



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS CORRENTE
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TÉCNICAS E ESTRATÉGIAS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
EQUAÇÕES DE 2º GRAU

MARCOS JANE DE SOUZA AZEVEDO

CORRENTE

2017

MARCOS JANE DE SOUZA AZEVEDO

TÉCNICAS E ESTRATÉGIAS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE EQUAÇÕES
DE 2º GRAU

Monografia apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do Instituto Federal de Educação Ciências e Tecnologia do Piauí, Campus Corrente para a obtenção do título de Pós-Graduado em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Me. Carlos Adriano da Costa Gomes

CORRENTE

2017.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Azevedo, Marcos Jane de Souza.

A314t Técnicas e estratégias para resolução de problemas de equações de 2º Grau/ Marcos Jane de Souza Azevedo. -2017.
53 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Corrente, 2017.

Orientador: Prof Me. Carlos Adriano da Costa Gomes

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Equações de 2º Grau 3. Problemas matemáticos. 4. Azevedo, Marcos Jane de Souza.
I. Título.

CDD – 510

Elaborado por Tefischer Huanderson Soares e Sousa CRB3/1251

Dedicatória

Dedico esta monografia em especial à minha esposa Mônica Suane Barbosa de Souza Azevedo, Mariana Barbosa Azevedo, Juliêta Barbosa de Souza, meus pais e todos aqueles que em nenhum momento mediram esforços para realização dos meus sonhos, que me guiaram pelos caminhos corretos, me ensinaram a fazer as melhores escolhas, me mostraram que a honestidade e o respeito são essenciais à vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, sem ele eu nada seria e nem teria. Aos meus pais, esposa, enfim, toda minha família que com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Ao Instituto Federal do Piauí, pela oportunidade concedida. Ao meu orientador Carlos Adriano pela paciência e suporte, por seu incentivo, e todos que de certa forma tem contribuíram.

RESUMO

Este trabalho tem como propósito instigar as contribuições das estratégias de Resolução de Problemas de equações do 2º grau, no processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática, no Ensino Médio, em uma turma de 3ª Série, em uma Unidade Escolar da Rede Estadual de Ensino no município de Corrente-PI, por meio de métodos que possam contribuir para uma melhor formação de alunos e melhor desempenho em Matemática. O desafio da educação é levar as pessoas a pensar, e não há educação enquanto esta não for levada como desafio a cada dia para que assim o aprendizado possa ter significado, ou seja, para que os alunos possam sentir o prazer com ensino transmitido, terem certeza de que este foi aprendido. A presente pesquisa tem como abordagem os procedimentos retórico e moderno, utilizando-se de passos possíveis de Resolução de Problemas Algébricos. E tem como objetivo verificar a importância de se trabalhar com resolução de problemas em sala de aula e como estão sendo desenvolvidas as aulas de matemática nas aplicações de Resoluções de Problemas e assim desenvolver mecanismos que possam contribuir para a promoção de uma aprendizagem compreensiva aos alunos.

Palavras-chave: Desempenho em Matemática. Problemas Algébricos. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to instigate the contributions of the Problem Solving strategies of the second grade equations, in the Teaching-Learning process of Mathematics, in Secondary School, in a 3rd Grade class, in a School Unit of the State Education Network in Municipality of Corrente-PI, using methods that may contribute to better student training and better performance in Mathematics. The challenge of education is to get people to think, and there is no education until it is taken as a challenge every day so that learning can have meaning, that is, so that students can feel the pleasure with transmitted teaching, have Sure that this has been learned. The present research has as approach the rhetorical and modern procedures, using possible steps of Solving Algebraic Problems. And it aims to verify the importance of working with problem solving in the classroom and how mathematics classes are being developed in the applications of Problem Solving and thus develop mechanisms that can contribute to the promotion of a comprehensive learning to the students.

