013. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 24.
- 9 RAMALHO, F.; NICOLAU, N. G. F.; TOLEDO, P. **Tópicos de Física: Mecânica**. 9. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 28.
- 10 GASPAR, A.; HELOU, R. **Física: Volume Único**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016. Citado na página 14.
- 11 BRUNER, J. S. **The Process of Education**. Cambridge: Harvard University Press, 1960. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.
- 12 PhET Interactive Simulations. **Energy Skate Park: Basics (Simulação)**. 2026. <[https://phet.colorado.edu/sims/html/energy-skate-park/latest/energy-skate-park\\_all.html?locale=pt\\_BR](https://phet.colorado.edu/sims/html/energy-skate-park/latest/energy-skate-park_all.html?locale=pt_BR)>,. Acesso em: 23 fev. 2026. Citado 3 vezes nas páginas 18, 26 e 61.
- 13 MARION, J. B.; THORNTON, S. T. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. 5. ed. Belmont: Thomson Brooks/Cole, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.
- 14 LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018. ISBN 978-8588325860. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

- 15 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO, J. L. **Classical Mechanics**. 3. ed. San Francisco: Addison-Wesley, 2002. ISBN 978-0201657029. Citado na página 23.
- 16 KRESS, R. **Linear Integral Equations**. 3. ed. New York: Springer, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 32, 43 e 47.
- 17 NIEVES, O. **Solving an Integral Equation with a Simple Trick**. 2023. Medium, accessed: 2026-03-16. Disponível em: <<https://oscarnieves100.medium.com/solving-an-integral-equation-with-a-simple-trick-2dd6fa691596>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 45.
- 18 KLINE, M. **Calculus: An Intuitive and Physical Approach**. New York: Dover Publications, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 46.
- 19 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 10th. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2012. Citado na página 46.
- 20 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. **Mathematical Methods for Physicists**. 7. ed. Amsterdam: Academic Press, 2013. Citado na página 47.
- 21 GONZÁLEZ-CATALDO, F.; GUTIÉRREZ, G.; YÁÑEZ, J. M. Sliding down an arbitrary curve in the presence of friction. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 85, n. 2, p. 108–114, 2017. Citado na página 81.
- 22 NORDMARK, A. B.; ESSÉN, H. The comfortable roller coaster—on the shape of tracks with a constant normal force. **European Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 31, n. 6, p. 1307–1317, 2010. Citado na página 81.

## ANEXO A – IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DAS CURVAS-LIMITE PARA AS TRÊS CONDIÇÕES CRÍTICAS NO CASO CIRCULAR COM ATRITO

O presente anexo reúne o código numérico empregado na obtenção das curvas críticas  $V_0(\mu)$  discutidas no capítulo correspondente. A implementação foi desenvolvida em Python 3, utilizando a biblioteca NumPy para o tratamento vetorial das expressões analíticas e Matplotlib para a geração dos gráficos.

O procedimento computacional baseia-se na avaliação direta das expressões fechadas deduzidas analiticamente, permitindo a visualização comparativa das diferentes condições críticas impostas ao sistema físico. O código apresentado assegura a reprodutibilidade integral dos resultados exibidos no corpo do trabalho.

```

1 import numpy as np      # Biblioteca para calculos matematicos
   vetorizados
2 import matplotlib.pyplot as plt  # Biblioteca para geracao de
   graficos
3
4 # -----
5 # Funcoes V0(mu)
6 # -----
7
8 def V0_1(mu):
9     """
10     Condicao 1:
11     V0 >= sqrt( (6 mu e^(pi/2 mu) - 4 mu^2 + 2) / (1 + 4 mu^2) )
12     """
13     # Calcula o numerador da expressao analitica da Condicao 1
14     num = 6*mu*np.exp(0.5*np.pi*mu) - 4*mu**2 + 2
15     # Calcula o denominador
16     den = 1 + 4*mu**2
17     # Retorna a raiz quadrada; np.maximum garante que nao ha raiz de
       numero negativo
18     return np.sqrt(np.maximum(num/den, 0.0))
19
20
21 def V0_2(mu):
22     """
23     Condicao 2:
24     V0 >= sqrt( (3 e^(2 pi mu) - 4 mu^2 + 2) / (1 + 4 mu^2) )
25     """
26     # Calcula o numerador da expressao analitica da Condicao 2

