



**INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ - CAMPUS CORRENTE
PÓS-GRADUAÇÃO LATO SENSU
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

JEAN FERREIRA CORADO

NÚMEROS IRRACIONAIS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

**CORRENTE
2017**

JEAN FERREIRA CORADO

NÚMEROS IRRACIONAIS ALGÉBRICOS E
TRANSCENDENTES

Monografia apresentada, como requisito para obtenção do Título de Especialista em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. Campus Corrente.

Orientador: Prof. Me. Carlos Adriano da Costa Gomes

Coorientador: Prof. Me. Fernando da Costa Gomes

CORRENTE
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Corado, Jean Ferreira.

C586n Números Irracionais Algébricos e Transcendentes/ Jean Ferreira Corado. -
2017.
57 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Corrente, 2017.

Orientador: Prof Me.Carlos Adriano da Costa Gomes

Co-Orientador: Me. Fernando da Costa Gomes

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Números Irracionais Algébricos. 3. Números Irracionais Transcendentes. 4. Corado, Jean Ferreira. I.Título.

CDD – 510

Elaborado por Tefischer Huanderson Soares e Sousa CRB3/1251

*Ao meu filho Jean Victor, à minha esposa Grazielly e aos meus pais Deonilce e Bernaldino, pois mesmo não sabendo interpretar os meus rascunhos de matemática ainda me apoiam na certeza que fiz a escolha certa **explícita** em minha alegria de trabalhar com a “rainha das ciências”.*

Agradecimentos

Os agradecimentos principais direciono ao meu orientador Prof. Me. Carlos Adriano da Costa Gomes pela incansável atenção prestada a esta pesquisa e além disso me proporcionando uma evolução imensurável com as suas informações matemáticas. Agradeço também enormemente ao Prof. Me. Fernando da Costa Gomes pelas correções feitas nesta pesquisa que tiveram uma incisiva contribuição para a coerência deste trabalho. Se cheguei até aqui é porque me apoiei nos ombros desses gigantes, discípulos dos Bernoulli.

Os agradecimentos especiais, são ao Instituto Federal do Piauí-campus Corrente, que me concedeu a oportunidade de está me tornando um Especialista em Ensino de Matemática.

Resumo

Durante muito tempo pensou-se que os números racionais eram suficientes para as análises matemáticas ao redor do mundo. Porém, essa conjectura foi negada ao se tentar calcular a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário, pois tal segmento não podia ser representado pela razão entre dois números inteiros. Surgia, assim, as medidas incomensuráveis - números irracionais. Uma das grandes dificuldades da época e até mesmo na contemporaneidade é a identificação se um número é comensurável ou incomensurável. Os irracionais analisados sobre a teoria dos algébricos e transcendentais transforma essa dificuldade em um processo lógico e mais integrado com outros conteúdos matemáticos. Um número será denominado algébrico, quando for raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros, caso contrário, será chamado de transcendentais. A presente pesquisa teve por objetivo investigar os aspectos qualitativos em relação ao ensino dos números irracionais e explorar a teoria dos algébricos e transcendentais para análise dos números irracionais. Para a investigação foi realizada uma revisão bibliográfica acerca do modo como é tratado os irracionais, para identificar como o referido conteúdo tem sido apresentado. O público alvo foram alunos da Licenciatura em Matemática e da Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do Instituto Federal do Piauí, campus Corrente. Os instrumentos de coleta de dados foram questionários diretos para inferir a capacidade destes em identificar números irracionais. Em seguida, foi feita uma exposição da teoria dos irracionais algébricos e transcendentais, por meio de minicursos, almejando a compreensão das propriedades inerentes ao conjunto dos números irracionais, entender o porquê de não ser possível duplicar o cubo, quadrar um círculo, algo que proporcionará conhecimento em resolver equações polinomiais, identidades trigonométricas, dentre outros. Concluiu-se, que a falta de conhecimento a respeito dos números irracionais é gritante e conduz a um círculo vicioso. No entanto, a teoria dos números algébricos e transcendentais se mostrou viável para o estudo deste conjunto numérico.

Palavras-chave: Números irracionais. Ensino. Construção dos números. Algébricos. Transcendentais.

Abstract

For a long time it was thought that rational numbers were sufficient for mathematical analyzes around the world. However, this conjecture was denied by calculating the measure of the diagonal of a unit side square, since such a segment could not be represented by the ratio of two integers, thus arose the immeasurable measures - irrational numbers. One of the great difficulties at the time and even in contemporary times is the identification of whether a number is commensurable or immeasurable. The irrational ones analyzed on the theory of algebraic and transcendent transform this difficulty into a logical process and more integrated with other mathematical contents. A number will be called algebraic, when it is the root of a polynomial equation of integer coefficients, otherwise it will be called transcendent. The present research aimed to investigate the qualitative aspects about the teaching of irrational numbers and to explore the theory of algebraic and transcendent for the analysis of irrational numbers. For the investigation a bibliographical review was carried out on how the irrational ones are treated, to identify how the said content has been presented. The target audience were students of the Degree in Mathematics Graduate in Mathematics Teaching, Federal Institute of Piauí, Campus Corrente. The instruments of data collection were direct questionnaires to infer their ability to identify irrational numbers, then an exposition of the algebraic and transcendent irrational theory was made, through minicourses, aiming at understanding the inherent properties of the set of irrational numbers, To understand why it is not possible to duplicate the cube, to square a circle, something that will provide knowledge in solving polynomial equations, trigonometric identities, among others. It has been concluded that the lack of knowledge about irrational numbers is stark and leads to a vicious circle. However, the theory of algebraic and transcendent numbers proved feasible for the study of this numerical set.

Keywords: Irrational numbers. Teaching. Construction of numbers. Algebraic. Transcendent.

Sumário

	Introdução	8
1	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	10
1.1	Contexto Histórico	10
1.2	Construção dos Números	12
1.2.1	Números Naturais (N)	12
1.2.1.1	Adição de números naturais	13
1.2.1.2	Multiplicação de números naturais	15
1.2.1.3	Relação de ordem em N	15
1.2.2	Números Inteiros (Z)	16
1.2.2.1	Relação de Equivalência	16
1.2.2.2	Classe de Equivalência	16
1.2.2.3	Conjunto Quociente	16
1.2.2.4	Construção dos números inteiros	16
1.2.2.5	Adição e Multiplicação de Inteiros	17
1.2.3	Números Racionais (Q)	19
1.2.3.1	Operações de adição e multiplicação em Q	19
1.2.4	Números Reais (R)	20
1.2.4.1	Relação de ordem e operações com Cortes	20
1.3	Conjunto dos Números Irracionais	21
1.4	Irracionais Algébricos e Transcendentes	23
2	METODOLOGIA DA PESQUISA	32
2.1	Modalidade da pesquisa	32
2.2	Análise dos Livros Didáticos	33
2.2.1	Dante, Luiz Roberto. <i>Projeto Teláris: Matemática</i>	33
2.2.2	Souza, Joamir Roberto de. <i>Novo Olhar: Matemática</i>	34
2.3	O Campo de Investigação e seus Sujeitos	34
2.4	Instrumentos de Coleta de dados	35
2.4.1	Aspectos Qualitativos	35
2.4.2	Aspectos Exploratórios	36
3	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	37
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	42

REFERÊNCIAS	43
Sumário	
APÊNDICES	45
APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DA TRANSCENDÊNCIA DE e	46
APÊNDICE B – DEMONSTRAÇÃO DA TRANSCENDÊNCIA DE π	48
APÊNDICE C – DEMONSTRAÇÃO DA CONSTRUTIBILIDADE DE NÚMEROS PELOS MÉTODOS EUCLIDIA- NOS.....	53

Introdução

Percebe-se, que constantemente pesquisas tem mostrado que a educação matemática necessita de métodos que facilitem o aprendizado dos alunos. Segundo Silveira (2006) “a crítica que se faz ao ensino de matemática resulta da constatação do fracasso do aluno na disciplina, onde as reprovações servem como um indicativo que faz soar o alarme de que algo está mal na escola”. No entanto, mesmo com as críticas o que se verifica ainda é uma tendência em seguir uma vertente axiomática dos conteúdos de Matemática, consequentemente incluindo os números Irracionais, haja vista os livros didáticos o abordarem sucintamente, expondo-o apenas como um mero coadjuvante dos números racionais, algo que contradiz os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, pois este sugere que

O importante é que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas “casas” decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contra-exemplos para ampliar a compreensão dos números (BRASIL, 1998, p.83).

Há de se frisar também que o Teorema de Pitágoras, gênese dos estudos dos números irracionais, só é apresentado aos discentes no 9º ano do ensino fundamental, enquanto que os números irracionais são “citados” no 7º ano do mesmo nível de ensino.

Os livros seguem a ordem inversa das construções matemáticas, o que mostra o quão é desprezada a sequência lógica desse conjunto, de modo que isso possivelmente acarreta nas dificuldades operacionais com tal conjunto numérico.

De acordo com Ferreira (2013, p.4) a existência de grandezas incomensuráveis e a ausência de um tratamento eficiente para expressá-las, ocasionou problemas que são refletidos na escola para cuja compreensão o entendimento intuitivo não é suficiente. O autor, expõe que no Ensino Fundamental, concretamente só trabalhamos com os números racionais e em relação ao Ensino Superior não são raras as faculdades de matemática em que os formandos concluem o seu curso com a mesma ideia de número real com que ingressaram.

Segundo Rezende (2013, p.17), alunos do quarto período do curso de Licenciatura em Matemática chegam ao curso com dúvidas e até mesmo sérios equívocos em relação a conceitos, definições e propriedades dos números reais, particularmente, dos números irracionais, evidenciando que a maneira como vem sendo explicitado esses números é inviável, reafirmando o que foi exposto nos parágrafos anteriores.

Consequentemente, faz-se imprescindível investigar as estruturas técnicas e curriculares sobre o conjunto dos números irracionais, propondo abordagens didáticas que contribuam para minimizar a ausência de conhecimento sobre esse conjunto, explicitando sua presença na

natureza como, por exemplo, o número de Euler, e , sua presença também na arte pois a razão áurea utilizada por pintores tais como Da Vinci é também um número irracional.

Por acreditar na importância das discussões acerca dos números irracionais, é que se faz necessário a presente pesquisa, dando a esses números um enfoque com rigor nos termos matemáticos, incorporando suas estruturas aritméticas à teoria dos algébricos e transcendentais.

Para tais fins, foi apresentada a teoria que envolve esta proposta de pesquisa através de um minicurso. Para verificar a viabilidade desse estudo, a pesquisa alcançou os seguintes níveis de ensino: Licenciatura em Matemática e Pós-Graduação em Ensino de Matemática, ambos situados no Instituto Federal do Piauí, campus Corrente. A interação com o público citado responderá a seguinte questão norteadora desta pesquisa: a teoria dos algébricos e transcendentais aplicada ao conjunto dos números irracionais, facilita e motiva as asserções matemáticas inerentes a este conjunto?

Diante do exposto, este trabalho apresenta a fundamentação teórica subdividida em quatro ramificações. A primeira, refere-se à situação histórica que levou a descoberta de medidas incomensuráveis de modo a aclarar ao leitor o meio social em que se deu o surgimento de tais medidas. A segunda parte aborda a construção dos números de acordo com os procedimentos propostos por Dedekind onde a finalidade é trazer uma construção dos números irracionais e instigar pesquisas nesse tópico da Matemática. A terceira parte expõe as propriedades inerentes aos números irracionais e a quarta parte conduz aos estudos da teoria dos algébricos e transcendentais.

A metodologia, assim como a fundamentação teórica foi subdividida em quatro ramificações. A primeira, tem por incumbência descrever a modalidade da pesquisa. A segunda parte, traz o modo como é trabalhado o conjunto dos números irracionais pelos livros didáticos das escolas de Corrente-PI. A terceira parte, é destinada ao campo de investigação e seus sujeitos. A quarta parte, expõe os instrumentos de coleta de dados.

Finaliza-se essa introdução reiterando a importância em pesquisas sobre o conjunto dos números irracionais, pois como será exposto neste trabalho este conjunto numérico se mostra imprescindível ao estudo dos demais conjuntos numéricos. Há de frisar também, que a teoria dos algébricos e transcendentais torna sua aplicação muito mais clara em outros tópicos da Matemática como será observado *a posteriori*.

1 Fundamentação Teórica

1.1 Contexto Histórico

Durante a história da humanidade os números foram surgindo através de um processo lento e em paralelo às necessidades sociais, sendo agrupados em conjuntos na ordem cronológica como segue: conjunto dos números Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, Reais e Complexos.

Cada um destes conjuntos apresenta limitações que instigaram a continuidade nas construções dos mesmos, que melhor pode ser apreciada quando empregada no contexto histórico que levou ao surgimento dos conjuntos numéricos e em especial o conjunto em destaque neste trabalho, o conjunto dos números irracionais.

O desenvolvimento embrionário de um matemático, isto é, a educação que o conduz dos princípios até à frente de pesquisa de sua época, segue com efeito, grosseiramente, o desenvolvimento da própria matemática. Assim, quer queiramos ou não, um matemático deve principiar por estudar o que é, em conteúdo, matemática antiga, vestida da maneira adotada pela moda matemática de sua época (AABOE, 2013).

Dessa forma, fica evidente o quanto é importante tomar os princípios históricos, para justificar os porquês das definições e proposições da matemática nos tempos atuais, ou seja, para que haja continuidade é imprescindível recorrer à gênese do conteúdo matemático em questão.

Assim, o surgimento dos Irracionais, sucede os números racionais cuja origem remonta ao antigo Egito, que era alimentado pelo rio Nilo. Devido às cheias do rio, aos egípcios cabia a constante demarcação das terras, que por não lançarem mãos de instrumentos de medidas mais elaborados, utilizavam pedaços de cordas como unidade de medida, porém nas marcações de tais terras haviam espaços em que a unidade não supria a necessidade com perfeição, exigindo-se a construção de outras unidades submúltiplo da já existente, surgindo assim os números racionais (GARCIA et al, 2005).

Em uma linguagem mais técnica, surgia a comensurabilidade, que consiste em dois segmentos serem múltiplos de uma unidade de medida dada. Esta grandeza matemática para Pitágoras, se tratava de uma doutrina filosófica de que tudo era “número”, ou seja, tudo era comensurável.