Keywords: Performance in Mathematics. Algebraic Problems. Troubleshooting.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	10
2.1 Histórias da Álgebra.....	10
2.2 O desenvolvimento da resolução de problemas	13
2.3 Conceitos Matemáticos	16
2.4 O Teorema Fundamental da Álgebra	18
2.5 Ensino de equação de segundo grau.....	19
3. METODOLOGIA	21
4. ANÁLISE DOS DADOS	33
4.1 Questionários diagnóstico I	33
4.2 Questionários diagnóstico II	39
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	44
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	45

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Concepções da álgebra e uso das variáveis	12
Figura 2 - Representação de área quadrada.....	22
Figura 3 - Intervalo aberto.....	25
Figura 4 - Intervalo aberto, com coeficiente de x^2 positivo.....	25
Figura 5 - Intervalo aberto, com coeficiente de x^2 negativo.....	26
Figura 6 - Sistema de eixos perpendiculares	28
Figura 7 - Gráfico de uma função qualquer no plano cartesiano	29
Figura 8 - O gráfico da função quadrática, "parábola"	29
Figura 9 - O gráfico do "movimento da parábola" quando $a > 0$	30
Figura 10 - O gráfico da "concavidade da parábola"	30
Figura 11 - O gráfico do "movimento do vértice da parábola"	31
Figura 12 - O gráfico dos "pontos em que a parábola corta o eixo $0x$ "	32
Figura 13 - O gráfico do "ponto em que a parábola corta o eixo $0y$ "	32
Figura 14 - Resolução do aluno L. F do Questionário I.....	34
Figura 15 - Resolução da aluna L. S do Questionário I	34
Figura 16 - Resolução do aluno J. L do questionário I	35
Figura 17 - Resolução da aluna L. S do Questionário I	35
Figura 18 - Resolução do aluno M. L do Questionário I.....	37
Figura 19 - Resolução da aluna G. M do Questionário I.....	37
Figura 20 - Resolução do aluno M. L do Questionário I.....	38
Figura 22 - Resposta da aluna G. M do Questionário II.....	40
Figura 23 - Resolução do aluno K. N do Questionário II.....	41

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Questão 1/ diagnostico I	33
Gráfico 2 - Questão 2/ Diagnóstico I	35
Gráfico 3 - Questões 3 e 4/ diagnóstico I	36
Gráfico 4 - Questão 5/ diagnostico I	38
Gráfico 5 - Questão 1 do questionário II	39
Gráfico 6 –Questão 2 do Questionário II	40
Gráfico 7 - Questão 3 do questionário II	41
Gráfico 8 - Questão 4 do questionário II	43
Gráfico 9 - Questão 5/ diagnostico II	44

1. INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento da escrita, o homem substituiu a exposição visual, que era as pinturas nas cavernas, pela sonora, assim, a linguagem tomou a forma oral.

Em nosso dia a dia, deparamo-nos com um número elevado de alunos com grandes dificuldades de aprendizagem e desmotivados para os estudos. Para mudar tal visão, faz-se necessário uso de métodos e estratégias de resolução de problemas, no sentido de instigar os alunos a aprender de maneira significativa.

Assim o educador exerce considerável função nesse processo de ensino aprendizagem, pois é quem vai direcioná-lo, sendo mediador e propondo atividades que estimulem o aluno em sala de aula, proporcionando-lhes o desenvolvimento da linguagem matemática, com situações de problemas, sendo este um instrumento facilitador na construção do conhecimento.

O conhecimento é o gerador do saber, que vai, por sua vez, ser decisivo para ação, e por conseguinte é no comportamento, na prática, no fazer que se avalia, redefine e reconstrói o conhecimento. O processo de aquisição do conhecimento é, portanto, essa relação dialética saber/fazer, impulsionado pela consciência.(D'AMBRÓSIO, 2012, P. 19).

Diante dessa realidade verifica-se a importância de se refletir sobre os princípios da metodologia aplicados no desenvolvimento de trabalhos com resolução de problemas de equações do 2º grau. O desafio da educação é levar as pessoas a pensar, e não há educação enquanto esta não for levada como desafio, ou seja, para que os alunos possam sentir sabor e degustar com prazer o ensino transmitido. Para (D'AMBRÓSIO, 2012, P. 16) todo conhecimento é resultado de um longo processo cumulativo de geração, de organização intelectual e social, e de difusão. Percebe-se que a aquisição e elaboração de um novo conhecimento acontece no presente, mas levando em consideração a conhecimentos previamente acumulados e as estratégias de ação são projetadas para o futuro, seja ele de imediato ou até de longo prazo buscando modificar a realidade. Quando os alunos se sentem convictos do seu conhecimento e de suas capacidades enfrentam melhor os obstáculos que aparecem em suas vidas, lidando melhor com suas próprias emoções.