```

```

27     num = 3*np.exp(2*np.pi*mu) - 4*mu**2 + 2
28     # Calcula o denominador
29     den = 1 + 4*mu**2
30     # Retorna a raiz quadrada com protecao contra valores negativos
31     return np.sqrt(np.maximum(num/den, 0.0))
32
33
34 def V0_3(mu):
35     """
36     Condicao 3:
37     V0 >= sqrt( ((4 mu^2 - 2)/(1 + 4 mu^2)) * (e^(4 pi mu) - 1) )
38     """
39     # Calcula o denominador
40     den = 1 + 4*mu**2
41     # Calcula o numerador da expressao analitica da Condicao 3
42     num = (4*mu**2 - 2) * (np.exp(4*np.pi*mu) - 1)
43     # Retorna a raiz quadrada com protecao contra valores negativos
44     return np.sqrt(np.maximum(num/den, 0.0))
45
46
47 # -----
48 # Dominio de integracao
49 # -----
50
51 # Cria um vetor com 2000 valores igualmente espacados de mu entre 0 e
52   1
53 mu = np.linspace(0.0, 1.0, 2000)
54
55 # -----
56 # Avaliacao numerica
57 # -----
58
59 # Avalia cada funcao critica para todos os valores de mu
60   simultaneamente
61 y1 = V0_1(mu)
62 y2 = V0_2(mu)
63 y3 = V0_3(mu)
64
65 # -----
66 # Plotagem
67 # -----

```

```
67 # Cria uma figura com dimensoes 8x5 polegadas
68 plt.figure(figsize=(8, 5))
69
70 # Plota as tres curvas no mesmo grafico, cada uma com seu rotulo
71 plt.plot(mu, y1, label="Condicao 1")
72 plt.plot(mu, y2, label="Condicao 2")
73 plt.plot(mu, y3, label="Condicao 3")
74
75 # Define os rotulos dos eixos horizontal e vertical
76 plt.xlabel(r"$\mu$")
77 plt.ylabel(r"$V_0$")
78 # Limita o eixo vertical entre 0 e 30 para melhor visualizacao
79 plt.ylim(0, 30)
80 plt.title(r"Curvas-limite $V_0(\mu)$ para as tres condicoes")
81
82 # Adiciona grade de fundo com transparencia de 30%
83 plt.grid(True, alpha=0.3)
84 # Exibe a legenda identificando cada curva
85 plt.legend()
86 # Ajusta automaticamente as margens da figura
87 plt.tight_layout()
88 plt.show()
```

## ANEXO B – SUPERFÍCIES $V_0(\mu, \varepsilon)$ — LOOP ELÍPTICO HORIZONTAL COM ATRITO

O presente anexo expõe o código numérico completo utilizado para o cálculo das superfícies críticas  $V_0(\mu, \varepsilon)$  no caso do loop elíptico horizontal com atrito.

A implementação foi desenvolvida em Python 3, utilizando as bibliotecas NumPy e Matplotlib. O algoritmo baseia-se na formulação integral fechada deduzida no texto principal, conforme a subseção 2.3.5.1, empregando integração numérica pelo método do trapézio para o cálculo da função acumulada  $F(\phi)$ .

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D          # Modulo para graficos
4 from matplotlib.patches import Patch
5
6 # =====
7 # Loop Eliptico Horizontal com Atrito - Superficies V0(mu, eps)
8 # =====
9
10 p      = 1.0    # Parametro de peso (gravidade normalizada)
11 N_phi  = 1200   # Numero de pontos de discretizacao do angulo phi
12 N_mu   = 55     # Numero de valores de mu na grade
13 N_eps  = 55     # Numero de valores de epsilon na grade
14
15 # Cria vetores com os valores de mu e epsilon que serao avaliados
16 mu_arr = np.linspace(0.0, 1.2, N_mu)
17 eps_arr = np.linspace(0.2, 1.0, N_eps)
18
19 # -----
20 def si_CH(phi, eps):
21     # Calcula a funcao de curvatura local sigma(phi) para o eliptico
22     # Representa a variacao do raio de curvatura ao longo da
23     # trajetoria
24     return eps / (eps**2 * np.sin(phi)**2 + np.cos(phi)**2)
25
26 def compute_F(phi, eps):
27     # Calcula a integral acumulada F(phi) = integral de sigma de 0
28     # ate phi
29     # usando o metodo do trapezio (aproximacao numerica da integral)

```