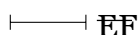
Em termos matemáticos, escolhido um segmento $\overline{EF}$ como unidade de medida, se $\overline{AB} = m \cdot \overline{EF}$ e $\overline{CD} = n \cdot \overline{EF}$, com m e n inteiros, então $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m \cdot \overline{EF}}{n \cdot \overline{EF}} = \frac{m}{n}$, sendo $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ nessas condições

grandezas comensuráveis. Na FIGURA 1 a situação anterior é elucidada para $m = 9$ e $n = 5$.

A estrutura lógica da Geometria Euclidiana, também colocava que os números racionais eram construtivos apenas com régua e compasso, havendo assim uma perfeita harmonia entre aritmética e geometria, algo que fortalecia a suficiência dos números racionais para explicar as asserções matemáticas.

A descoberta de que as frações não são suficientes para as necessidades da geometria foi feita pelos gregos, há mais de 2500 anos (NIVEN, 1990). Pitágoras, de repente se tornou

Figura 1 – Comensurabilidade de segmentos



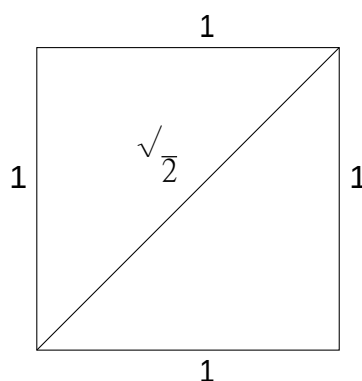

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{9 \cdot \overline{EF}}{5 \cdot \overline{EF}} = \frac{9}{5}$$



Fonte: Própria do autor, 2016

vítima de umas de suas principais ferramentas, o famoso teorema que leva seu nome, pois ao calcular a diagonal de um quadrado de lado unitário constatou-se que havia um segmento que não podia ser expresso por uma razão entre dois inteiros, como mostra a FIGURA 2.

Figura 2 – Quadrado de lado unitário



Fonte: Própria do autor, 2016

A partir de então, surgia a incomensurabilidade, ou seja, haviam números que eram a negação dos racionais, sendo assim existiam números que não tinham uma representação decimal periódica - os chamados Irracionais.

Isto significa, geometricamente, não existir uma unidade comum de comprimento, uma tira por mais curta que seja, que possa ser colocada um número inteiro de vezes sobre o lado e a diagonal de um quadrado. (...) Para os gregos, esta foi uma descoberta embaraçosa, pois em muitas de suas demonstrações geométricas eles supunham que dois segmentos quaisquer sempre admitiam uma unidade de comprimento comum. Havia, portanto, uma falha na estrutura lógica da Geometria Euclidiana - a discussão sobre razões e proporções de comprimentos estava incompleta (NIVEN, 1990, p. 2-3).

Os “transtornos lógicos”, que tal descoberta causou foi tão grande, que por muito tempo fizeram esforços para escondê-la. Os irracionais foram designados de “Alogon, o inexprimível”, e os membros da ordem juravam não divulgar sua existência a estranhos. Conta-se, que o pitagórico Hipaso foi lançado ao mar por revelar o segredo a estranhos, além de Alogon, também era utilizado o termo Arratos, que significa “sem razão”, daí o termo atual números irracionais (DANTZIG, 1970; KLINE, 1972).

Diante disso, fica nítido o quão grande era o fascínio da escola pitagórica pelos comensuráveis, preferiu uma medida evasiva ao invés de declarar a descoberta dos incomensuráveis, algo que certamente lhe proporcionaria maior visibilidade na sociedade matemática, pois os números irracionais foi uma descoberta ao acaso que causou inquietações nas mentes da época e até mesmo nas atuais, o que consequentemente alavancou o pensamento matemático, como será exposto neste trabalho.

Ao mesmo tempo em que essas coisas aconteciam, outros argumentos propostos pelos filósofos da época - dentre os quais os de Zeno são os mais famosos - também apontavam dificuldades na suposta harmonia entre a Geometria e os números. Tudo isso culminou numa crise no desenvolvimento da Matemática, crise essa que só foi definitivamente superada com a criação da teoria dos números reais (racionais e irracionais) no século passado, devido, sobretudo aos trabalhos do matemático alemão Richard Dedekind (ÁVILA, 2015, p.156).

O contexto histórico apontado nas páginas anteriores, não serve como demonstração do processo de construção dos conjuntos numéricos, apesar de sensibilizar o leitor do modo complexo como se deu tais construções. No entanto, os trabalhos de Richard Dedekind foram imprescindíveis para o entendimento das asserções inerentes aos conjuntos numéricos e em especial na insuficiência dos números racionais, este apresentam “furos”, ou seja, a existência de pontos na reta sem abscissas racionais algo que impede de ter-se uma análise racional, onde esses saltos na reta referem-se aos incomensuráveis.

1.2 Construção dos Números

A Matemática como ciência exata, requer em suas entidades uma abordagem analítica, dessa forma é que se faz necessário expor como se deu a construção dos números, para assim termos maior consistência na apreciação do conjunto dos Números Irracionais. No entanto, se fará uma exposição de forma resumida que não deixa de ser motivadora ao estudo da construção dos conjuntos de natureza matemática, pois um tratamento minucioso foge do escopo desse trabalho, o leitor poderá lançar mãos à obra de Ferreira (2013) que é o trabalho basilar para a abordagem que segue.

1.2.1 Números Naturais (N)

O conjunto dos números naturais foi a gênese dos conjuntos numéricos, haja vista este conjunto ter a utilização de seus elementos relacionadas apenas a contagens de objetos inteiro e de forma positiva.

O conjunto N é representado principalmente nos livros didáticos da seguinte forma:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}. \quad (1.1)$$

Perceba que tal representação nada sugere para os elementos posteriores indicados pelas reticências, além de não expor como se deu a utilização de tais símbolos. Dessa forma, é

condição necessária ter uma indicação do modo como se delineará os elementos desse conjunto, ou seja, deve haver a caracterização de $\mathbb{N}$, e foi isso que segundo Ripoll (2015, p.52) o matemático italiano Giuseppe Peano propôs, em sua obra *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, publicada em 1889, onde continha uma sequência de axiomas que levaram seu nome. De acordo com Peano, $\mathbb{N}$ é definido como o conjunto cujos elementos, chamados números naturais, satisfazem ao seguinte grupo de condições:

P_1 . todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural;

P_2 . números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

P_3 . existe um número natural, chamado 0 (zero), que não é sucessor de nenhum outro;

P_4 . se X é um conjunto de números naturais com as seguintes propriedades :

i) $0 \in X$;

ii) se um número natural n pertence a X , então o sucessor de n também pertence a X ; dessa forma, X é o conjunto de todos os números naturais.

Todas as asserções que seguirá a respeito de $\mathbb{N}$ se sustentará nesses axiomas. Porém, cabe lembrar que há também a construção desse conjunto pela lógica dos conjuntos de Cantor. Por conveniência de notação, os axiomas de Peano podem ser apresentados apoiando-se a priori nos conceitos matemáticos de conjunto e função, como segue: Existem um conjunto $\mathbb{N}$ e função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, chamada função sucessor, verificando:

A_1) s é injetora; isto é, se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \neq n$, então $s(m) \neq s(n)$.

A_2) Existe um elemento em $\mathbb{N}$, que denotaremos por 0, e chamaremos de zero, que não está na imagem de s , isto é, $0 \notin \text{Im}(s)$.

A_3) Se um subconjunto X de $\mathbb{N}$ satisfazer as condições abaixo, então $X = \mathbb{N}$:

i) $0 \in X$

ii) Se $k \in X$, então $s(k) \in X$.

A condição A_3 é conhecido como Princípio da Indução finita, sendo uma boa ferramenta de demonstrações inerentes a $\mathbb{N}$.

1.2.1.1 Adição de números naturais

Definição 1.2.1. A adição de dois números naturais, m e n , é designada por $m + n$ e definida recursivamente do seguinte modo:

$$\begin{aligned} m + 0 &= m; \\ m + s(n) &= s(m + n) \end{aligned}$$

Definição 1.2.2. Indicaremos por 1 (lê-se “um”) o número natural que é sucessor de 0, ou seja, $1=s(0)$

Proposição 1.2.1. Para todo natural m , tem-se $s(m) = m + 1$ e $s(m) = 1 + m$. Portanto, $m + 1 = 1 + m$.

Demonstração. Para a primeira igualdade, temos: $m + 1 = m + s(0) = s(m + 0) = s(m)$. Para a segunda igualdade utilizaremos o princípio da indução. Dessa forma, temos um conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} | s(m) = 1 + m\}$. Note que, $0 \in A$, pois $s(0) = 1 = 1 + 0$. Por hipótese $m \in A$, dessa forma precisamos mostrar que seu sucessor $s(m) \in A$. De fato, como $s(m)=1+m$, temos

$$s(s(m)) = s(1 + m) = 1 + s(m)$$

Isto é, $s(m) \in A$. Logo $A = \mathbb{N}$

□

De posse dos símbolos 0 e $1 = s(0)$, tem-se

$$\begin{aligned} s(1) &= 2 \\ s(2) &= 3 \\ s(3) &= 4 \\ &\vdots \\ s(m) &= 1 + m \\ &\cdot \end{aligned}$$

e sucessivamente. Então, $\mathbb{N}$ contém o conjunto

$$S = \{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \dots\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Proposição 1.2.2. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é equivalente ao conjunto S .

Demonstração. Seja S o conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. S foi construído como um subconjunto de $\mathbb{N}$ que contém o 0 e também o sucessor de qualquer elemento nele contido. Pelo Princípio da Indução, $S = \mathbb{N}$. □

A proposição (1.2.2), garante que $\mathbb{N}$ não apresenta outros elementos além dos pertencentes a S , sendo assim os axiomas de Peano formalizam o conjunto dos números naturais.

Propriedades da adição

-) Elemento neutro da adição: $n + 0 = n, \forall n \in \mathbb{N}$
-) Associatividade da adição: $(m + n) + p = m + (n + p), \forall m, n, p \in \mathbb{N}$
-) Comutatividade da adição: $m + n = n + m, \forall m, n \in \mathbb{N}$

iv) Propriedade cancelativa da adição: $m + p = n + p \Rightarrow m = n, \forall m, n, p \in \mathbb{N}$

Demonstrações: Vide (Ferreira, J. pp. 22-24)

1.2.1.2 Multiplicação de números naturais

Definição 1.2.3. A multiplicação de dois números naturais, m e n , é designada por $m \cdot n$ e definida recursivamente do seguinte modo:

$$\begin{aligned} m \cdot 0 &= 0; \\ m \cdot (n + 1) &= m \cdot n + m \end{aligned}$$

Propriedades da multiplicação

i) $m \cdot n \in \mathbb{N}$, isto é, a multiplicação é, de fato, uma operação em

$\mathbb{N}$; ii) Existência do elemento neutro multiplicativo: $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$;

iii) Distributividade: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ e $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$;

iv) Associatividade: $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$;

v) $m \cdot n = 0 \Rightarrow m = 0$ ou $n = 0$;

vi) comutatividade: $n \cdot m = m \cdot n$.

Demonstrações: Vide (Ferreira, J. p.24-25)

1.2.1.3 Relação de ordem em $\mathbb{N}$

Antes da definição de relação de ordem em $\mathbb{N}$, é necessário definir relação de ordem de modo geral, como segue.

Definição 1.2.4. Uma relação binária $\sim$ em um conjunto não vazio A diz-se uma relação de

ordem em A quando satisfazer as condições seguintes, para quaisquer $x, y, z \in A$:

reflexividade: $x \sim x$;

antissimetria: se $x \sim y$ e $y \sim x$, então $x = y$;

transitividade: se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

Definição 1.2.5. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Dizemos: $m \leq n$ (m é menor do que ou igual a n) se $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $n = p + m$.

2. Dizemos: $m < n$ (m é menor do que n) se $m \leq n$ e $m \neq n$.

Cabe lembrar que a relação da definição acima é uma relação de ordem, isto é, satisfaz às condições reflexiva, antissimétrica e transitiva. Para uma exposição mais minuciosa recomendamos a obra de Ripoll (2015, p. 44-62).

1.2.2 Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

Antes de dar início à construção dos números inteiros é definiremos Relação de Equivalência, Classe de Equivalência e Conjunto Quociente, como segue.

1.2.2.1 Relação de Equivalência

Definição 1.2.6. Uma relação $\sim$ em A diz-se relação de equivalência se possuir as seguintes propriedades:

reflexiva: $A \sim A$, para todo $A \in A$;

simétrica: se $A \sim b$, então $b \sim A$; para todo $A, b \in A$.

transitiva: para $A, b, c \in A$, se $A \sim b$ e $b \sim c$, então $A \sim c$.

1.2.2.2 Classe de Equivalência

Definição 1.2.7. Sejam $\sim$ uma relação de equivalência num conjunto A e $A \in A$ um elemento fixado arbitrariamente. O conjunto

$$[A] = \{x \in A \mid x \sim A\} \quad (1.2)$$

chama-se classe de equivalência de A pela relação $\sim$. Ou seja, $[A]$ é o conjunto constituído por todos os elementos de A que são equivalentes a A .

1.2.2.3 Conjunto Quociente

Definição 1.2.8. Seja $\sim$ uma relação de equivalência no conjunto A . O conjunto de todas as

classes de equivalência determinadas em A pela relação $\sim$ é chamado **conjunto quociente** de A pela relação $\sim$ e denotado por

$$A/\sim = \{[A] \mid A \in A\}. \quad (1.3)$$

1.2.2.4 Construção dos números inteiros

De sorte das definições anteriores, trataremos da relação de equivalência no conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. De modo que, cada classe de equivalência por essa relação definirá um número inteiro, sendo assim o conjunto $\mathbb{Z}$ será o conjunto dessas classes de equivalência, ou seja, o conjunto quociente constituído das classes de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pela relação indicada na seguinte proposição.

Proposição 1.2.3. A relação $\sim$ em $N \times N$ definida por $(A, b) \sim (c, d)$ quando $A + d = b + c$ é de equivalência.

Demonstração.