O presente trabalho tem por objetivo mostrar uma proposta na resolução de equações do 2º grau e análise de gráficos. Assim, utilizando a eficiência do método de Resolução de Problemas, que consiste em um esquema contendo alguns passos a serem percorridos para encontrar solução do problema, com procedimentos que se usava em época retórica e com os que são usados nos dias atuais, baseando sempre nas perspectivas propostas pelos pesquisadores Polya e D'Ambrósio que defendem os seguintes passos: Compreensão do Problema, Concepção de um Plano de Ação, Execução do Plano e Visão Retrospectiva.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Histórias da Álgebra

A Álgebra estuda os conceitos de operações aritméticas, utilizando símbolos e letras para representar incógnitas e também situações que envolvem equações. Encontramos em nosso dia a dia, símbolos, códigos e outras formas de comunicação como placa de trânsito, placa de sinalização de incêndio, localização, que mencionam o uso de relações algébricas, ou uso de aplicações matemáticas.

A palavra Álgebra não possui uma etimologia exata em sua origem, como a GEOMETRIA que GEO significa mundo e METRIA significa medida.

A Álgebra é uma variante latina da palavra árabe al-jabr (às vezes transliterada al-jabr), usada no título de um livro, Hisab al-jabr w'al-muqabalah, escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi (Maomé, filho de Moisés, de Khoqarizm). Este tratado de álgebra é com frequência citado, abreviadamente, como Al-jabr (BAUMGART, 1992, P. 1).

O registro mais antigo sobre a Álgebra é o papiro de Rhind que foi escrito por volta de 1650 a.C por um escriba chamado Ahmes, que detalhava a solução de 85 problemas de aritmética, fração, cálculos de área, volumes, repartições proporcionais, equações lineares, trigonometria básica e geometria, onde todos estes problemas envolviam símbolos, letras e números nas resoluções.

A linguagem da Álgebra utilizada atualmente começou a ser desenvolvido por François Viète. Além de utilizar os sinais germânicos + (mais) e – (menos), ele introduziu as vogais para representar quantidades constantes e as consoantes para quantidades incógnitas. Outros matemáticos da mesma época também tiveram sua importância no desenvolvimento da Álgebra, entre eles, estão: Robert Record inglês que criou o símbolo = (igual); Thomas Harriot foi responsável pela eliminação das poucas palavras que ainda restavam da Álgebra de Viète e René Descartes que foi um grande físico-matemático e filósofo francês, que criou o símbolo para a operação de multiplicação e unificou a forma de se escrever matemática.

Al-Khowarizmi em seu livro, Al-Kitâb al-muhtasar fi hisâb al-gabr wa-l-mugâbala, expôs sua resolução da equação $x^2 + 10x = 39$:

“você divide o número de raízes por dois, o que, no caso presente, fornece cinco. Isto você multiplica por si mesmo; o produto é vinte e cinco. Some isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito, e subtraia disso a metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três. Essa é a raiz do quadrado que você procurava; o próprio quadrado é nove”. (Tradução livre de Katz, 1998, p. 245)

Os árabes desenvolveram métodos de resolver equações, e tendo como principal nome Al-Khowarizmi, nesta época o estudo da Álgebra era desenvolvido, pois a religião incentivava a pesquisa. Al-khowarizmi é o autor do tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-mugabalah. (mal - quadrado, jidhr ou shey - raiz, adad - coisa).

O tratado de Al-Khowarizmi

- | | |
|--|-------------------|
| 1. Quadrados iguais a raízes | $(ax^2 = bx)$ |
| 2. Quadrado iguais a um número | $(ax^2 = x)$ |
| 3. Raízes iguais a um número | $(bx = x)$ |
| 4. Quadrado e raízes iguais a um número | $(ax^2 + bx = c)$ |
| 5. Quadrados e um número iguais a raízes | $(ax^2 + c = bx)$ |
| 6. Raízes e um número iguais a quadrados | $(bx + c = ax^2)$ |

A razão de Al-Khowarizmi usar estes seis casos, era o fato de ele não lidar com números negativos, então os coeficientes a, b e c eram positivos, assim como as raízes das equações. O que é compreendido, em seu contexto geométrico é que para ele a soma de áreas não poderia ser nula.

A Álgebra está voltada para a solução de equações, pois hoje ela tem significado amplo. Para BAUMGART (1992, p.3) a Álgebra caracteriza-se em duas fases, a saber. 1ª. Álgebra antiga ou elementar. Estudo das equações e método de resolvê-las. 2ª. A Álgebra moderna ou abstrata. Estudo das estruturas matemáticas tais como grupos, anéis e corpos. Sendo esta última conhecida como Álgebra abstrata e é estudada em cursos de nível superior, enquanto a Álgebra elementar é ensinada na Educação Básica.