```

28     si    = si_CH(phi, eps)
29     dphi = phi[1] - phi[0]    # Tamanho de cada subintervalo de
                                # integracao
30     F     = np.zeros_like(phi) # Inicializa F com zeros
31     # Acumula a area dos trapezios ao longo de phi
32     F[1:] = np.cumsum(0.5 * (si[:-1] + si[1:]) * dphi)
33     return F
34
35 def compute_surface(cond, mu_arr, eps_arr, N=N_phi):
36     # Calcula a superficie critica V0(mu, eps) para uma das tres
                                # condicoes
37     # cond=1: condicao no topo do primeiro quarto de volta (phi = pi
                                # /2)
38     # cond=2: condicao no ponto mais alto (phi = pi)
39     # cond=3: condicao apos uma volta completa (phi = 2*pi)
40
41     # Define o angulo final de integracao conforme a condicao critica
42     if cond == 1: Phi = np.pi / 2
43     elif cond == 2: Phi = np.pi
44     else:          Phi = 2.0 * np.pi
45
46     # Discretiza o angulo phi de 0 ate Phi em N+1 pontos
47     phi      = np.linspace(0.0, Phi, N + 1)
48     cos_phi  = np.cos(phi)
49     sin_phi  = np.sin(phi)
50
51     # Inicializa a matriz que armazenara os valores de V0 para cada (
                                # eps, mu)
52     V0_surf = np.zeros((len(eps_arr), len(mu_arr)))
53
54     for i, eps in enumerate(eps_arr):
55         # Para cada valor de epsilon, calcula sigma e a integral
                                # acumulada F
56         si    = si_CH(phi, eps)
57         F     = compute_F(phi, eps)
58         F_Phi = F[-1]    # Valor final de F no angulo limite da
                                # condicao
59
60         # Prepara mu como coluna para operar sobre todos os phi de
                                # uma vez
61         mu_col = mu_arr[:, None]
62         # Fator exponencial de atrito acumulado  $e^{(2\mu \cdot F(\phi))}$ 

```

```

63     exp_2muF = np.exp(2.0 * mu_col * F[None, :])
64
65     # Funcao de forza efetiva ao longo da trajetoria
66     f = 2.0 * p * (eps * cos_phi[None, :]
67                   - mu_col * sin_phi[None, :]
68                   - eps)
69
70     # Integrando e integral numerica pelo metodo do trapezio
71     integrand = si[None, :] * exp_2muF * f
72     integral = np.trapezoid(integrand, phi, axis=1)
73
74     # Termo de condicao de contorno A, dependente da condicao
75     critica
76     if cond == 1:
77         A = 2.0 * p * (mu_arr + eps)
78     elif cond == 2:
79         A = p / eps + 4.0 * p * eps
80     else:
81         A = 0.0 # Na volta completa, a condicao de contorno e
82                 nula
83
84     # Calcula V0^2 pela formula analitica e extrai a raiz
85     quadrada
86     exp_2muFPhi = np.exp(2.0 * mu_arr * F_Phi)
87     V0_sq = A * exp_2muFPhi + 2.0 * mu_arr * integral
88     # Protege contra raizes de numeros negativos e armazena o
89     resultado numa matriz
90     V0_surf[i, :] = np.sqrt(np.maximum(V0_sq, 0.0))
91
92     return V0_surf
93
94 # -----
95 # Calculo das tres superficies criticas
96 # -----
97 V0_1 = compute_surface(1, mu_arr, eps_arr)
98 V0_2 = compute_surface(2, mu_arr, eps_arr)
99 V0_3 = compute_surface(3, mu_arr, eps_arr)
100
101 # Cria a grade 2D de valores (mu, eps) para a plotagem 3D
102 MU, EPS = np.meshgrid(mu_arr, eps_arr)
103 Z_MAX = 60.0 # Limite superior do eixo vertical para clareza
104 visual

```