- j) *Reflexividade:* $(A, b) \sim (A, b)$, pois $A + b = b + A$. De fato, a reflexividade de $\sim$ é garantida pela comutatividade em N .
- j) *Simetria:* $(A, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (A, b)$. Perceba que a implicação acima por definição equivale à implicação $A + d = b + c \Rightarrow c + b = d + A$, que também é garantida pela comutatividade da adição em N .
- j) *Transitividade:* $(A, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (A, b) \sim (e, f)$.

$$\begin{aligned} (A, b) \sim (c, d) &\Rightarrow A + d = b + c \Rightarrow A + d + f = b + c + f; \\ (c, d) \sim (e, f) &\Rightarrow c + f = d + e \Rightarrow b + c + f = b + d + e. \end{aligned}$$

Pelas igualdades acima, temos que: $A + d + f = b + d + e \Rightarrow A + f = b + e$, garantida pela lei do corte da adição em N , então $(A, b) \sim (e, f)$. $\square$

Como estamos trabalhando no ambiente $N \times N$, a classe de equivalência do par ordenado (A, b) pela relação $\sim$ será denotada por $[(A, b)]$. Em símbolos temos,

$$[(A, b)] = \{(x, y) \in N \times N \mid (x, y) \sim (A, b)\}.$$

A representação em par ordenado é intencional pois a ordem dos números naturais A e b importa, isto é, o par ordenado (A, b) representará *a posteriori* uma subtração entre dois números naturais de modo que A será o *minuendo* e b o *subtraendo*.

Definição 1.2.9. O conjunto quociente $N \times N / \sim$, constituído pelas classes de equivalência $[(A, b)]$, se denota por Z e será chamado de conjunto dos números inteiros. Em símbolos temos,

$$Z = (N \times N / \sim) = \{[(A, b)] \mid (A, b) \in N \times N\}. \quad (1.4)$$

1.2.2.5 Adição e Multiplicação de Inteiros

Definição 1.2.10. A adição e a multiplicação em Z são as operações

$$+ : Z \times Z \longrightarrow Z \quad \cdot : Z \times Z \longrightarrow Z$$

respectivamente definidas por:

$$[(A, b)] + [(c, d)] = [(A + c, b + d)] \quad (1.5)$$

$$[(A, b)] \cdot [(c, d)] = [(A \cdot c + b \cdot d, A \cdot d + b \cdot c)]. \quad (1.6)$$

As expressões acima, sem perda de generalidade para esse texto, fornecem definições consistentes para os objetos matemáticos aqui tratados, ou seja, nos termos matemáticos elas estão bem definidas, de modo que independem da representação escolhida.

Propriedades da adição e da multiplicação em Z

- j) associatividade da adição:

$$([(A, b)] + [(c, d)]) + [(e, f)] = [(A, b)] + ([(c, d)] + [(e, f)]), \forall [(A, b)], [(c, d)], [(e, f)] \in Z$$
- j) comutatividade da adição:

$$[(A, b)] + [(c, d)] = [(c, d)] + [(A, b)], \forall [(A, b)], [(c, d)] \in Z$$
- j) elemento neutro da adição:

$$\exists z \in Z \text{ tal que } \forall [(A, b)] \in Z [(A, b)] + z = [(A, b)], \text{ tal que } z = [(0, 0)]$$
- j) elemento inverso da adição:

$$\forall [(A, b)] \in Z, \exists [(A^j, b^j)] \in Z \text{ tal que } [(A, b)] + [(A^j, b^j)] = [(0, 0)]$$
- j) associatividade da multiplicação:

$$([(A, b)] \cdot [(c, d)]) \cdot [(e, f)] = [(A, b)] \cdot ([(c, d)] \cdot [(e, f)]) \forall [(A, b)], [(c, d)], [(e, f)] \in Z$$
- j) comutatividade da multiplicação:

$$[(A, b)] \cdot [(c, d)] = [(c, d)] \cdot [(A, b)]$$
- j) elemento neutro da multiplicação:

$$\exists u \in Z \text{ tal que } [(A, b)] \cdot u = [(A, b)] \forall [(A, b)] \in Z$$
- j) propriedade cancelativa da multiplicação:

$$[(A, b)] \cdot [(e, f)] = [(c, d)] \cdot [(e, f)] \Rightarrow [(A, b)] = [(c, d)] \forall [(A, b)], [(c, d)], [(e, f)] \in Z \text{ e } [(e, f)] \neq z$$
- k) distributividade da multiplicação em relação à adição:

$$([(A, b)] + [(c, d)]) \cdot [(e, f)] = [(A, b)] \cdot [(e, f)] + [(c, d)] \cdot [(e, f)] \forall [(A, b)], [(c, d)], [(e, f)] \in Z$$

Definição 1.2.11. Dado $\alpha \in Z$, o único $\beta \in Z$ tal que $\alpha + \beta = [(0, 0)]$ chama-se simétrico de α . Sua unicidade permite que introduzamos um símbolo para ele: $-\alpha$ (lê-se “menos α ”). Diante do que foi exposto na definição anterior podemos definir uma terceira operação em Z , denominada de subtração.

Definição 1.2.12. A subtração em Z , denotada por $(-)$, é a operação definida da seguinte forma: Se $\alpha, \beta \in Z$, então:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta). \quad (1.7)$$

Nas propriedades da adição e da multiplicação em Z , foram utilizadas os mesmos símbolos da adição $(+)$ e da multiplicação $(\cdot)$ em N , isso é possível devido ao conjunto dos números inteiros possuir uma cópia algébrica de N . Entretanto, tal afirmação não é demonstrada por fugir do escopo desse trabalho.

Definição 1.2.13 (Relação de ordem em $\mathbb{Z}$). Dados os inteiros $[(A, b)]$ e $[(c, d)]$, escrevemos $[(A, b)] \preceq [(c, d)]$ (lê-se $[(A, b)]$ é menor do que ou igual a $[(c, d)]$), quando $A + d \preceq b + c$.

Observação 1. Os conjuntos para os quais existe uma bijeção entre eles e $\mathbb{N}$ são notáveis em matemática e são denominados conjuntos enumeráveis.

Proposição 1.2.4. $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Sugestão de demonstração. Mostre que a função $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como segue é bijetiva

$$\sigma(n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{se } n > 0 \\ -2n, & \text{se } n \preceq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

1.2.3 Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

A construção dos números racionais se dar no ambiente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(A, b) \mid A \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$. Definida a relação de equivalência: $(A, b) \sim (c, d)$ quando $AD = bc$.

Definição 1.2.14. Dado $(A, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denotamos por $\frac{A}{b}$ (que se lê “A sobre b”) a classe de equivalência do par (A, b) pela relação $\sim$ acima, assim

$$\frac{A}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \sim (A, b)\}.$$

Proposição 1.2.5. Se (A, b) e (c, d) são elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, então $\frac{A}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $AD = bc$.

Definição 1.2.15. (Números Racionais) Denotamos por $\mathbb{Q}$, o conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência $\sim$, isto é,

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) / \sim = \left\{ \frac{A}{b} \mid A \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\} \quad (1.9)$$

1.2.3.1 Operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$

As operações em $\mathbb{Q}$ definidas a seguir se realizam de forma análoga às definidas em $\mathbb{Z}$. Dessa forma, as operações no conjunto dos números racionais estão bem definidas e além disso este conjunto possui uma cópia algébrica de $\mathbb{Z}$.

Definição 1.2.16. Sejam $\frac{A}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais, isto é, elementos de $\mathbb{Q}$. Definimos as operações de adição e de multiplicação, respectivamente, por:

$$\frac{A}{b} + \frac{c}{d} = \frac{AD + bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{A}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{AC}{bd}. \quad (1.10)$$

Definição 1.2.17 (Relação de ordem em $\mathbb{Q}$). Sejam $\frac{A}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais com $b, d > 0$. Escrevemos $\frac{A}{b} \preceq \frac{c}{d}$ quando $AD \preceq bc$ e dizemos que $\frac{A}{b}$ é menor do que ou igual a $\frac{c}{d}$.

Proposição 1.2.6. $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Sugestão de demonstração. Mostre que $\mathbb{Q}_+^*$ é enumerável e escreva $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Q}_-^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+^*$ depois aplique o resultado que a união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é enumerável.

1.2.4 Números Reais (R)

A construção dos números reais se deu por volta de 1888 com o trabalho do matemático alemão Richard Dedekind. A construção desse conjunto, assim como nas construções anteriores teve por alicerce um conjunto já construído rigorosamente, nesse caso o conjunto dos números racionais, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ é uma extensão do conjunto $\mathbb{Q}$.

Definição 1.2.18. Um conjunto α de números racionais diz-se um Corte se satisfazer as seguintes condições:

- i) $\emptyset \neq \alpha \neq \mathbb{Q}$;
- ii) se $r \in \alpha$ e $s < r$ (s racional), então $s \in \alpha$;
- iii) em α não existe elemento máximo.

1.2.4.1 Relação de ordem e operações com Cortes

Defini-se em Cortes duas operações, “+” e “·”, e uma relação de ordem. Ao contrário, das construções anteriores a definição da relação de ordem aqui precede as definições operacionais, isso se deve ao conhecimento a priori para definir multiplicação.

Definição 1.2.19. Sejam α e β elementos de um Corte. Diz-se que α é menor do que β e escrevemos $\alpha < \beta$ quando $\beta - \alpha \neq \emptyset$.

Definição 1.2.20. Se α é elemento de um Corte e $\alpha > 0$, α chama-se Corte positivo. Se $\alpha < 0$, α é dito Corte negativo. Se $\alpha \neq 0$, α chama-se Corte não negativo e se $\alpha \neq 0$, α chama-se não positivo.

Observação 2. r^* , com $r \in \mathbb{Q}$ representam os cortes racionais, de modo que, r é a menor cota superior ou a maior cota inferior de um corte α .

Definição 1.2.21 (adição nos Cortes). Para α, β elementos de um Corte, definimos $\alpha + \beta$ como sendo um Corte, de modo que

$$\alpha + \beta = \{r + s \mid r \in \alpha \text{ e } s \in \beta\}.$$

Propriedades da adição nos Cortes

-)) Comutatividade da adição: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
-)) Associatividade da adição: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
-)) Elemento neutro da adição: $\alpha + 0^* = \alpha$;
-)) Simétrico (ou inverso aditivo): $\alpha + \beta = 0^*$

Definição 1.2.22 (multiplicação nos Cortes). Seja α e β elementos de um Corte, com $\alpha \neq 0^*$, $\beta \neq 0^*$, definimos o produto $\alpha \cdot \beta$ como sendo o Corte γ , tal que $\gamma = Q_-^* \cup \{r \in Q \mid r = pq, \text{ com } p \in \alpha, q \in \beta, p \neq 0 \text{ e } q \neq 0\}$.

Propriedades da multiplicação de Cortes

-) Comutatividade da multiplicação: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;
-) Associatividade da multiplicação: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$;
-) Elemento neutro: $\alpha \cdot 1^* = \alpha$;
-) Distributividade: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;
-) $\alpha \cdot 0^* = 0^*$;
-) Se $\alpha \neq 0^*$ e $\gamma \neq 0^*$, então $\alpha\gamma \neq 0^*$;
-) Se $\alpha \neq 0^*$ e $\gamma < 0^*$, então $\alpha\gamma < 0^*$;
-) Inverso multiplicativo: Seja $\alpha \neq 0^*$ e β elementos de um corte tal que $\alpha\beta = 1^*$. Esse corte chama-se inverso de α e é denotado por α^{-1} .

Definição 1.2.23. O conjunto dos cortes racionais será, a partir de agora, denominado de conjunto dos números reais e denotado por $\mathbb{R}$. Os cortes racionais serão identificados, via injeção j , com os números racionais. Todo corte que não for racional será denominado número irracional.

Notação: a identificação de $j(Q)$ com Q nos permite escrever $Q \subset \mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R} - Q$ representa o conjunto dos números irracionais.

Proposição 1.2.7. $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Sugestão de demonstração. Mostre que o intervalo aberto $I =]0, 1[$ não é enumerável e conclua que por I ser um subconjunto de $\mathbb{R}$, este não pode ser enumerável.

1.3 Conjunto dos Números Irracionais

De posse de todo o arcabouço histórico e analítico que levou ao surgimento dos números irracionais, faz-se necessário expor como tais números se comportam com as operações aritméticas. Um número irracional é um número decimal

$$A_0 + \frac{A_1}{10} + \frac{A_2}{10^2} + \frac{A_3}{10^3} + \frac{A_4}{10^4} + \dots + \frac{A_{(n-2)}}{10^{(n-2)}} + \frac{A_{(n-1)}}{10^{(n-1)}} + \frac{A_n}{10^n} + \dots \quad (1.11)$$

mas não é uma dízima periódica, sendo assim não pode ser representado por uma fração da forma $\frac{x}{y}$, com $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in (\mathbb{Z} - \{0\})$.

Dentre as características dos irracionais, uma que o difere dos demais conjuntos numéricos é este conjunto não ser fechado para nenhuma operação, ou seja, a adição e multiplicação de dois irracionais nem sempre resultam em números irracionais, certamente algo que dificulta o trabalho com tal conjunto e isso se deve ao fato de não poder-se trabalhar com as generalizações operacionais.

Proposição 1.3.1. *Seja ω um número irracional e $\frac{A}{b}$ um número racional com $\text{mdc}(A, b) = 1$.*

Então a soma $\omega + \frac{A}{b}$, a qual chamaremos de δ , é um número irracional.

Demonstração. Por contradição, assuma que δ seja racional da forma $\frac{c}{d}$, diante disto temos:

$$\omega + \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\omega = \frac{c}{d} - \frac{A}{b}$$

$$\omega = \frac{(bc - AD)}{bd}.$$

Pela definição (1.2.16) é racional, o que contradiz a hipótese inicial de ω é irracional. $\square$

Proposição 1.3.2. *Seja ω um número irracional e $\frac{A}{b}$ um número racional com $\text{mdc}(A, b) = 1$.*

Então, o produto $\omega \cdot \frac{A}{b} = \alpha$, com $\alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que α seja racional da forma $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$, sendo assim temos

$$\omega \cdot \frac{A}{b} = \alpha$$

$$\omega \cdot \frac{A}{b} = \frac{m}{n}$$

$$\omega = \frac{b}{A} \cdot \frac{m}{n}$$

Como pela definição (1.2.14) o produto de dois racionais é um número racional, então $\omega \in \mathbb{Q}$. O que contradiz a hipótese inicial de que ω é irracional. $\square$

As proposições anteriores tornam evidente que o conjunto dos números irracionais $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ é cardinalmente mais amplo que o conjunto dos números racionais, dessa forma assim como os racionais, também é um conjunto infinito. De fato, temos $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é vazio e, além disso, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma correspondência biunívoca $\lambda : I_n \rightarrow \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, em outras palavras o conjunto dos números irracionais é cardinalmente equivalente a uma parte própria.