Esta pesquisa trata - se da álgebra elementar, que já é trabalhada nas escolas, pois representa a matemática de problemas, e mais especificamente por equação polinomial do 2º grau com uma incógnita.

Sobre a Álgebra elementar BAUMGART afirma:

A Álgebra caracterizou-se pela invenção gradual do simbolismo e pela resolução de equações (em geral com coeficientes numéricos) por vários métodos, apresentando progressos pouco importantes até a resolução „geral“ das equações quadráticas, cúbicas e quárticas e o inspirado tratamento das equações polinomial em geral feito por François Viète (Baumgarten, 1992, p. 3).

A representação algébrica de problemas se deu com Diofanto de Alexandria que foi o primeiro a usar símbolos para representar ideias, ou seja, introduziu uma letra no lugar de uma incógnita, e começou a utilizar abreviações para expressar situações algébricas. Então, a partir daí as ideias passaram a ser expressas por símbolos, sem recorrer a palavras, sendo estas utilizadas até hoje nas escolas.

“A álgebra na escola básica e os papéis das variáveis”, é apresentada na visão do pesquisador Zalman Usiskin (1995, p.14) através de quatro concepções deste campo do conhecimento: 1) a Álgebra como aritmética generalizada; 2) a Álgebra como estudo de procedimentos para resolver problemas; 3) a Álgebra como estudo das relações entre grandezas; 4) a Álgebra como estudo das estruturas.

As concepções da Álgebra e os diferentes usos das variáveis defendidas por Usiskin (1995, p.20) são colocadas no quadro a seguir.

Figura 1 - Concepções da álgebra e uso das variáveis

Concepções da Álgebra	Uso das variáveis
Aritmética Generalizada	Generalizadora de modelos Traduzir - Generalizar
Meio de resolver certo tipo de problema	Incógnita, constantes Resolver – Simplificar
Estudo das Relações	Argumentos, parâmetros Relacionar – Gráficos
Estrutura	Sinais arbitrários no papel Manipular – Justificar

Fonte: Usiskin, 1995, p.20

O estudo das concepções de Álgebra defendida por Usiskin tem a mesma dimensão definida pelos PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1998) em que “resolução de equações” com estrutura algébrica, envolvendo equações do 2º grau com uma incógnita, faz com que o aluno tenha a necessidade de saber resolver equações usando as concepções da Álgebra fazendo relação com as variáveis.

2.2 O desenvolvimento da resolução de problemas.

Segundo Polya (1995): Em seu livro “A arte de resolver problemas”, o autor abriu caminhos para a didática da resolução de problemas, e enfatiza a importância desta para a aprendizagem matemática. Ele apresenta a heurística que é um método desenvolvido para resolução de problemas matemáticos e para uma eficiente utilização de técnicas e estratégias para a busca da solução de problemas, segue os passos sugeridos por ele:

1. Compreensão do problema;
2. Elaboração de um plano;
3. Execução do plano;
4. Verificação da solução encontrada.

As etapas de Polya podem ser aplicadas a todos os conteúdos e cada etapa é um suporte para a etapa seguinte. Na primeira etapa é preciso compreender o problema, para isso se faz necessário estimular o aluno a fazer as seguintes perguntas; Quais os dados fornecidos no problema? Qual é a incógnita, e que o problema pede? Quais são os conceitos algébricos relevantes para o problema? A condição é suficiente para determinar a incógnita? E estas perguntas são condições necessárias para que ele consiga fazer a interpretação que deseja.

Na segunda etapa é necessário colocar em prática alguns conhecimentos teóricos e definir o caminho a ser seguido, portanto ele precisa buscar conexões entre os dados e o que é solicitado, é importante que nesta etapa o aluno pense em situações ou vivências parecidas com as estudadas, isso facilitará na elaboração de um plano de resolução.

Na terceira etapa o aluno colocará em prática a estratégia que escolheu, ou seja, executará o plano construído anteriormente, onde ele terá critérios para a realização da resolução do problema.