```

100
101 # Substitui valores acima do limite por NaN (nao plota esses pontos)
102 V1_plot = np.where(V0_1 <= Z_MAX, V0_1, np.nan)
103 V2_plot = np.where(V0_2 <= Z_MAX, V0_2, np.nan)
104 V3_plot = np.where(V0_3 <= Z_MAX, V0_3, np.nan)
105
106 # Cria a figura 3D e adiciona os tres graficos de superficie
107 fig = plt.figure(figsize=(13, 9))
108 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
109
110 # Plota cada superficie com transparencia de 75% para permitir
    sobreposicao
111 ax.plot_surface(MU, EPS, V1_plot, alpha=0.75)
112 ax.plot_surface(MU, EPS, V2_plot, alpha=0.75)
113 ax.plot_surface(MU, EPS, V3_plot, alpha=0.75)
114
115 # Define os rotulos dos tres eixos
116 ax.set_xlabel(r'$\mu$')
117 ax.set_ylabel(r'$\varepsilon$')
118 ax.set_zlabel(r'$V_0$')
119 ax.set_zlim(0, Z_MAX) # Fixa o intervalo do eixo vertical
120
121 plt.tight_layout()
122 plt.show()

```

## ANEXO C – SUPERFÍCIES $V_0(\mu, \varepsilon)$ — LOOP ELÍPTICO VERTICAL COM ATRITO

Este apêndice expõe o código numérico completo utilizado para o cálculo das superfícies críticas  $V_0(\mu, \varepsilon)$  no caso do loop elíptico vertical com atrito.

A implementação foi desenvolvida em Python 3, empregando as bibliotecas NumPy para manipulação vetorial e integração numérica, Matplotlib para visualização gráfica tridimensional e `mpl_toolkits.mplot3d` para a construção das superfícies. Foi feito via método do trapézio, de acordo com o que foi deduzido na formulação analítica do texto principal, conforme a subseção 2.3.5.2.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D # Modulo para graficos 3D
4 from mpl_toolkits.mplot3d.art3d import Poly3DCollection # Colecao de
   poligonos 3D
5 from matplotlib.patches import Patch
6
7 # =====
8 # Loop Eliptico Vertical com Atrito - Superficies V0(mu, eps)
9 # =====
10
11 p = 1.0      # Parametro de peso (gravidade normalizada)
12 N_phi = 1200 # Numero de pontos de discretizacao do angulo phi
13 N_mu  = 55   # Numero de valores de mu na grade
14 N_eps = 55   # Numero de valores de epsilon na grade
15
16 # Cria vetores com os valores de mu e epsilon que serao avaliados
17 mu_arr = np.linspace(0.0, 1.2, N_mu)
18 eps_arr = np.linspace(0.2, 1.0, N_eps)
19
20 def si_CV(phi, eps):
21     # Calcula a funcao de curvatura local sigma(phi) para o eliptico
       vertical
22     # Difere do caso horizontal pela orientacao do semi-eixo maior
23     return 1.0 / (np.sin(phi)**2 / eps + eps * np.cos(phi)**2)
24
25 def compute_F(phi, eps):
26     # Calcula a integral acumulada F(phi) = integral de sigma de 0
       ate phi
27     # usando o metodo do trapezio (aproximacao numerica da integral)
28     si = si_CV(phi, eps)