Os números irracionais são não-enumeráveis, ou seja, por ser um conjunto infinito, nos termos matemáticos isso equivale a dizer que não há uma correspondência biunívoca definida no conjunto dos números naturais com imagens irracionais (LIMA, 2013). De modo mais sugestivo, não há uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ que seja bijetiva.

Em relação à geometria, os irracionais apresenta também suas limitações. São construtivos pelo métodos euclidianos apenas os irracionais da forma $\pm \sqrt{-A}$, no qual A é um número racional positivo e não é o quadrado de outro racional, que são denominados de “irracionais quadráticos puros”. Às vezes, há quem chame um número na forma $A \pm \sqrt{b}$, na qual A é um número racional e $\sqrt{b}$ é um número irracional quadrático puro, de “irracional quadrático misto”. O que torna tais números curiosos é que eles podem ser construídos pelos métodos da geometria euclidiana com régua e compasso.

Os irracionais quadráticos são particionados em “similares” se pode expressá-los como múltiplos racionais do mesmo irracional quadrático; caso contrário, eles serão designados de “dissimilares”. Dessa forma, os dois irracionais a seguir são similares:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{12}}{3} &= 2 \frac{\sqrt{3}}{3}; \\ -\frac{\sqrt{25}}{3} &= -\frac{5}{3} \sqrt{3}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Em relação aos dissimilares, temos o exemplo a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{45}}{3} &= \sqrt{5}; \\ \frac{\sqrt{28}}{2} &= 2 \frac{\sqrt{7}}{7}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.4 Irracionais Algébricos e Transcendentes

De acordo com Boyer (1974) a teoria dos números tratava primariamente dos inteiros, ou mais geralmente da razão entre dois inteiros - os chamados números racionais. A partir de então, a análise real passa a lidar com um tipo de número mais geral, que pode ser racional ou irracional, ou seja, dada a equação polinomial da forma:

$$c_n x^n + c_{(n-1)} x^{(n-1)} + c_{(n-2)} x^{(n-2)} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0 = 0 \quad (1.14)$$

com coeficientes inteiros, as raízes de uma tal equação, para $n > 0$, chamam-se números algébricos.

Diante do que foi exposto anteriormente, todo número racional é algébrico. De fato, dado qualquer número racional da forma $C = \frac{c_0}{c_1}$ ou $C = -\frac{c_0}{c_1}$, estes sempre serão raízes, respectivamente, das equações lineares

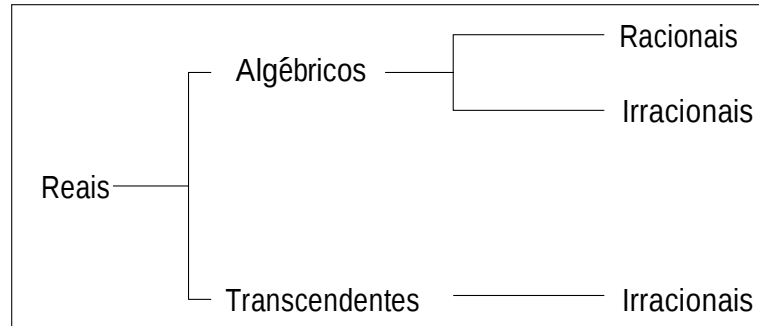
$$c_1 x^1 - c_0 = 0; \quad (1.15)$$

$$c_1 x^1 + c_0 = 0, \quad \text{com } n = 1. \quad (1.16)$$

Dessa forma, surge um questionamento em saber se todo número irracional é raiz de uma tal equação com $n > 2$. Segundo Boyer (1974), a resposta a essa questão foi finalmente dada

em 1844 por Liouville, a particular classe que ele construiu é conhecida como dos números de Liouville. O conjunto dos números reais não algébricos sendo designados como dos números transcendentos.

Figura 3 – Diagrama de partição dos números reais



Fonte: Própria do autor, 2016

A denominação transcendentos, advém da frase de Leonard Eüler, de que esses números transcendem o poder das operações algébricas (MARQUES, 2013). O conhecimento, a respeito de tais números foi ampliado por George Cantor que mostrou que a maioria dos números são transcendentos, baseando-se na noção de conjunto enumerável.

Para termos maior facilidade na identificação se um dado número irracional é algébrico ou transcendente, devemos recorrer aos anéis polinomiais, que explicita a seguinte proposição.

Proposição 1.4.1. *Sejam $n > 1$ inteiro, $f(X) = A_n X^n + \dots + A_1 X + A_0 \in \mathbb{Z}[X]$ e p e q inteiros não nulos primos entre si. Se $f(\frac{p}{q}) = 0$, então:*

- (a) $p \mid A_0$ e $q \mid A_n$;
- (b) Se f for mônico, então as possíveis raízes racionais de f são inteiras;
- (c) $(p - mq) \mid f(m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Em particular, $(p - q) \mid f(1)$ e $(p + q) \mid f(-1)$.

Demonstração. (a) A partir de $f(\frac{p}{q}) = 0$, obtemos que

$$A_n p^n + A_{n-1} p^{(n-1)} q + \dots + A_1 p q^{(n-1)} + A_0 q^n = 0 \quad (1.17)$$

e, daí,

$$\begin{aligned} \square \quad A_0 q^n &= -p(-A_n q^{(n-1)} - \dots - A_1 q^{(n-1)}) \\ \square \quad A_n p^n &= q(-A_{n-1} p^{(n-1)} - \dots - A_0 q^{(n-1)}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Portanto $p \mid A_0 q^n$ e $q \mid A_n p^n$. Mas, desde que p e q são primos entre si, temos que $p \mid A_0$ e $q \mid A_n$, como queríamos demonstrar.

(b) Imediato a partir de (a).

(c) Como $f(\frac{p}{q}) = 0$, temos $f(m) = f(m) - f(\frac{p}{q})$, o que implica em

$$f(m) = (A_n m^n + \dots + A_1 + A_0) - \frac{1}{q^n} (A_n p^n + \dots + A_1 p q^{(n-1)} + A_0 q^n).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} q^n \cdot f(m) &= q^n \cdot (A_n m^n + \dots + A_1 + A_0) - (A_n p^n + \dots + A_1 p q^{(n-1)} + A_0 q^n) \\ &= A_n ((mq)^n - p^n) + \dots + A_1 q^{n-1} (mq - p) \\ &= (mq - p)r, \end{aligned}$$

para algum $r \in \mathbb{Z}$. Portanto $(mq - p) | q^n f(m)$. De modo que, aplicando as propriedades do máximo divisor comum (mdc), obtemos

$$\text{mdc}(p, q) = 1 \Rightarrow \text{mdc}(mq - p, q) = 1 \Rightarrow \text{mdc}(mq - p, q^n) = 1,$$

de maneira que $(mq - p) \mid f(m)$. □

De posse da proposição anterior, podemos identificar a irracionalidade de alguns números, onde podemos obter as possíveis raízes racionais de uma equação polinomial de coeficientes inteiros e em caso negativo, por exclusão concluímos que a raiz é irracional. Para um estudo mais detalhado sobre polinômios sugerimos a obra de Neto (2012).

Problema 1.4.1. Prove a irracionalidade de $\sqrt[3]{2}$.

Prova: Seja $x = \sqrt[3]{2}$, elevando ao quadrado os dois membros da igualdade obtemos

$$x^2 = 2$$

subtraindo 2 de ambos os membros da equação acima, obtemos

$$x^2 - 2 = 0$$

Aplicando a Proposição (1.4.1), temos que as possíveis raízes racionais são ± 1 e ± 2 , substituindo na equação nenhum destes valores satisfaz a igualdade. Logo $\sqrt[3]{2}$ não é uma raiz racional, por exclusão conclui-se que é pertencente aos números irracionais.

Problema 1.4.2. Prove que o número $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ é irracional.

Prova: Se $\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, então $\alpha^2 - 2 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ e, daí,

$(\alpha^2 - 2)^2 = 2 + \sqrt{2}$. Logo, $((\alpha^2 - 2)^2 - 2)^2 = 2$, de maneira que α é raiz do polinômio mônico de coeficientes inteiros

$$f(x) = ((x^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2 = (x^4 - 4x^2 + 2)^2 - 2.$$

Portanto, se $\alpha \in \mathbb{Q}$, segue do teste das raízes racionais que $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\alpha \mid f(0) = 2$, de modo que $\alpha = 1$ ou 2. Mas, como

$$1 < \alpha < \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2$$

Chegamos a uma contradição.

Problema 1.4.3 (razão áurea). Prove que $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é irracional.

Prova: Seja $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, multiplicando ambos os membros desta igualdade por 2, obtemos

$$2x = 1 + \sqrt{5},$$

e subtraindo 1 e elevando ao quadrado na equação acima, temos

$$(2x - 1)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 5$$

$$4x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Perceba que o polinômio anterior é mônico, o que pela Proposição (1.4.1) as possíveis raízes racionais serão inteiras, quais sejam ± 1 . Aplicando esses valores no polinômio, temos

$$1^2 - 1 - 1 = -1 \neq 0 \quad \text{e} \quad (-1)^2 - (-1) - 1 = 1 \neq 0.$$

Logo, conclui-se que $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é irracional.

Problema 1.4.4. Prove que $\cos(20^\circ)$ é irracional.

Prova: Primeiramente vamos provar a seguinte identidade trigonométrica:

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)$$

Sabendo que

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

, temos que

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos[\theta + (\theta + \theta)] \\ &= \cos(\theta) \cdot \cos(\theta + \theta) - \sin(\theta) \cdot \sin(\theta + \theta) \\ &= \cos(\theta) \cdot [\cos(\theta) \cdot \cos(\theta) - \sin(\theta) \cdot \sin(\theta)] \\ &\quad - \sin(\theta) \cdot [\sin(\theta) \cdot \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)] \\ &= \cos(\theta) \cdot [\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] - \sin(\theta) \cdot [2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)] \\ &= \cos(\theta) \cdot [\cos^2(\theta) - 1 + \cos^2(\theta)] - 2 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ &= \cos(\theta) \cdot (2 \cdot \cos^2(\theta) - 1) - 2 \cdot \cos(\theta) \cdot (1 - \cos^2(\theta)) \\ &= 2 \cdot \cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2 \cdot \cos(\theta) + 2 \cdot \cos^3(\theta) \\ &= 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \end{aligned}$$

fazendo $\theta = 20^\circ$, temos

$$\cos(3 \cdot 20^\circ) = 4 \cos^3(20^\circ) - 3 \cos(20^\circ)$$

$$\cos(60^\circ) = 4 \cos^3(20^\circ) - 3 \cos(20^\circ).$$

Se escrevermos x no lugar de $\cos(20^\circ)$ e usarmos o fato de que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$, obtemos

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x.$$

Multiplicando a igualdade acima por 2 e subtraindo 1 de ambos os membros, obtemos

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Aplicando o teste das raízes racionais, vemos que os únicos valores possíveis para satisfazer a igualdade acima são ± 1 , $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{4}$ e $\pm \frac{1}{8}$. No entanto, nenhum destes oito números é raiz da equação. Dessa forma, concluímos que a equação não tem raízes racionais e, portanto uma de suas raízes que é $\cos(20^\circ)$ é irracional.

Problema 1.4.5. Prove que o $\sin(15^\circ)$ é irracional.

Prova: Pelos mesmos critérios do problema anterior, devemos partir de uma identidade trigonométrica, que ponha $\sin(15^\circ)$ em função de um ângulo cujo seno seja conhecido. Dessa forma temos que

$$\begin{aligned} \sin(30^\circ) &= \sin(2 \cdot 15^\circ) \\ &= \sin(15^\circ + 15^\circ) \\ &= \sin(15^\circ) \cdot \cos(15^\circ) + \sin(15^\circ) \cdot \cos(15^\circ) \\ &= 2 \cdot \sin(15^\circ) \cdot \cos(15^\circ) \\ &= 2 \cdot \sin(15^\circ) \cdot \frac{1}{2} = \sin(15^\circ). \end{aligned}$$

De sorte que, $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$ e tomando $x = \sin(15^\circ)$, temos

$$\frac{1}{2} = 2 \cdot x \cdot \sqrt{1 - x^2},$$

elevando ao quadrado os dois membros e multiplicando-os por 4, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= 16x^2 \cdot (1 - x^2) \\ 1 &= 16x^2 - 16x^4 \\ 0 &= -16x^4 + 16x^2 - 1. \end{aligned}$$

Pela proposição (1.4.1), as possíveis raízes racionais são ± 1 , $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{4}$, $\pm \frac{1}{8}$ e $\pm \frac{1}{16}$. Por substituição, conclui-se que nenhum dos valores satisfaz a igualdade, o que implica que $\sin(15^\circ)$ é uma raiz irracional.

Proposição 1.4.2. *Os números e e π são transcendentos.*

Demonstração. (Ver apêndices [A](#) e [B](#))

Além de ampliar, os recursos de identificação da irracionalidade dos números, a abordagem dos números em algébricos e transcendentos, trouxe também grandes avanços para a matemática nos tópicos de geometria. Durante muito tempo, três problemas geométricos atormentaram a sociedade matemática, conhecidos sob os nomes de “duplicação do cubo”, “trisseção de um ângulo” e “quadratura do círculo”. Sabe-se que tais construções são impossíveis, isto é, não podem ser realizadas pelos métodos de construção da Geometria Euclidiana, usando apenas régua e compasso, onde isso se deve à seguinte proposição.