Na quarta etapa o aluno fará a revisão da solução, ou seja, uma retrospectiva de tudo que foi realizado, fazendo a verificação dos procedimentos utilizados, buscando formas mais simples de resolver o mesmo problema, onde é feita uma reflexão de todo o processo realizado, com a finalidade de encontrar a essência do problema e do método empregado para resolvê-lo. pois assim acontecerá a aprendizagem significativa.

Seguindo estas etapas o aluno conseguira resolver os problemas matemáticos, compreendendo-os, dando sentido a eles e adquirindo assim o conhecimento significativo e certamente resolverão com mais facilidade os problemas de sua vida.

Segundo Newel e Simon (1972), um problema é uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar sua ação. O resolvidor deve estar propondo a encontrar a solução, pois precisa criar estratégias e ideias para resolver. Quem resolve pode até saber o objetivo a ser atingido, mas está enfrentando um problema se ele ainda não dispõe dos caminhos para atingir o objetivo.

Na resolução de problema envolvendo equações, só há problema se o aluno tiver algo a ser superado, pois problema é tudo aquilo que não se sabe ou não se consegue encontrar a resposta, mas que tenha interesse em encontrar a solução, o problema passa a ser um ponto de partida, que através da resolução deve-se fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

A pessoa que consegue resolver problemas matemáticos, certamente consegue fazer interpretação de textos, visto que mantém uma organização mental mais desenvolvida. Percebe-se atualmente uma deficiência enorme pela maioria dos alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio, em ambas as situações, onde são apresentadas situações-problemas a serem desempenhados e os alunos não apresentam respostas ágeis e necessitam de um esforço intelectual para conseguirem decifrar uma operação matemática ou uma forma de encontrar a solução.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) consideram a resolução de problemas, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, e pode ser fundamentada nos seguintes princípios:

- a) a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática, ou seja, situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- b) o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, mas interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- c) aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
- d) um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
- e) a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, e atitudes matemáticas (BRASIL, 1997, p. 32 e 33).

Neste trabalho, os PCNs consideram que o uso da resolução de problemas, em algumas situações deve ser trabalhado, com alunos do Ensino Fundamental. Os mesmos devem compreender o enunciado da questão e apresentar novas estratégias, construindo conceitos. Estas estratégias demonstram o desejo dos alunos em participar da resolução de problemas e a vontade de encontrar a solução, e assim desenvolver habilidades.

No processo de ensino e aprendizagem a resolução de problemas constitui a capacidade de desenvolver o pensamento matemático e não se restringe aos exercícios rotineiros, que valorizam o aprendizado. Na resolução podem ser apresentadas várias aplicações e conteúdos matemáticos e caminhos diferentes para se chegar ao resultado, mas é preciso que estes estejam claros e atinja o resultado esperado. A resolução de problemas algébricos é uma habilidade que adquirimos por gosto e prática. Ao tentarmos resolver problemas, temos de ler, analisar com atenção, para assim descobrir aplicações matemáticas a chegar à resolução.

A prática do professor precisa estar conectada aos objetivos propostos, e estes devem estar bem claros. Só assim, o aluno poderá tomar as suas próprias decisões e fazer uso dos dispositivos didáticos (regras, métodos e instruções) fornecidos pelo professor. As situações-problema precisam ser um processo de construção entre os alunos e professor e a formação escrita do problema (linguagem verbalizada, linguagem matemática da situação),

precisa ser discutida pelo grupo para obter a resolução e pôr fim a descoberta de novos conhecimentos matemáticos. (DANTE, 2003, p. 19)

No processo de ensino e aprendizagem o professor precisa fazer intervenções, no sentido de que ele e seus alunos busquem juntos à solução de uma situação que, a princípio, não está no enunciado de um problema. O aluno deve contribuir com seus conhecimentos prévios e o professor deverá ajudá-lo, sempre observando os objetivos que almeja atingir com aquela situação proposta.

Os PCN's citam alguns dos aspectos considerados como significado das operações, são eles: Identificar problemas que os alunos resolvem, com o objetivo de encontrar resolução de alguns e de ampliar outros. Estimular a busca de procedimentos para encontrar solução de problema e favorecer a comparação desses procedimentos com o intuito sua veracidade. Embora o estudo das operações inicia-se nos primeiros anos de ensino fundamental, observa-se que os conceitos que faz parte desse conteúdo levam muito tempo para serem construídos e consolidados.