```

```

29     dphi = phi[1] - phi[0]      # Tamanho de cada subintervalo de
        integracao
30     F = np.zeros_like(phi)      # Inicializa F com zeros
31     # Acumula a area dos trapezios ao longo de phi
32     F[1:] = np.cumsum(0.5 * (si[:-1] + si[1:]) * dphi)
33     return F
34
35 def compute_surface(cond, mu_arr, eps_arr, N=N_phi):
36     # Calcula a superficie critica V0(mu, eps) para uma das tres
        condicoes
37     # cond=1: condicao no topo do primeiro quarto de volta (phi = pi
        /2)
38     # cond=2: condicao no ponto mais alto (phi = pi)
39     # cond=3: condicao apos uma volta completa (phi = 2*pi)
40
41     # Define o angulo final de integracao conforme a condicao critica
42     if cond == 1: Phi = np.pi / 2
43     elif cond == 2: Phi = np.pi
44     else:          Phi = 2.0 * np.pi
45
46     # Discretiza o angulo phi de 0 ate Phi em N+1 pontos
47     phi = np.linspace(0.0, Phi, N + 1)
48     cos_phi = np.cos(phi)
49     sin_phi = np.sin(phi)
50
51     # Inicializa a matriz que armazenara os valores de V0 para cada
        (eps, mu)
52     V0_surf = np.zeros((len(eps_arr), len(mu_arr)))
53
54     for i, eps in enumerate(eps_arr):
55         # Para cada valor de epsilon, calcula sigma e a integral
            acumulada F
56         si = si_CV(phi, eps)
57         F = compute_F(phi, eps)
58         F_Phi = F[-1] # Valor final de F no angulo limite da
            condicao
59
60         # Prepara mu como coluna para operar sobre todos os phi de
            uma vez
61         mu_col = mu_arr[:, None]
62         # Fator exponencial de atrito acumulado  $e^{(2*\mu*F(phi))}$ 
63         exp_2muF = np.exp(2.0 * mu_col * F[None, :])

```

```

64     # Funcao de forza efetiva ao longo da trajetoria (caso
        vertical)
65     f = 2.0 * p * (cos_phi[None, :]
66                 - eps * mu_col * sin_phi[None, :]
67                 - 1.0)
68
69     # Integrando e integral numerica pelo metodo do trapezio
70     integrand = si[None, :] * exp_2muF * f
71     integral = np.trapezoid(integrand, phi, axis=1)
72
73     # Termo de condicao de contorno A, dependente da condicao
        critica
74     if cond == 1:
75         A = 2.0 * p * (1.0 + eps * mu_arr)
76     elif cond == 2:
77         A = p * eps**2 + 4.0 * p
78     else:
79         A = 0.0 # Na volta completa, a condicao de contorno e
            nula
80
81     # Calcula V0^2 pela formula analitica e extrai a raiz
        quadrada
82     exp_2muFPhi = np.exp(2.0 * mu_arr * F_Phi)
83     V0_sq = A * exp_2muFPhi + 2.0 * mu_arr * integral
84     # Protege contra raizes de negativos e armazena na matriz
85     V0_surf[i, :] = np.sqrt(np.maximum(V0_sq, 0.0))
86
87     return V0_surf
88
89 # Calcula as tres superficies criticas para o caso vertical
90 V0_1 = compute_surface(1, mu_arr, eps_arr)
91 V0_2 = compute_surface(2, mu_arr, eps_arr)
92 V0_3 = compute_surface(3, mu_arr, eps_arr)
93
94 # Cria a grade 2D de valores (mu, eps) para a plotagem 3D
95 MU, EPS = np.meshgrid(mu_arr, eps_arr)
96 Z_MAX = 60.0 # Limite superior do eixo vertical para clareza
        visual
97
98 # Substitui valores acima do limite por NaN (nao plota esses pontos)
99 V1_plot = np.where(V0_1 <= Z_MAX, V0_1, np.nan)
100 V2_plot = np.where(V0_2 <= Z_MAX, V0_2, np.nan)

```

```
101 V3_plot = np.where(V0_3 <= Z_MAX, V0_3, np.nan)
102
103 # Cria a figura 3D e adiciona os tres graficos de superficie
104 fig = plt.figure(figsize=(13, 9))
105 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
106
107 # Plota cada superficie com transparencia de 75% para permitir
    sobreposicao
108 ax.plot_surface(MU, EPS, V1_plot, alpha=0.75)
109 ax.plot_surface(MU, EPS, V2_plot, alpha=0.75)
110 ax.plot_surface(MU, EPS, V3_plot, alpha=0.75)
111
112 # Define os rotulos dos tres eixos
113 ax.set_xlabel(r'$\mu$')
114 ax.set_ylabel(r'$\varepsilon$')
115 ax.set_zlabel(r'$V_0$')
116 ax.set_zlim(0, Z_MAX) # Fixa o intervalo do eixo vertical
117
118 plt.tight_layout()
119 plt.show()
```