Proposição 1.4.3. *Um número é construtível se, e somente se, for algébrico de grau igual a uma potência de 2.*

Demonstração : (Ver apêndice [C](#))

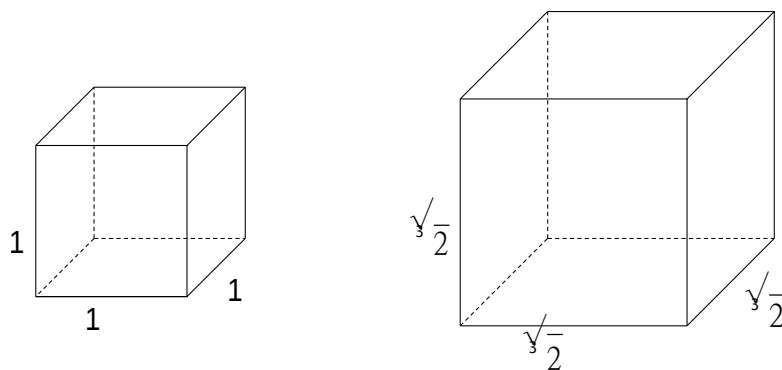
Problema 1.4.6 (Duplicação do Cubo). *O problema de “duplicação do cubo”, consiste em obter um cubo que tenha volume igual ao dobro do volume de um cubo dado.*

Apesar de ser um problema no $\mathbb{R}^3$, a solução do mesmo se reduz ao $\mathbb{R}^2$, ou seja, dado um cubo de arestas unitárias com volume $V_{(1,1,1)}$ o problema reside em construir um cubo de aresta A e volume $V_{(A,A,A)}$, tal que

$$\begin{aligned} V_{(A,A,A)} &= 2 \cdot V_{(1,1,1)} \\ A \cdot A \cdot A &= 2 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1) \\ A^3 &= 2 \cdot 1 \\ A^3 &= 2 \\ A &= \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

como mostra a FIGURA 4 a seguir

Figura 4 – Cubos duplicados



Fonte: Própria do autor, 2016

Note que $\sqrt[3]{2}$ é algébrico. De fato, temos

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[3]{2} \\x^3 &= 2 \\x^3 - 2 &= 0.\end{aligned}$$

No entanto, pela Proposição (1.4.3) este número não é construtível pois o seu grau não é uma potência de 2. Dessa forma, a “duplicação do cubo” pelos métodos euclidianos é impossível.

Problema 1.4.7 (Trissecção de um ângulo). *Significa descobrir um processo, usando apenas régua e compasso, para dividir qualquer ângulo em três partes iguais.*

A impossibilidade desta construção, necessita apenas de um contra-exemplo, ou seja, por ser um processo geral basta mostrar um “furo”. Dessa forma, podemos tomar como exemplo o ângulo de 60° . Trissectar o ângulo 60° significa construir um ângulo de 20° , de modo que a partir de um segmento unitário possa-se construir um segmento de comprimento igual a $\cos(20^\circ)$. Para tal análise, consideremos um triângulo de base 1, cujos ângulos da base sejam 60° e 90° , como na FIGURA 5. Temos, assim um triângulo retângulo ABC , reto em A com base $\overline{AB} = 1$, ângulo $\widehat{BAC} = 60^\circ$. No lado BC escolhamos um ponto D , tal que o ângulo $\widehat{BAD} = 20^\circ$. Dessa forma, temos que

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AD}}{1} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \sec(20^\circ). \quad (1.19)$$

Portanto, a trissecção de um ângulo de 60° se resume na construção de um segmento de comprimento igual a $\sec(20^\circ)$, de modo que equivale construir um segmento de comprimento $\cos(20^\circ)$, pois $\cos(20^\circ)$ e $\sec(20^\circ)$ são recíprocos um do outro e se um segmento for construtível, o segmento de comprimento recíproco também o será.

De sorte disso, basta analisarmos a possibilidade de construir um segmento de comprimento $\cos(20^\circ)$ a partir de um segmento unitário. Pelo Problema (1.4.4) vimos que $\cos(20^\circ)$ é um número algébrico de grau 3 o que pela Proposição (1.4.3) torna impossível esta construção acarretando na impossibilidade da trissecção do ângulo de 60° .

Problema 1.4.8 (Quadratura do Círculo). *Demonstre a impossibilidade de construir com régua e compasso, um quadrado com área igual à de um círculo dado.*

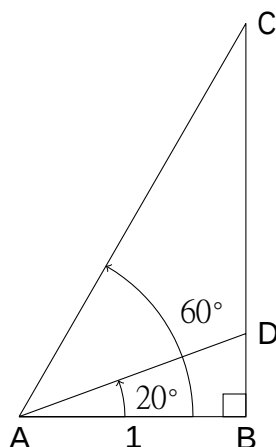
Demonstração. Considerando um círculo de raio 1, temos que sua área A é dada por

$$\begin{aligned}A &= \pi \cdot 1^2 \\&= \pi\end{aligned}$$

tomando um quadrado de lado 1, temos que sua área A^J é dada por

$$A^J = 1^2.$$

Figura 5 – Triângulo Retângulo



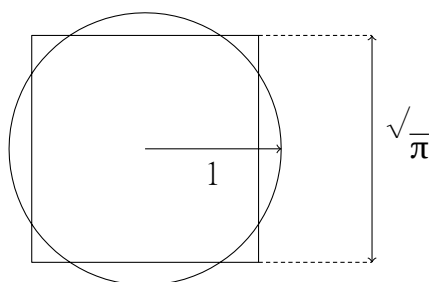
Fonte: Própria do autor, 2016

Por definição queremos que

$$\begin{aligned} A^J &= A \\ l^2 &= \pi \\ l &= \sqrt{\frac{\pi}{\pi}}. \end{aligned}$$

Portanto, o problema se resume em construir um segmento de comprimento igual a $\sqrt{\frac{\pi}{\pi}}$.

Figura 6 – Quadratura do círculo



Fonte: Própria do autor, 2016

No entanto, essa construção é impossível pela transcendência de π que implica também na transcendência de $\sqrt{\frac{\pi}{\pi}}$. □

Os números irracionais, foi objeto de estudos também de um dos matemáticos mais influentes do século XX, David Hilbert. No congresso internacional, realizado em Paris no ano de 1900, Hilbert apresenta uma conferência intitulada “Problemas matemáticos” onde expõe uma lista de 23 problemas com a finalidade de alavancar os tópicos de matemática.

No problema sete, pergunta-se se o número α^β , onde α é algébrico (e não zero ou 1) e β é irracional e algébrico, é transcendente. Em forma geométrica alternativa, Hilbert exprimia isso perguntando se, em um triângulo isósceles, a razão da base para um lado é transcendente se a razão do ângulo no vértice

para os ângulos na base é algébrica e irracional. Essa questão foi resolvida, em 1934, quando Aleksander Osipovich Gelfond (1906-1968) demonstrou que a conjectura de Hilbert, agora conhecida como Teorema de Gelfond, era, de fato, correta: α^{β} é transcendente se α é algébrico e não é zero nem 1, e se β é algébrico e não racional. Mais tarde, Alan Baker forneceu uma importante generalização do Teorema de Gelfond (BOYER, MERZBACH, 2012).

Proposição 1.4.4 (Gelfond-Schneider). *Seja α um número algébrico não pertencente ao conjunto $A = \{0, 1\}$ e β um número algébrico e irracional, então α^{β} é transcendente.*

Demonstração. Vide (Marques, p.182 - 185).

Problema 1.4.9. *Prove que $2^{\sqrt{2}}$ é irracional.*

Prova: Perceba que 2 é um número algébrico. De fato, 2 é raiz de $p(x) = x - 2$. Pelo Problema (1.4.1), temos que $2^{\sqrt{2}}$ é algébrico e irracional, sendo assim, pela Proposição (1.4.4) temos que $2^{\sqrt{2}}$ é transcendente o que implica ser irracional.

Umas das vantagens primárias, da teoria dos números algébricos e transcendentos é a identificação se um dado número é irracional, algo que antes era possível apenas pelo princípio de redução ao absurdo. Há de se frisar, que esta abordagem teórica também possibilita ver que os números irracionais são não-enumeráveis, algo que antes era visto apenas por uma correspondência biunívoca.

Portanto, a partir de todo o contexto histórico dos números irracionais e também da teoria dos algébricos e transcendentos, a presente pesquisa explicitou em linguagem matemática todas as asserções citadas anteriormente de modo que pudesse culminar em um trabalho com uma roupagem histórica e de forma mais incisiva uma apreciação matemática.

2 METODOLOGIA DA PESQUISA

2.1 Modalidade da pesquisa

A presente pesquisa tem caráter qualitativa-exploratória. De acordo com D'ambrósio (2012, p.93) a pesquisa qualitativa é muitas vezes chamada de etnográfica, ou participante, ou inquisitiva, ou naturalista, de modo que essas nomenclaturas sugerem que a pesquisa seja focalizada no indivíduo com a sua complexidade, naturalmente a interação pesquisador-pesquisado é fundamental e por isso essa modalidade é também denominada de **pesquisação**. O autor ainda organiza a pesquisa qualitativa em algumas etapas:

1. Formulação das questões a serem investigadas com base no referencial teórico do pesquisador;
2. Seleção de locais, sujeitos e objetos que constituirão o foco da investigação;
3. Identificação das relações entre esses elementos;
4. Definição de estratégias de coleção e análise de dados;
5. Coleção de dados sobre os elementos selecionados no item 2 e sobre as relações identificadas no item 3;
6. Análise desses dados e refinamento das questões formuladas no item 1 e da seleção proposta no item 2;
7. Redefinição de estratégias definidas no item 4;
8. Coleta e análise dos dados.

A análise dos dados depende de uma fundamentação teórica que, obviamente, depende do pesquisador e de suas interpretações, assim, a pesquisa qualitativa é muitas vezes chamada hermenêutica. Deve-se salientar, que essa modalidade de pesquisa depende muito de o pesquisador estar em atividade na sala de aula como professor (D'AMBRÓSIO, 2012).

Sustentado nas análises anteriores, a interação pesquisador-pesquisados se deu em forma de minicurso, haja vista, essa forma de ensino atende muito bem aos requisitos da pesquisa qualitativa, de modo que a qualidade tratada nesta pesquisa reside no estudo do conjunto dos números irracionais.

A presente pesquisa também é exploratória, pois de acordo com Gil (2010), "as pesquisas exploratórias têm como propósito proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses". Dessa forma, explicitou-se as asserções

inerentes aos números irracionais, expondo-o também pela teoria dos números algébricos e transcendententes.

A primeira fase da pesquisa consistiu na análise dos materiais didáticos utilizados pelas escolas do município de Corrente, para inferir o modo como é tratado os números irracionais nestes materiais, que de já a experiência do autor constata que esses conteúdos se restringe a apenas uma página.

Na segunda fase da pesquisa foi aplicado um questionário direto a respeito da identificação da irracionalidade de alguns números. Tendo, como propósito investigar se o público alvo tem facilidade em lidar com os números irracionais e em caso afirmativo coletar explicações convincentes.

A terceira fase da pesquisa teve como principal incumbência a exposição da teoria que envolve os números algébricos e transcendententes. A interação entre pesquisador e público alvo ocorreu em forma de minicurso com 20 horas-aulas, no período de 14 a 19 de dezembro de 2016 no campo de investigação desta pesquisa que será melhor explicitado no tópico posterior.

A quarta fase da pesquisa foi direcionada aos alunos da Especialização em Ensino de Matemática, onde foi apresentada a teoria matemática que envolve essa pesquisa através de aula expositiva realizada no dia 21 de janeiro de 2017 e ao final foi aplicado um questionário para coletar o modo como estes trabalhavam os números irracionais em suas aulas e também inferir a opinião destes em relação à teoria dos algébricos e transcendententes.

A fase que finalizou essa pesquisa, consistiu na coleta e análise dos dados, que poderão corroborar ou negar os objetivos deste trabalho.

2.2 Análise dos Livros Didáticos

Antes de uma análise a respeito do conhecimento dos números irracionais é imprescindível investigar o modo como é abordado este tópico da Matemática nos livros didáticos nas escolas de Ensino Regular nos níveis Fundamental II e Médio onde se delineou a presente pesquisa.

2.2.1 Dante, Luiz Roberto. *Projeto Teláris: Matemática*

Este livro, utilizado pelas escolas da rede estadual de ensino em Corrente-PI (triênio 2014-2016), no Ensino Fundamental II, trás uma sucinta abordagem do conjunto dos Números Irracionais que corresponde a apenas uma página do livro 3 de uma coleção de 4 volumes.

O autor expõe os números $0,101001000100001000000\dots$ e $2,71727374\dots$, afirmando que estes são representações decimais infinitas e não periódicas. Por não serem racionais, os números citados são chamados de números irracionais e, a partir disto, generaliza que números com essas características são pertencentes ao conjunto dos números irracionais.

Para fixação da definição, o autor faz a seguinte comparação: "Legal e ilegal, lícito e ilícito, racional e irracional, ou seja, que não é racional". Por conseguinte, cita como exemplos de números irracionais os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π , e.

Nas páginas seguintes do livro, é observado alguns números irracionais notáveis como o π em que o autor o trás como a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, que se resume numa página. No livro, há uma apreciação histórica da razão áurea $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$, que segundo o autor representava para os gregos harmonia, equilíbrio e beleza, que também é descrito numa página. Finaliza com o $\sqrt{2}$, fazendo aproximações sucessivas para este número irracional e descrevendo de forma sucinta o contexto histórico do surgimento deste número.

2.2.2 Souza, Joamir Roberto de. *Novo Olhar: Matemática*

Este livro didático, utilizado no ensino médio das escolas da rede estadual em Corrente-PI (triênio 2015 - 2017), expõe o conjunto dos números irracionais em apenas uma página, sendo abordada de forma sucinta o contexto histórico que levou ao surgimento dos números em questão e cita como exemplo o cálculo da diagonal de um quadrado de lado unitário.

O livro sugere a utilização de uma calculadora ou computador para obter $\sqrt{2}$ com algumas casas decimais e afirma que $\sqrt{2}$ possui infinitas casas decimais não periódicas. A partir disto, generaliza que todos os números que apresentam essa característica são pertencentes ao Conjunto dos Números Irracionais.

A obra em questão expõe ainda que a raiz quadrada de um número natural não quadrado perfeito é irracional e que a raiz cúbica de um número natural não cúbico perfeito também é irracional. Por conseguinte, cita-se quatro exemplos de números irracionais: $\sqrt{3}$, $-\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{-2}}{2}$ e $\frac{4}{7}$. Finalizando, apresenta o π como a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência e também com a localização de 5 números irracionais na reta numérica.

2.3 O Campo de Investigação e seus Sujeitos

A pesquisa, teve como campo de investigação o Instituto Federal do Piauí (IFPI) localizado no bairro Nova Corrente no município de Corrente, cidade esta situada no extremo sul do Piauí, sendo servida pela rodovia BR-135 que liga a capital do estado Teresina à capital nacional Brasília.

O público alvo foram 6 alunos da Especialização em Ensino de Matemática, que são professores da rede municipal e estadual na Cidade de Corrente-PI, 17 alunos da Licenciatura em Matemática. A escolha por esse público se deve por estes serem os atuais e futuros professores que irão trabalhar os tópicos Matemáticos na cidade de Corrente, e em caso afirmativo da proposta desse trabalho eles condicionarão uma melhor análise do Conjunto dos Números Irracionais.