Para melhor conceituarmos o que é uma situação-problema, podemos dizer que é toda e qualquer situação onde se deseja obter uma solução, cuja resposta exige pôr à prova todo o conhecimento que se sabe. Geralmente, a resolução surge de um raciocínio passo a passo, cujo resultado causa grande satisfação quando assim descoberto. Contudo, a resolução de um problema pode ser complexa para um determinado aluno e simples para outro.

2.3 Conceitos Matemáticos

Para conceituarmos resoluções de problemas equações de 2.º grau, vamos apresentar algumas definições de equações:

Definição 1

Equação é toda a igualdade cujos membros contêm uma ou mais variáveis, que recebem o nome de incógnitas, que representam quantidades desconhecidas.

Definição 2

Variável numérica é todo o símbolo que, em uma determinada expressão matemática, pode apresentar como valor de qualquer número pertencente a uma classe de números indicada (números naturais, inteiros, , complexos).

Definição 3

Dois símbolos a e b dizem-se iguais se a e b representam um mesmo número, escreve-se $a = b$, o que representa a igualdade entre a e b .

Esta última definição de igualdade aos alunos, não causa estranheza, pois seu uso é contínuo desde o primeiro ciclo do Ensino Fundamental. Adaptando então a definição para alunos dos ciclos seguintes, assim podemos então dizer: Igualdade é toda a fórmula que se obtém ligada pelo sinal “ ” duas expressões, que se dizem membros da igualdade: primeiro membro o que fica à esquerda e o segundo membro o que fica à direita.

Então uma equação é uma igualdade em que pelo menos um dos membros é uma expressão composta por números, letras e sinais operatórios.

Sendo assim, para que a igualdade seja verdadeira, estas letras não podem assumir um valor qualquer representando quantidades desconhecidas que se pretendem encontrar para que, ao serem substituídas na igualdade inicial ou em sua equivalente, transformem a igualdade em igualdade verdadeira. E daí as variáveis passam a ter o nome de incógnitas. Então para resolver uma equação é necessário encontrar qual ou quais o(s) número(s) que, assume o valor(es) atribuídos à incógnita, para que esse valor transforme a equação em igualdade numérica verdadeira. Vemos então que a resolução de uma equação leva a considerar equações equivalentes entre si, ou seja, equações que sendo diferentes têm as mesmas raízes ou soluções:

Definição 4

Uma equação diz-se equivalente a uma outra, quando toda a raiz (solução) da primeira é raiz (solução) da outra e reciprocamente ou quando são ambas impossíveis. Para que se obtenham equações equivalentes, é necessário que ao resolver a equação, se recorram aos seguintes princípios de equivalência:

- 1.º Princípio de equivalência: Substituindo um dos membros de uma equação por expressão equivalente a esse membro, obtém-se uma equação equivalente à primeira.
- 2.º Princípio de equivalência: Quando um dos membros de uma equação é a soma de duas ou mais expressões, obtém-se uma equação equivalente à primeira, passando para o outro membro uma expressão qualquer com o sinal trocado.
- 3.º Princípio de equivalência: Multiplicando ambos os membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obtém-se uma equação equivalente à primeira.

É importante que o professor tenha a compreensão destas definições e princípios, o que contribuirá para a apreensão por parte dos alunos. É necessário que os alunos compreendam estes princípios para que não comprometam a sua aprendizagem, desrespeitando os conceitos envolvidos. Sabemos que resolver uma equação implica seguir determinados procedimentos, no entanto os alunos devem compreender que estes procedimentos obedecem a estes princípios de equivalência e caso contrário, o processo de resolução da equação e a sua compreensão ficam comprometidos.

Definição 5

Equação polinomial com uma incógnita é uma equação, cujos membros são compostos apenas por polinômios, que através da aplicação dos princípios de equivalência se pode reduzir à forma:

$$(x) \quad \text{ou} \quad \sum$$

Onde x é a incógnita, o número que representa n é o grau da equação e os números que representam os coeficientes dos vários termos do polinômio. A esta forma chamamos fórmula canônica da equação polinomial. Uma equação polinomial de grau um diz-se uma equação linear. Recorrendo ao Teorema Fundamental da Álgebra, podemos ainda afirmar que uma equação polinomial de grau n pode ter até n raízes reais (soluções).

Definição 6

Equação do 2.º grau com uma incógnita x é toda a equação que, pela aplicação dos princípios de equivalência se possa reduzir à forma:

Sendo a, b, c (coeficientes) números quaisquer com $a \neq 0$. À forma acima apresentada chamamos usualmente fórmula canônica da equação de 2.º grau. Uma equação de 2.º grau pode ter até duas soluções.