## ANEXO D – CONDIÇÕES DE CONTATO E O PONTO CRÍTICO $\phi = \pi$

A Condição 2 exige que a força normal  $\vec{F}_N$  não se anule em nenhum ponto do trecho superior do loop, isto é, para  $\phi \in [\pi/2, 3\pi/2]$ . Como esse trecho contém infinitos pontos, uma verificação direta ponto a ponto seria impraticável. A estratégia mais eficiente consiste em identificar o ponto em que  $\vec{F}_N$  é *mínima* ao longo dessa região e verificar a condição apenas nesse ponto: se  $\vec{F}_N$  for não-nula em seu mínimo global, ela será não-nula em todos os demais, e a Condição 2 estará automaticamente satisfeita. A questão que este anexo responde é, portanto:

*“Dentre todos os pontos do trecho superior, por que o ponto  $\phi = \pi$  (o topo do loop) é aquele em que  $\vec{F}_N$  é mínima?”*

### D.1 O QUE DETERMINA A INTENSIDADE DE $\vec{F}_N$

Em qualquer ponto  $\phi$  da trajetória, a aplicação da Segunda Lei de Newton na direção normal à pista — que aponta para o centro de curvatura — fornece:

$$F_N(\phi) = \frac{mv^2(\phi)}{\rho(\phi)} + mg \cos \alpha(\phi), \quad (\text{C.1})$$

em que  $\rho(\phi)$  é o raio de curvatura local e  $\alpha(\phi)$  é o ângulo entre a normal à pista e a direção vertical. O primeiro termo representa a contribuição centrípeta necessária para manter o movimento curvilíneo; o segundo é a componente da força gravitacional projetada na direção normal.

### D.2 LOOP CIRCULAR SEM ATRITO

No loop circular, o raio de curvatura é constante e igual ao raio do loop,  $\rho(\phi) = R$ , e a normal à pista coincide com o raio, de modo que  $\alpha(\phi) = \phi$ . Substituindo essas relações na Eq. (C.1), a função de contato assume a forma simplificada:

$$F_N(\phi) = mg(V^2(\phi) + \cos \phi). \quad (\text{C.2})$$

Como o sistema é conservativo, a energia mecânica é conservada entre a base do loop ( $\phi = 0$ ,  $y = 0$ ) e um ponto genérico ( $\phi$ ,  $y = R(1 - \cos \phi)$ ). Dividindo a equação de conservação por  $gR$  e expressando o resultado em termos de  $V(\phi)$ , obtém-se:

$$V^2(\phi) = V_0^2 - 2(1 - \cos \phi) = V_0^2 - 2 + 2 \cos \phi, \quad (\text{C.3})$$

em que  $V_0 \equiv v_0/\sqrt{gR}$  é a velocidade adimensional na base. Substituindo a Eq. (C.3) na Eq. (C.2):

$$F_N(\phi) = mg(V_0^2 - 2 + 3 \cos \phi). \quad (\text{C.4})$$

A Eq. (C.4) evidencia que  $F_N(\phi)$  é uma função *linear e crescente* de  $\cos \phi$ , com coeficiente positivo igual a  $3mg$ . Portanto,  $F_N$  decresce sempre que  $\cos \phi$  decresce. No intervalo  $[\pi/2, 3\pi/2]$ , a função cosseno atinge seu valor mínimo em  $\phi = \pi$ , onde  $\cos \pi = -1$ . Assim, o mínimo de  $F_N(\phi)$  nesse intervalo é:

$$\min_{\phi \in [\pi/2, 3\pi/2]} F_N(\phi) = F_N(\pi) = mg(V_0^2 - 5). \quad (\text{C.5})$$

A localização do mínimo em  $\phi = \pi$  é estabelecida de forma direta, sem necessidade de cálculo diferencial: a geometria circular e a conservação da energia são suficientes para identificar o topo como o ponto crítico.