Por princípios éticos da pesquisa os nomes dos integrantes do público alvo não serão expostos. No entanto, os mesmos serão representados nesta pesquisa da seguinte forma: Os alunos das Licenciaturas por $(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, \dots, L_{15}, L_{16}, L_{17})$ e os alunos da especialização por $(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6)$.

2.4 Instrumentos de Coleta de dados

Como instrumentos de coleta de dados, utilizou-se de questionários em que os mesmos tinham por finalidade inferir os aspectos qualitativos e também exploratórios da presente pesquisa. O primeiro questionário teve por objetivo diagnosticar o conhecimento dos acadêmicos em relação ao conjunto dos Números Irracionais. O segundo questionário foi direcionado aos professores com o intuito de saber se estes exploravam o conjunto dos números irracionais. O terceiro e quarto questionários foram direcionados aos acadêmicos e professores, respectivamente, com a finalidade de diagnosticar a viabilidade da teoria dos algébricos e transcendentais no estudo do conjunto dos números irracionais.

2.4.1 Aspectos Qualitativos

Questionário - 1

1. Marque C para as asserções corretas e E para as asserções erradas.
 - (a) () Existem números naturais tanto quanto existem números inteiros.
 - (b) () Existem números naturais tanto quanto existem números racionais.
 - (c) () Existem mais números irracionais do que números racionais.
 - (d) () Existem números irracionais expressos em forma de fração.
 - (e) () Existem números irracionais que não são construtíveis pelos métodos euclidianos.
2. Defina números irracionais.
3. Cite 5 exemplos números irracionais.
4. Quais dos números abaixo você identifica como pertencente ao conjunto dos números irracionais? Justifique.
 - (a) $\sqrt[3]{8}$
 - (b) $\sqrt{-2}$
 - (c) $\cos 30^\circ$
 - (d) $\cos 60^\circ$

Este questionário, teve por finalidade inferir dos sujeitos investigados seus conhecimentos sobre os números Irracionais que é o objeto de estudo deste trabalho. No entanto, é imprescindível também diagnosticar o conhecimento que se tem dos demais conjuntos numéricos, pois como ficou explícito na Seção (1.2), os conjuntos numéricos estão muito bem relacionados no que diz respeito às suas caracterizações.

Questionário - 2

1. *Você trabalha o conjunto dos números irracionais em suas aulas? Justifique.*

Este questionário tem por finalidade diagnosticar se, apesar dos livros expor de forma sucinta o conjunto dos números irracionais, os professores o abordam com outros materiais que contemplem o estudo sobre o conjunto em questão.

2.4.2 Aspectos Exploratórios

A pesquisa teve também como característica principal, interferir no ensino explorando uma metodologia para trabalhar o conjunto dos números irracionais - A teoria dos algébricos e transcendententes.

Como já foi visto na Seção (2.1) a teoria foi exposta através de aulas expositivas, onde ao final foram realizadas perguntas para inferir a opinião do público alvo em relação ao estudo dos números Irracionais pela teoria dos algébricos e transcendententes. As perguntas, estão listadas a seguir onde o Questionário - 3 foi direcionado aos alunos da Licenciatura em Matemática e o Questionário - 4 foi direcionado aos alunos da especialização.

Questionário - 3

1. *O modo como foi abordado o conteúdo no minicurso, contribuiu de que forma em sua formação profissional?*
2. *A teoria dos algébricos e transcendententes, facilita as asserções inerentes ao conjunto dos números irracionais?*

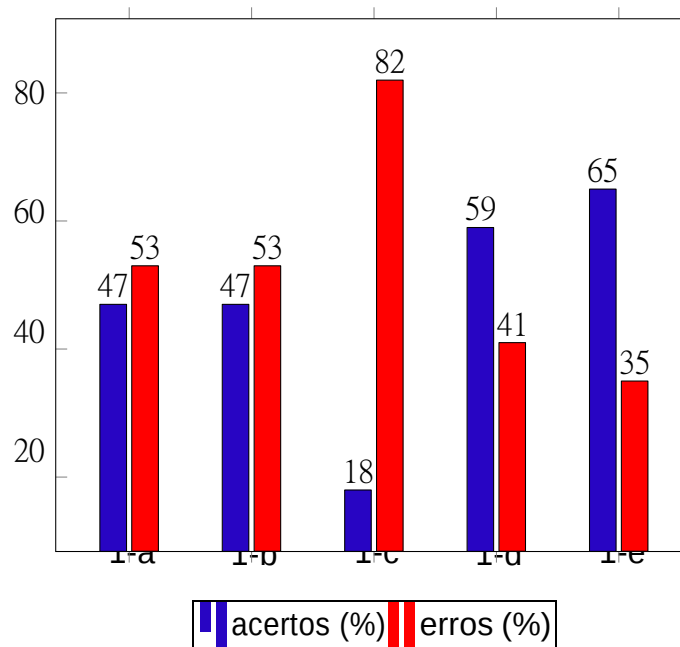
Questionário - 4

1. *Enquanto professor, se o aluno o questionasse a respeito da irracionalidade de $\cos(15^\circ)$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[3]{6} + 4$ antes de ver essa teoria você estaria apto a dar uma resposta convincente para o mesmo? E após a teoria dos algébricos e transcendententes exposta no minicurso?*

3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Para melhor apreciação dos resultados da primeira pergunta do Questionário - 1, tem-se o gráfico da FIGURA 7. Perceba que, nas três primeiras afirmações os erros superaram os acertos, o que mostra que os alunos ainda não têm de forma clara as características inerentes aos conjuntos numéricos.

Figura 7 – Gráfico de resultados da 1ª questão



Fonte: Própria do autor, 2016

Quanto à segunda questão, os alunos se mostraram confusos na definição dos números irracionais, tendo um exagerado número de erros equivalente à 76% dos entrevistados. Para maior clareza, abaixo seguem as definições de alguns alunos, escritas na íntegra tais como foram expostas.

Dízimas, raízes, ou seja números que não são inteiros, que não se usa no cotidiano. ex: $\frac{1}{2}$ (L1, 2016).

O erro dessa definição, reside primeiramente na afirmação de ser dízimas, não deixando claro o tipo da mesma, algo que pode incluir as periódicas que não são Irracionais. Logo em seguida, citar raízes sem caracterizá-las permite que sejam incluídas, por exemplo, as raízes quadradas de quadrados perfeitos que não são irracionais, cometendo também o erro em dizer que esses números são inteiros e que não são usados no cotidiano, pois os números irracionais tem diversas aplicações no cotidiano como exemplo cita-se a razão áurea.

O número é dito irracional quando na divisão por outro número aparece uma sequência de números distintos (L₁, 2016).

A definição acima, apresenta-se de forma imprecisa. De fato, pois é possível realizar uma divisão entre números inteiros em que o resultado é uma sequência de numerais distintos, por exemplo $2469/20000 = 0,12345$ que é uma sequência com algarismos distintos não pertencentes ao conjunto dos números irracionais.

Pode ser entendido como números não periódicos, que não são expressos na forma de fração (L₃, 2016).

A definição acima, apresenta-se sem informações complementares que permitem incluir não apenas números irracionais, a primeira afirmação faltou expor que são números de representação decimal não periódica, já na segunda parte da definição seria necessário acrescentar que não são frações de números inteiros com denominador diferente de zero. Do modo como foi abordado, permite escrever números como $\frac{\sqrt{2}}{2}$ que é um número irracional em forma fracionária.

Podem ser definidos como sendo os números que podem ser expressos na forma de uma dízima periódica ou não periódica (L₄, 2016).

Como foi exposto na Seção (1.3), os números irracionais apresentam uma representação decimal não periódica, caso contrário, pertenceriam ao conjunto Q. De sorte disso, pode-se afirmar que a definição dos números irracionais do aluno L₄ está incorreta.

Em relação à terceira questão, os alunos mantiveram um desempenho semelhante à segunda questão, ou seja, 70% dos discentes não contemplaram aquilo que a questão exigia. Nos exemplos, os alunos colocaram números tais como $\sqrt{-4}$, (0,666...), (0,73), dentre outros, como sendo números irracionais, algo que é errado, outros alunos não conseguiram citar os 5 exemplos pedidos.

Quanto à quarta questão, os resultados estão expressos no gráfico da FIGURA 8. De modo que neste está os erros, acertos e o número de alunos que não justificaram as suas respostas.

A pesquisa também teve como fonte de informações professores de Matemática das escolas municipais e estaduais em Corrente - PI, onde aos mesmos foi direcionada uma pergunta que tinha a finalidade de inferir o aspecto qualitativo do ensino acerca dos números irracionais, pergunta esta listada no Questionário - 2, tendo as seguintes respostas.

Não. É inviável para o público que trabalho (E₁, 2017).

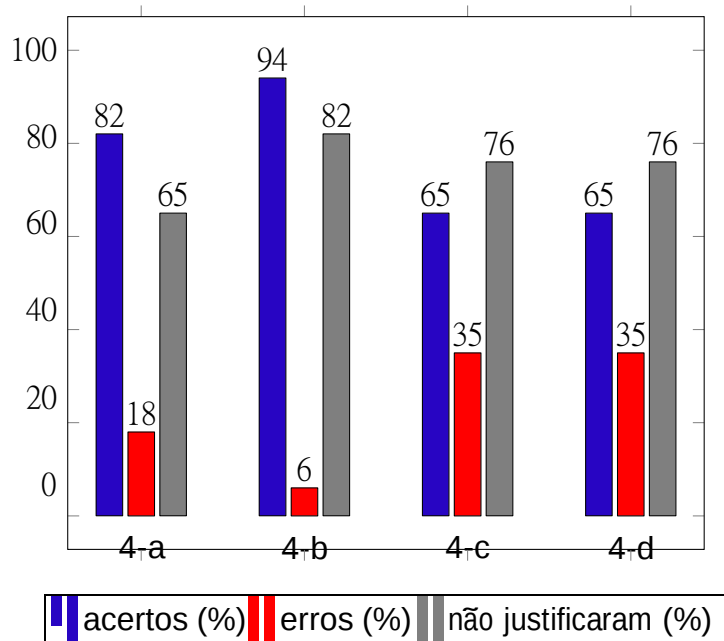
Não. Pois não obtive a oportunidade (E₂, 2017).

Não. Porque sempre me deparei com livros que não tem estudos sobre os irracionais e vem sempre limitados sem abordar o mesmo questionar sobre os números irracionais (E₃, 2017).

Sim. Apartir do 8º ano, mas de modo restrito ou seja uma pequena abordagem dos conjuntos, porém até então não sabia a sua importância para a matemática no que diz respeito o ensino aprendizagem (E₄, 2017).

Sim! Mas simplificado junto com os outros conjuntos. Então somente a introdução (E₅, 2017).

Figura 8 – Gráfico de resultados da 4ª questão



Fonte: Própria do autor, 2016

O Questionário - 3, que foi direcionado aos alunos da Licenciatura em Matemática, em sua 1ª questão teve as seguintes respostas.

Por meio deste minicurso, pôde perceber uma maior significância acerca dos conjuntos numéricos na educação básica, principalmente no conjunto dos números irracionais, e dessa forma, poderei formar o meu método de ensino mais completo, em todo sentido da palavra (L₃, 2016).

Contribuiu, porque teve fatos sobre os números irracionais que não tinha conhecimento, pois nem era abordado em livros e no minicurso abordou esses assuntos bem claramente (L₆, 2016)

O conteúdo foi abordado de forma bem compreensiva, mostrando várias demonstrações e dando ênfase ao que vemos frequentemente e não damos muita atenção. Desta maneira abre portas para que possamos nos dedicar nesta área (L₇, 2016).

Na verdade contribui muito, pois durante o curso de Lic. Matemática ainda não tinha visto nada igual, então como estudante foi um aprendizado de grande valia (L₈, 2016)

Quanto às respostas da 2ª questão do Questionário - 3, 100% dos alunos responderam que a teoria dos números algébricos e transcendentais facilita o estudo das asserções referentes ao conjunto dos números irracionais.

As respostas do Questionário - 4, estão listadas como segue

Neste caso, não estaria apto a dar uma resposta convincente a esse aluno, mas depois do minicurso isso com certeza, estou apto a esclarecer e até mesmo convencer esse aluno (E₆, 2017).

Não. Com certeza essa teoria ajuda a identificar e como se chegar ao número irracional (E_5 , 2017).

Não. Depois do exposto no minicurso, iria estudar mais no assunto e dar uma resposta convincente para o mesmo (E_5 , 2017).

Uma breve pesquisa para tentar solucionar, mas esse método facilita bastante, depois desse minicurso tem como solucionar e desvendar se o número é algébrico ou transcendente (E_4 , 2017).

Concluiu-se com essa pesquisa, que o problema da falta de conhecimento dos números irracionais é um “círculo vicioso”, ou seja, um processo no qual a situação inicial gera consequências que conduzem novamente ao estado inicial.

A gênese da problemática está no modo como é abordado o conteúdo em questão nos livros didáticos como ficou evidente na Seção (2.2), estes não abordam os tópicos sobre o conjunto dos números irracionais como é proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) visto na introdução deste trabalho.

Os dois livros analisados não expõe nenhum enunciado categórico que conduza à entender as características, operações aritméticas, construções geométricas e aplicações desse conjunto em situações do cotidiano dos discentes, provocando dessa forma um desinteresse e consequentemente pouco conhecimento dos números irracionais por parte dos alunos.

Nota-se pelo que foi exposto na Seção (2.2), que tanto os livros do ensino fundamental quanto do ensino médio, não expõem nenhuma característica dos números irracionais em paralelo com os demais conjuntos numéricos, como é proposto nos PCNs, inibindo os discentes de entenderem as diferenças entre os conjuntos numéricos no tocante às suas caracterizações.

Em relação aos professores, estes deveriam contornar a ausência de informações nos livros didáticos sobre os números irracionais. No entanto, lançando mãos apenas aos livros didáticos como foi exposto pelo aluno E_2 e E_3 , ficou evidente na pesquisa que eles não trabalham os números irracionais em sala de aula, deixando lacunas na formação dos discentes.

Em relação à pesquisa realizada com acadêmicos, ficou nítido pelos dados expostos que os prejuízos advindo do ensino regular permanecem de maneira alarmante. Nas repostas do questionário exposta no gráfico da FIGURA 7, percebe-se que o número de erros foram maiores que os acertos em relação à primeira questão, sendo perguntas que tinham por finalidade inferir a noção geral dos alunos sobre os conjuntos numéricos, algo que como propõe os PCNs poderia ser minimizado mostrando as características dos números irracionais, pois estes apresentam muitos contra-exemplos em relação aos demais conjuntos numéricos.