Podemos pensar que a existência de duas soluções torna-se fácil a compreensão para os alunos, mas nem sempre isto é verdade. É, por isso, muito importante criar situações junto dos alunos em que estes se confrontem com a existência de uma, duas ou nenhuma solução para uma só equação e da mesma forma que sejam confrontados com a verificação destas soluções. Compreendendo assim que, independentemente da quantidade de valores que a solução assume, ao substituirmos a incógnita por eles, a igualdade inicial passa a ser uma identidade.

2.4 O Teorema Fundamental da Álgebra

Quando usamos o conjunto dos números Complexos $\mathbb{C}$, $\dots$, são raízes distintas de uma função polinomial de grau n , então existe uma função polinomial de grau

tal que $P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$.

O polinômio $P(x)$ não pode ser divisível por nenhum novo fator da forma $(x - r)$, com r diferente de todos os r_i ; do contrario, r também seria raiz de $P(x)$. Por outro lado, $P(x)$ pode ainda ser divisível por um ou mais dos fatores $(x - r_i)$. Suponhamos que tenhamos sucessivamente extraído todos os fatores do quociente. Nesse ponto, temos $P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$, onde $r_1, r_2, \dots, r_n$ incluem todas as raízes de $P(x)$, algumas possivelmente repetidas, e $P(x)$ é um polinômio que não possui raízes.

Se estivéssemos restritos ao conjunto dos números reais, a afirmativa acima representaria o ponto final da teoria. Se considerarmos, por exemplo, o polinômio $(x^2 + 1)$, vemos que ele pode ser fatorado como $(x + i)(x - i)$.

As raízes reais de $x^2 - 1$ são 0, 1 e -1; o fato restante $x^2 + 1$ não possui raiz real e não pode ser reduzido. Assim se considerarmos os números complexos, no entanto, a situação muda de figura.

Resolvendo a equação $x^2 + 1 = 0$, encontramos $x = i$ ou $x = -i$. Deste modo, podemos fatorar completamente, na forma: $(x - i)(x + i)$.

O que acontece não foi específico a esse caso. No conjunto dos complexos, não há polinômios de grau maior ou igual a 1 que não possuam raízes.

Teorema Fundamental da Álgebra: Todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração é baseada na continuidade das funções polinomiais complexas. Com sua ajuda podemos então estabelecer, de modo completo, a relação entre as raízes de um polinômio complexo e a sua forma fatorada.

2.5 Ensino de equação de segundo grau.

A fórmula resolutiva das equações quadráticas está diretamente a fórmula de Bháskara, mas devemos enfatizar que não foi ele quem a descobriu, teve sua parcela de contribuição, e assim ficou conhecida em sua homenagem.

Bháskara foi um dos mais importantes matemáticos do século XII, foi graças a ele que tivemos avanços em álgebra, no estudo de equações e na compreensão do sistema numérico, avanços esses que os matemáticos europeus levariam séculos ainda para atingir. Suas coleções mais conhecidas são: Lilavati que trata de aritmética; Bijaganita que discorre sobre álgebra e contém vários problemas sobre equações lineares e quadráticas com soluções feitas em prosa, progressões aritméticas e geométricas, radicais, ternas pitagóricas entre outros tópicos; Siddhantasiromani, dividido em duas partes: uma sobre matemática astronômica e outra sobre a esfera.

Em suas obras percebe-se que Bháskara trabalhou com equações de segundo grau e formulou uma expressão que envolvia raízes quadradas:

$$\sqrt{\frac{b^2 \pm 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 \pm 4ac}}{2a}$$

Ele sabia que a equação de segundo grau tem duas raízes, entretanto não é verdade que tivesse encontrado a conhecida fórmula da resolução de equação do grau.

Seja com , então:

$$\frac{\sqrt{\quad}}{\quad}$$

Conforme ele mesmo relatou no século XII, a mencionada fórmula fora encontrada um século antes pelo matemático hindu Sridhara e publicada em uma obra que não chegou até os nossos dias.

Na realidade até o fim do século XVI não se utilizava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau a partir dos seus coeficientes. Nessa época o que se tinha era uma receita, escrita em prosa, sem uso de símbolos matemáticos, que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos, quase sempre ligados a relações geométricas.