### D.3 LOOP CIRCULAR COM ATRITO

A equação de  $F_N(\phi)$  e a geometria circular são as mesmas do caso anterior. O que muda é o perfil de velocidade  $V^2(\phi)$ , pois a energia mecânica não é conservada na presença de atrito. Derivando  $F_N(\phi)$ , em relação a  $\phi$ , a partir da equação (C.2) encontramos:

$$\frac{dF_N}{d\phi} \equiv F'_N(\phi) = mg \frac{dV^2}{d\phi} - mg \sin \phi. \quad (\text{C.6})$$

A equação diferencial que governa  $V^2(\phi)$  no caso circular com atrito, obtida a partir da Eq. (2.41) do texto principal, é:

$$\frac{dV^2}{d\phi} = -2 \sin \phi - 2\mu \cos \phi - 2\mu V^2(\phi), \quad (\text{C.7})$$

substituindo a Eq. (C.7) na Eq. (C.6):

$$F'_N(\phi) = -3mg \sin \phi - 2mg\mu \cos \phi - 2mg\mu V^2(\phi). \quad (\text{C.8})$$

O ponto mais crítico é aquele em que a perda de contato ocorre pela primeira vez, ou seja, onde  $F_N(\phi) = 0N$  pela primeira vez. Nesse ponto, a condição  $F_N(\phi) = 0$  implica  $V^2(\phi) = -\cos \phi$ . Substituindo essa relação na Eq. (C.8), a expressão da derivada simplifica-se notavelmente:

$$F'_N(\phi) \Big|_{F_N=0} = -3mg \sin \phi - 2mg\mu \cos \phi - 2mg\mu(-\cos \phi) = -3mg \sin \phi. \quad (\text{C.9})$$

Os termos com  $\mu$  se cancelam exatamente. Esse cancelamento não é uma coincidência: no ponto de perda de contato, os efeitos do atrito sobre a velocidade e sobre a força normal se equilibram mutuamente, e apenas a geometria da trajetória

circular — capturada pelo fator  $3 \sin \phi$  — determina onde  $F_N$  é mínima. Impondo a condição de estacionaridade  $F'_N(\phi) = 0$ :

$$-3mg \sin \phi = 0 \implies \sin \phi = 0 \implies \phi = 0 \text{ ou } \phi = \pi. \quad (\text{C.10})$$

O ponto  $\phi = 0$  corresponde à base do loop, que pertence ao trecho inferior da trajetória e não é relevante para a determinação do valor mínimo de  $F_N$  no trecho superior. O único ponto estacionário de  $F_N$  no intervalo  $[\pi/2, 3\pi/2]$  é, portanto,  $\phi = \pi$ . Como  $F_N$  é contínua e estritamente positiva nos extremos do intervalo para qualquer condição física que permita o movimento completo, esse ponto estacionário interior é necessariamente um mínimo, confirmando o topo como o ponto mais crítico para a manutenção do contato — independentemente do valor de  $\mu$ .

Para o caso do loop elíptico, a análise torna-se significativamente mais complexa do que no caso circular, uma vez que as grandezas geométricas e dinâmicas variam ao longo da trajetória de maneira não trivial. Em particular, a curvatura da trajetória deixa de ser constante, o que implica em uma dependência mais elaborada da força normal e das forças dissipativas com a posição da partícula ao longo do percurso. Devido a essas dificuldades analíticas, a resolução completa desse caso foge ao escopo do presente trabalho.

Entretanto, como ponto de partida para a compreensão de problemas envolvendo trajetórias curvas mais gerais, sugerem-se os trabalhos de [21] e [22]. No primeiro, os autores analisam o movimento de uma partícula deslizando ao longo de uma curva arbitrária na presença de atrito, apresentando uma abordagem que permite tratar trajetórias não circulares. Já no segundo, é discutido o problema inverso da determinação da forma de trilhos que mantêm a força normal constante ao longo do movimento. Esses estudos fornecem ferramentas conceituais e matemáticas úteis para a investigação de trajetórias elípticas e de outros perfis geométricos mais gerais.