No segundo questionamento realizado aos alunos, as respostas apresentadas mostram que os mesmos majoritariamente não conseguem o princípio básico do estudo dos conjuntos numéricos que é sua definição, sendo assim, se a definição já é um problema, então as noções operacionais deste conjunto também o serão.

Alguns alunos deram aos irracionais a definição dos números racionais como pode ser observado na resposta do aluno L_4 , corroborando o que foi exposto nos parágrafos anteriores

que o desconhecimento das asserções do conjunto dos números irracionais gera um “círculo vicioso”, ficando também evidente que a partição dos reais não está inteligível na percepção dos discentes, analisada a resposta do aluno L_1 .

Para ratificar ainda mais a problemática, no Questionamento 3, observou-se que os sujeitos da pesquisa não conseguiram citar pelos menos 5 exemplos de números irracionais e os exemplos citados foram os que os livros didáticos trazem em suas entrelinhas, o que mostra que a forma sucinta dos livros didáticos acarreta em um conhecimento sucinto dos alunos que cursam Matemática.

Na quarta questão do Questionário - 1, os alunos obtiveram acertos superiores aos erros. No entanto, não conseguiram justificar suas respostas o que é preocupante devido a ser um questionário direcionado a atuais e futuros professores de Matemática, pois a essência do docente é esclarecer aos alunos aquilo que está sendo exposto, primando pelo rigor matemático.

Diante da problemática, este trabalho teve também como finalidade expor um método que viabilizasse o estudo sobre o conjunto dos números irracionais. Como foi exposto, trabalhou-se a teoria dos algébricos e transcendentais que esclareceu e resolveu diversos problemas tanto em relação a irracionalidade de certos números, quanto na construtibilidade pelo métodos euclidianos.

A proposta teve grande aceitação pelo público alvo dessa pesquisa, como pôde ser observado nas respostas do Questionário - 3. Os alunos da Licenciatura em Matemática puderam perceber a importância em trabalhar os conjuntos numéricos e o quanto o estudo a respeito dos números irracionais é indispensável, como ficou evidente nas palavras do aluno L_5 que ao final diz em “formar um método de ensino mais completo”.

A teoria dos algébricos e transcendentais, amplia a capacidade desses alunos em demonstrar a irracionalidade dos números o que lhe motiva a trabalhar os números irracionais em suas aulas, como pode ser reforçado nas palavras do aluno L_7 .

No que diz respeito aos atuais professores, a abordagem dos conteúdos feita no minicurso, proporcionou-lhes uma ferramenta para trabalhar os números irracionais para os seus alunos de forma clara e não apenas como é abordado nos livros didáticos, algo que está ratificado nas palavras do professor (aluno da especialização) E_6 .

Como ficou evidente nas respostas dos alunos da especialização, estes não tinham até então capacidade em tirar dúvidas dos seus alunos no que diz respeito aos números irracionais. No entanto, após o minicurso essas dificuldades foram minimizadas, o que mostra a importância de pesquisas e propostas didáticas nesse tópico da Matemática.

Cabe frisar, que tais professores já foram alunos do “círculo vicioso” no qual atualmente são professores e que suas dificuldades advêm também dos livros didáticos e dos professores que os mesmos tiveram.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A preocupação com o ensino, nos motivou a realizar a presente pesquisa e se tratando dos números irracionais essa situação é mais preocupante ainda. Diante disso, foi apresentado uma fundamentação teórica que tinha por finalidade expor como se deu o surgimento deste conjunto numérico, seja na percepção histórica ou Matemática.

Quanto à construção dos números aqui exposta, apesar de está longe de ser completa apresenta-se os ambientes matemáticos em que se estrutura tais construções e também como é definida as operações aritméticas dentro de cada conjunto. O objetivo dessa exposição é sensibilizar aos leitores deste trabalho que há além de uma explicação histórica para o surgimento de cada conjunto numérico.

Buscou-se expor diversos exemplos para assim contemplar o que é proposto nos PCNs que propõe “que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas “casas” decimais não-periódicas” (BRASIL, 1988). Sugere-se que seja trabalhada as demonstrações da irracionalidade dos números para que dessa forma os discentes possam ter argumentos matemáticos para dissertarem sobre este conjunto numérico.

Sendo assim, espera-se que com essa pesquisa os estudos sobre o conjunto dos números irracionais possam ser expandidos, não ficando apenas na forma sucinta dos livros didáticos que como ficou evidente nesta pesquisa se apresenta de modo muito impreciso.

Quanto aos alunos que participaram, almeja-se que estes possam interferir no currículo de Matemática, lançando mãos a outras formas de trabalhar o conjunto em questão, pois só assim será interrompido o indesejável “circulo vicioso” explicitado neste trabalho.

Em relação à teoria dos números algébricos e transcendentos, que esta seja mais difundida nas ementas dos currículos de matemática, pois trabalhar os números irracionais dentro desta teoria proporciona maior dinamicidade a este estudo, como ficou nítido, é possível trabalhar os números irracionais dentro de outros tópicos da Matemática.

Referências

- AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da matemática*; tradução de João Bosco Pitombeira. 3 ed.-Rio de Janeiro: SBM, 2013. 191 p. (Coleção do Professor de Matemática).
- ÁVILA, Geraldo. *Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais*. RPM, Rio de Janeiro, n.05, p.153-161, 2015.
- BOYER, Carl Benjamim. *História da Matemática*. Trad. Elsa F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974. 488 p.
- BOYER, C. Benjamim; C. MERZBACH, Uta. *História da Matemática*. Trad. Helena Castro. São Paulo: Bluchr, 2012.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. 1998.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan, 1932-*Educação Matemática: Da teoria à prática*. 23 ed. - Campinas, SP: Papirus, 2012.-(Coleção Perspectivas em Educação Matemática).
- DANTE, Luiz Roberto. *Projeto Telâres: Matemática*. -1.ed. - São Paulo: Ática, 2012. (Matemática: Ensino Fundamental - 8º ano).
- DANTZIG, Tobias. *Número: a linguagem da ciência*. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.
- FERREIRA, Jamil. *Construção dos números*. 3 ed.- Rio de Janeiro: SBM, 2013. 133 p. (Coleção Textos Universitários, 9).
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes. *Números irracionais e transcendentos*. 3.ed.- Rio de Janeiro: SBM, 2011. 66 p.
- GARCIA, V. Clotilde; SOARES, D. da Silva; FRONZA, Juliana. *Ensino dos números irracionais no nível fundamental. Coleção cadernos de matemática para professores*. Volume 1. DMPA, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.
- GIL, Antônio Carlos. *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. -5.ed. - São Paulo: Atlas, 2010.
- GONÇALVES, Adilson. *Introdução à álgebra*. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 194 p.; (Projeto Euclides)
- KLINE, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press, 1972.
- LIMA, Elon Lages. *Análise Real* volume 1. Funções de uma variável. 12 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. 198 p.

- MARQUES, Diego. *Teoria dos números transcendentos*. 1 ed.- Rio de Janeiro: SBM, 2013. 223 p. (Coleção Textos Universitários; 14)
- NETO, Antônio Caminha Muniz. *Tópicos de Matemática Elementar: polinômios*. - 1.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2012. v.6; 248 p.
- NIVEN, Ivan. *Números racionais e irracionais*; tradução de Renate Watanabe. - Rio de Janeiro: SBM, 1990. 175 p.
- REZENDE, Veridiana. *Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino*. Tese de doutorado. PCM, Universidade Estadual de Maringá, 2013.
- RIPOLL, Cydara. Livro do Professor de Matemática volume I: *números naturais* / Cydara Ripoll, Letícia Rangel, Victor Giraldo.-Rio de Janeiro: SBM, 2015. 210 p. (Série: Coleção de Matemática para o Ensino, 01).
- RIPOLL, Cydara. Livro do Professor de Matemática volume II: *números inteiros* / Cydara Ripoll, Letícia Rangel, Victor Giraldo.-Rio de Janeiro: SBM, 2015. 210 p. (Série: Coleção de Matemática para o Ensino, 02).
- SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. *A Crítica ao Ensino de Matemática*. Revista de Educação em Ciência e Matemática, n.03, 2006.
- SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo Olhar: Matemática*. -2.ed. -São Paulo: FTD, 2013. (Matemática - Ensino Médio I).

Apêndices

APÊNDICE A – Demonstração da Transcendência de e

Para a demonstração da transcendência de e é necessário a priori informações imprescindíveis que estão listadas a seguir como lemas, pois auxiliarão na demonstração desta proposição.

Lema A.1. *Seja $C(x)$ um polinômio de grau r . Defina a função*

$$F(x) = C(x) + C'(x) + \cdots + C^{(r)}(x) \quad (\text{A.1})$$

onde $C^{(r)}$ representa a derivada de ordem r de C . Então

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}C(x).$$

Lema A.2. *Aplicando o Teorema do Valor Médio à função $e^{-x}C(x)$, temos que*

$$F(k) - e^k F(0) = -ke^{k(1-\theta_k)} C(k\theta_k) \quad (\text{A.2})$$

para todo $k > 0$, onde θ_k é um número entre 0 e 1.

Corolário 1. *Pelos lemas anteriores, definimos $F(x)$ e G_k , onde*

$$G_k = -ke^{k(1-\theta_k)} C(k\theta_k). \quad (\text{A.3})$$

Supondo que e seja algébrico, isto é, existem inteiros $c_0, c_1, \dots, c_n$ (podemos tomar $c_0 > 0$) tais que

$$c_n e^n + \cdots + c_1 e + c_0 = 0. \quad (\text{A.4})$$

Então

$$c_0 F(0) + c_1 F(1) + \cdots + c_n F(n) = c_1 \varepsilon_1 + \cdots + c_n \varepsilon_n. \quad (\text{A.5})$$

Observação 3. *O objetivo é mostrar que o lado esquerdo de (A.5) é um inteiro não divisível por p , com $p \in \mathbb{Z}$, enquanto o lado direito é menor que 1 em valor absoluto. Isso dará um absurdo. Para tais fins seguem os lemas.*

Lema A.3. *Seja $Q(x) = \sum_{j=0}^r A_j x^j$ um polinômio com coeficientes inteiros, e seja $p < r$.*

Então

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^r \frac{j!}{(j-i)!} A_j x^{j-i}, \quad i \leq r. \quad (\text{A.6})$$

Lema A.4. *Pela equação (A.6), temos que*

$$\frac{1}{(p-1)!} Q^{(i)}(x), \quad \text{para } i \leq p$$

é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p .

Lema A.5. Considerando o polinômio

$$C(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p \dots (n-x)^p. \quad (\text{A.7})$$

Então $C(x)$ é da forma

$$C(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_0}{(p-1)!} x^p + \dots \quad (\text{A.8})$$

sendo

$$C^{(i)}(k) = 0; \quad k = 1, \dots, n; \quad i < p, \quad (\text{A.9})$$

e

$$C^{(p-1)}(0) = (n!)^p \quad \text{e} \quad C^{(i)}(0) = 0, \quad i < p-1. \quad (\text{A.10})$$

Lema A.6. Se $d_i, i = 0, 1, \dots, r$ são inteiros, tais que os d_i , para $i \neq 1$, são divisíveis por p , e d_0 não é divisível por p , então $\sum_{i=0}^r d_i$ não é divisível por p .

Lema A.7. $F(k)$, para $k = 1, \dots, n$, é um inteiro divisível por p e $F(0)$ é um inteiro não divisível por p .

Lema A.8. Como $0 < c_0 < p$, sob as condições dos lemas (A.6) e (A.7), temos que

$$c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n) \quad (\text{A.11})$$

é um inteiro não divisível por p .

Lema A.9. Os G_k , definidos em (A.3), e calculados para o polinômio $C(x)$, definido em (A.7), têm a forma

$$G_k = -k e^{k(1-\theta_k)} \frac{1}{(p-1)!} (k\theta_k)^{p-1} (1 - k\theta_k)^p \dots (nk\theta_k)^p. \quad (\text{A.12})$$

Usando (A.12) e o fato de que $0 < \theta_k < 1$, temos que

$$|G_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}, \quad \text{para } k \leq n. \quad (\text{A.13})$$

Lema A.10. Se p for um número primo suficientemente grande, então

$$|c_1 G_1 + \dots + c_n G_n| < 1.$$

Demonstração. Observe que os lemas (A.8) e (A.10) implicam, via igualdade (A.5), que $c_0 F(0) + \dots + c_n F(n)$ seja um inteiro não divisível por p , o qual é simultaneamente menor que 1, ou seja zero. Mas isso não é possível, e tal absurdo provém da suposição feita de que e fosse algébrico. Logo, e é transcendente. $\square$

APÊNDICE B – Demonstração da Transcendência de π

Demonstração. Suponhamos, por contradição que π seja um número algébrico. Logo, $i\pi$ onde $i = \sqrt{-1}$ seria também algébrico como o produto de dois números algébricos. Então $i\pi$ seria raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros:

$$c_n x^n + c_{(n-1)} x^{(n-1)} + c_{(n-2)} x^{(n-2)} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0 = 0. \quad (\text{B.1})$$

Representemos as raízes de (B.1) por $\alpha_1 = i\pi, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Como $e^{i\pi} = -1$ segue-se do produtório

$$\prod_{j=1}^n (1 + e^{\alpha_j}) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Se desenvolvermos o produto indicado, obteremos uma expressão da forma: $1 +$ somatório de exponenciais cujos expoentes são:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (\text{B.3.1})$$

$$\alpha_i + \alpha_j, \quad \text{para todo } i < j \quad (\text{B.3.2})$$

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k, \quad \text{para todos } i < j < k \quad (\text{B.3.3})$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n. \quad (\text{B.3.n})$$

Observe que o número de termos em (B.3.1) é n , em (B.3.2) é $\binom{n}{2}$, em (B.3.3) é $\binom{n}{3}, \dots$, em (B.3.n) é $\binom{n}{n} = 1$, onde $\binom{n}{m}$ são os coeficientes binomiais, isto é, $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ para $0 \leq m \leq n$.

Agora, do fato de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ satisfazerem uma equação polinomial de grau n com coeficientes inteiros, segue-se que

(a) os números em (A.3.2) satisfazem uma equação polinomial de grau $\binom{n}{2}$ com coeficientes inteiros

$$C_2(x) = 0; \quad (\text{B.4})$$

- (b) os números em (B.3.3) satisfazem uma equação polinomial de grau $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ com coeficientes inteiros

$$C_3(x) = 0, \quad (B.5)$$

e assim sucessivamente. Em resumo, os números em (B.3.1) a (B.3.n) satisfazem a equação polinomial

$$C_n(x) \dots C_1(x) = 0 \quad (B.6)$$

com coeficientes inteiros e cujo grau é $n + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = 2^n - 1$. Como alguns dos números em (B.3.1) a (B.3.n) podem se anular, podemos supor que m deles sejam diferentes de zero e representemo-los por $\beta_1, \dots, \beta_m$. Logo, simplificando de (B.6) os fatores da forma x^q , para $q > 0$, caso haja, (e os haverá se $2^n - 1 > m$), obtemos que $\beta_1, \dots, \beta_m$ são raízes de uma equação

$$c_m x^m + c_{(m-1)} x^{(m-1)} + c_{(m-2)} x^{(m-2)} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0 = 0 \quad (B.7)$$

com coeficientes inteiros.

A seguir efetuamos o produto de (B.2) e obtemos

$$k + e^{\beta_1} + \dots + e^{\beta_m}. \quad (B.7)$$

Considere o polinômio

$$C(x) = \frac{e^s}{(p-1)!} x^{p-1} (R(x))^p, \quad (B.8)$$

onde $s = mp - 1$ e p é um número primo a ser escolhido posteriormente. O grau de C é $r = s + p$. Seja agora

$$F(x) = C(x) + C'(x) + \dots + C^{(s+p)}(x). \quad (B.9)$$

Segue-se que

$$\frac{d}{dx}(e^{-x} F(x)) = -e^{-x} C(x). \quad (B.10)$$

Aplicando o Lema a seguir

Lema B.1. *Seja $f : C \rightarrow C$ uma função analítica e sejam $z_1, z_2 \in C$. Então*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq \sup \{ |f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))| : 0 \leq \lambda \leq 1 \} |z_2 - z_1|$$

onde $|z|$ representa o módulo do complexo $z = x + iy$, isto é, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

À função $f(z) = e^{-z} F(z)$, temos

$$|e^{-\beta_j} F(\beta_j) - F(0)| \leq 2 |\beta_j| \sup_{|\lambda| \leq 1} |e^{(1-\lambda)\beta_j} C(\lambda\beta_j)|, \quad (B.11)$$

para $j = 1, \dots, m$. Fazendo

$$\varepsilon_j = 2 |\beta_j| \sup_{|\lambda| \leq 1} |e^{(1-\lambda)\beta_j} C(\lambda\beta_j)|, \quad (B.12)$$

obtemos de (B.11) que

$$|F(\beta_j) - e^{\beta_j} F(0)| \leq \varepsilon_j.$$

Usando (B.7) e as expressões (B.13) para $j = 1, \dots, m$ obtemos

$$|kF(0) + \sum_{j=1}^m F(\beta_j)| \leq \sum_{j=1}^m \varepsilon_j. \quad (B.14)$$

O objetivo a partir deste momento: mostrar que o lado esquerdo de (B.14) é um inteiro não nulo, e que o lado direito, para p conveniente, é menor que 1.

Devemos, pois, calcular as várias derivadas de $C(x)$ nos pontos $0, \beta_1, \dots, \beta + m$. Para as derivadas de ordem $i < p$, procedemos como no lema (A.5). O polinômio $C(x)$ definido em (B.8) é da forma

$$C(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} c^0 x^{p-1} + bx^p + \dots.$$

Logo,

$$\begin{aligned} C^{(i)}(0) &= 0, \quad \text{para } i < p-1, \quad \text{e} \\ C^{(p-1)}(0) &= c^s c^p.0 \end{aligned} \quad (B.15)$$

Por outro lado, segue-se diretamente de (B.8) que

$$C^{(i)}(\beta_j) = 0, \quad i < p, \quad j = 1, \dots, m, \quad (B.16)$$

uma vez que nas derivadas $C^{(i)}(x)$, para $i < p$, a expressão $R(x)$ é fator comum, e $R(\beta_j) = 0$.

Para as derivadas de ordem $i \geq p$, usamos primeiramente o lema (A.4) para concluir que os coeficientes de $C^{(i)}(x)$ são inteiros divisíveis por p , concluímos que

$$\begin{aligned} \text{os coeficientes de } C^{(i)}(x), i \geq p, \\ \text{são inteiros divisíveis por } pc^s. \end{aligned} \quad (B.17)$$

Logo de (B.15) e (B.17) obtemos

$$F(0) = c^s c_0^p + pc^s k_0, \quad (B.18)$$

onde k_0 é um inteiro, cujo valor não importa para os nossos propósitos. Para os demais $F(\beta_j)$ observamos que

$$F(\beta_j) = \sum_{i=p}^{\infty} \frac{C^{(i)}(\beta_j)}{i!}.$$

$$= \sum_{i=0}^m C^{(i)}(\beta_j). \quad (B.19)$$

Agora observe a expressão

$$\sum_{j=1}^m C(i)(\beta_j) \quad (B.20)$$

para cada i fixado, com $p \nmid i \leq s + p$. Por (B.17) o polinômio $C^{(i)}$ tem coeficientes inteiros divisíveis por p^{i-s} . Além disso, como C tem grau $s + p$, segue-se que $C^{(i)}$ tem grau $s + p - i \leq s$, pois $p \nmid i$. logo, a expressão (B.20) pode ser escrita como

$$\sum_{j=1}^m C^{(i)}(\beta_j) = p^{i-s} Q(\beta_1, \dots, \beta_m), \quad (B.21)$$

onde $Q(\beta_1, \dots, \beta_m)$ é um polinômio nos $\beta_{i \leq s}$ de grau menor ou igual a s , com coeficientes inteiros. É imediato que $Q(\beta_1, \dots, \beta_m)$ é um polinômio simétrico nos $\beta_{i \leq s}$ com coeficientes inteiros.

Lema B.2. *Seja $f(t_1, \dots, t_n)$ um polinômio simétrico de grau d com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Então, existe um polinômio $g(s_1, \dots, s_n)$ de peso menor ou igual a d com coeficientes em $\mathbb{Z}$, onde $s_1, \dots, s_n$ são os polinômios simétricos elementares, tal que*

$$f(t_1, \dots, t_n) = g(s_1, \dots, s_n).$$

Logo pelo lema (B.1), existe um polinômio $G(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ de grau menor ou igual a s com coeficientes inteiros e onde $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ são os polinômios simétricos elementares em $\beta_1, \dots, \beta_m$, tal que

$$Q(\beta_1, \dots, \beta_m) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_m). \quad (B.22)$$

Por outro lado, observe que

$$\sigma_1 = c^{-1}c_{m-1}, \quad \sigma_2 = c^{-1}c_{m-2}, \dots, \sigma_m = c^{-1}c_0. \quad (B.23)$$

Logo de (B.21), (B.22) e (B.23) segue-se que a expressão (B.20) é um inteiro divisível por p . Voltando a (B.19)concluimos que

$$\sum_{j=1}^m F(\beta_j) = pK_1, \quad (B.24)$$

onde K_1 é um inteiro cujo valor é irrelevante para os nossos propósitos. A seguir, usando (B.18) e (B.24) obtemos que o lado direito de (B.14) é um inteiro da forma

$$|kc^s c_0^p + pK|, \quad (B.25)$$

onde $K = c^s k_0 + K_1$. Agora escolhemos o número primo p de modo que ele seja maior que k , c e c_0 . Portanto, o inteiro (B.25) não é divisível por p , e, conseqüentemente, é um inteiro não nulo.

Para concluir a demonstração, necessitamos fazer a estimativa do termo no lado direito de (B.14). Seja

$$M = \max(|\beta_1|, \dots, |\beta_m|).$$

Logo,

$$\varepsilon_j \leq 2Me^{\frac{M|c|^s}{(p-1)!}} \sup_{|\lambda\beta_j|^{p-1} R(\lambda\beta_j) \leq 0 \leq \lambda \leq 1}, \quad (\text{B.26})$$

onde usamos que $0 \leq \lambda \leq 1$. Seja a seguir

$$N = \max\{|R(z)| : |z| < m\},$$

a qual usada em (B.26) fornece

$$\varepsilon_j \leq 2Me^{\frac{M|c|^s}{(p-1)!}} M^{p-1} N^p.$$

Como o fatorial domina qualquer exponencial, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n!} = 0$$

para qualquer $A > 0$, segue-se que, para p suficientemente grande, podemos fazer $\varepsilon_j < \frac{1}{m+1}$. Logo,

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{m+1} < 1. \quad (\text{B.27})$$

A expressão (B.27) juntamente com o fato que o lado esquerdo de (B.14) é inteiro não nulo dá um absurdo. Logo, π é transcendente. $\square$

APÊNDICE C – Demonstração da Construtibilidade de Números pelos Métodos Euclidianos

Conhecimentos Preliminares

Seja $\mathbf{P}$ um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ contendo pelo menos dois pontos distintos. Dizemos que uma reta r de $\mathbb{R}^2$ é uma reta em $\mathbf{P}$ se r contém dois distintos pontos de $\mathbf{P}$, e dizemos que uma circunferência c em $\mathbb{R}^2$ é uma circunferência em $\mathbf{P}$ se o centro de c pertence a $\mathbf{P}$ e um ponto de $\mathbf{P}$ pertence a c .

Chamaremos de (I), (II), (III) abaixo, de operações elementares em $\mathbf{P}$:

- (I) Interseção de duas retas em $\mathbf{P}$.
- (II) Interseção de uma reta em $\mathbf{P}$ e uma circunferência em $\mathbf{P}$.
- (III) Interseção de duas circunferências em $\mathbf{P}$.

Um ponto $A \in \mathbb{R}^2$ diz-se construtível a partir de $\mathbf{P}$ se podemos determinar A através de uma dessas operações elementares em $\mathbf{P}$. Denotaremos por $(\mathbf{P})$ o subconjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que são construtíveis a partir de $\mathbf{P}$.

Representaremos o conjunto dos números construtíveis por

$$\mathbf{C}_R = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ construtível}\}$$

Se $A = (u, v) \in \mathbf{P}_n$ dizemos que u e v são coordenadas de $\mathbf{P}_n$, e denotaremos por $\mathbf{A}_n$ o conjunto de todas as coordenadas de $\mathbf{P}_n$. Sabendo que $\mathbf{A}_n \subset \mathbf{C}_R \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $K_0 = \mathbb{Q}$, $K_1 = \mathbb{Q}[\mathbf{A}_1]$, ..., $K_n = \mathbb{Q}[\mathbf{A}_n]$, ...

Como $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}_1 \subset \dots \mathbf{A}_n \subset \mathbf{C}_R$ e $\mathbb{Q} \subset \mathbf{C}_R$, temos:

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset K_{n+1} \subset \dots \subset \mathbf{C}_R.$$

Observe também que se $\alpha \in \mathbf{C}_R$ então $(\alpha, 0) \in \mathbf{P}_n$ para algum n , isto é, $\alpha \in \mathbf{A}_n$ para algum n , e portanto $\alpha \in K_n$. Daí segue imediatamente que:

$$\mathbb{K} = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \mathbf{C}_R.$$

Teorema C.0.1. $\mathbf{C}_R$ é uma extensão algébrica dos racionais tal que $\forall \alpha \in \mathbf{C}_R$ temos que o grau $[Q[\alpha] : Q]$ é uma potência de 2.

Demonstração. É suficiente provarmos que $\forall \alpha \in \mathbf{C}_R$ tem-se que $[Q[\alpha] : Q] = 2^r$, para algum $r \in \mathbf{N}$.

De fato, seja $\alpha \in \mathbf{C}_R = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. Assim $\exists n \in \mathbf{N}$ tal que $\alpha \in K_n = Q[\mathbf{A}_n]$. Como $[Q[\alpha] : Q]$ divide $[K_n : Q]$ é suficiente provarmos que $[K_n : Q] = 2^s$ para algum $s \in \mathbf{N}$.

Vamos provar que $[K_n : Q]$ é potência de 2 por indução sobre n . Se $n = 0$ temos $K_0 = Q$ e o teorema é válido. Se $n = 1$ temos que $K_1 = Q[\sqrt[3]{3}]$ e o teorema também é válido.

Vamos supor por indução que $[K_i : Q]$ é potência de 2 $\forall 0 \leq i < n$ e vamos provar que $[K_n : Q]$ é potência de 2.

Como $K_{n-1} \subset K_n$ e $[K_n : Q] = [K_n : K_{n-1}] \cdot [K_{n-1} : Q]$ temos que é suficiente provarmos que $[K_n : K_{n-1}]$ é potência de 2.

Seja $L = K_n$ e $L_0 = K_{n-1}$. Sabemos que $L = L_0[\mathbf{A}_n]$. Se $\mathbf{A}_n = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ temos então que $L = L_0[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$.

Se denotarmos

$$L \supset L_1 = L_0[\alpha_1] \subset L_2 = L_1[\alpha_2] \subset \dots \subset L_i = L_{i-1}[\alpha_i] \subset \dots \subset L_k = L$$

então é suficiente provarmos que $[L_i : L_{i-1}]$ é potência de 2.

De fato, vamos provar que

$$[L_i : L_{i-1}] = 1 \text{ ou } 2, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$L_i = L_{i-1}[\alpha_i]$$

e $\alpha_i \in \mathbf{A}_n$. Assim $\exists \beta_i \in \mathbf{A}_n$ tal que $A_i = (\alpha_i, \beta_i)$ ou $\beta_i = (\beta_i, \alpha_i) \in \mathbf{P}_n$. Sem perda de generalidade vamos supor que $A_i = (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbf{P}_n$.

Como $\mathbf{P}_n = (\mathbf{P}_{n-1})$ temos que $A_i = (\alpha_i, \beta_i)$ é obtido por uma das 3 operações elementares em $\mathbf{P}_{n-1}$. Pode-se provar sem grandes dificuldades que α_i terá que satisfazer uma equação de grau menor ou igual a 2 (será grau 1 na operação elementar I) com coeficientes sobre o corpo $K_{n-1} = Q[\mathbf{A}_{n-1}]$.

Ora, como

$$K_{n-1} = L_0 \subset L_{i-1} \quad 1 \leq i \leq k$$

segue que α_i é raiz de um polinômio de grau 1 ou 2 como queríamos demonstrar. $\square$