No entanto, tem-se usado exemplos de situações problema que envolve algum tipo de número desconhecido, podendo-se empregar uma mesma expressão, no sentido em que aparece em um contexto, para avaliar as resoluções de equações lineares com incógnita. O aluno se dá conta da estrutura que se encontra, ou seja, “vê” qual método é mais indicado para cada caso, à resolução vai trazer menos dificuldades e gerar menos erros.

Valdemar de Maio (2012, p. 99), em seu livro Metodologia da Matemática, diz acreditar nos profissionais de educação, e que existem alguns casos para serem meditados e sugestões para ele mais eficazes, seguem:

1) As equações de segundo grau são apresentadas como equações do tipo:

, cuja fórmula de resolução é deduzida ou, na maioria das vezes, somente apresentada. A partir daí, os professores gastam um bom tempo ensinando os alunos a determinar quem é o “”, o “” e o “”, para substituí-los na fórmula e resolver a equação.

Como sugestão, deveríamos apresentar um único tipo de representação e solução e escrever sempre a equação “”, pois na realidade a equação do segundo grau é única a escrever sempre assim: , ,

.

2) Continuando com assunto de equação de segundo grau, temos observado que muitas vezes elas são apresentadas como equações algébricas e somente depois como meio de obter as raízes ou zeros da função quadrática.

Esse procedimento leva o aluno a registrar na memória que equação do segundo grau e função quadrática são assuntos distintos.

Quando escrevemos: e pedimos para analisar, normalmente o aluno resolve a equação e para aí. E se o discriminante for negativo, ele nem tenta fazer o gráfico, pois o “ ” não tem solução.

O estudo da função quadrática e de suas raízes (equação do segundo grau) deve ser feito em conjunto e com muitos gráficos realçando os pontos de máximo e mínimo e a variação de sinais

Esse estudo é fundamental para a análise de vários itens do segundo grau e também para aplicações na física, cujos problemas deveriam ser dados como exercícios.

3) Um problema encontrado sempre e para o qual deve ser procurado uma solução conjunta com os professores de física é o da representação do movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) e seu estudo se dá no ensino médio e usa os conhecimentos obtidos de função quadrática.

Caso isso não ocorra, o aluno terá imensa dificuldade em transferir seus conhecimentos de matemática para física, o que pode gerar nele um sentimento de dissociação entre as duas disciplinas e tornar a matemática bastante árida, sem aplicações práticas.

3. METODOLOGIA

Esta é uma pesquisa qualitativa que está apoiada em estudo de teorias referentes ao tema escolhido, resolução de problemas, ela procura identificar as dificuldades que os alunos encontram na resolução de problemas matemáticos envolvendo equações do 2º grau com uma incógnita.

A escola que a pesquisa foi realizada está localizada na Rua Adolfo Jonh Terry, nº1837, bairro Centro, Corrente-PI, CEP:64980-000. Esta escola funciona nos três turnos (manhã, tarde e noite), possuem 4 salas de aula, 44 funcionários, secretaria, cozinha, almoxarifado, pátio coberto, banheiros. A pesquisa aconteceu no período da tarde, na turma de 3ª série do Ensino Médio, sendo uma turma composta de 10 alunos, estes maiores de 16 anos e menores de 18 anos.

A primeira fase da pesquisa se residirá na análise de literaturas já revisadas como (BAUMGART, D'AMBRÓSIO, MAIO, LIMA e outros), que viabilizam o levantamento bibliográfico e análise de materiais cientificamente testados por pesquisadores.

Os dados foram recolhidos sem informações que permitissem a identificação do participante. No final da coleta de dados, o investigador se disponibilizou para prestar qualquer esclarecimento adicional e foi feito o agradecimento para todos os participantes do estudo.

Aplicação da pesquisa *in loco*, foram obedecidos os seguintes procedimentos: a aplicação de um questionário diagnóstico I, com abordagens de problemas e habilidades direcionadas a fórmula de resolução de equação de segundo grau. Logo em seguida aplicou-se um minicurso, mostrando técnicas e estratégias de resolução de problemas de equação de segundo grau e após aplicou-se o questionário diagnóstico II, com abordagem de problemas e habilidades de resoluções contextualizadas. Todas as questões foram indicadas como tendo solução e foram estipulados a duração de 45 minutos para resolução do primeiro questionário diagnóstico I (anexos) e também do segundo questionário (anexos).

Na execução do minicurso iniciamos com a introdução de equação do 2º grau, com exemplos de um terreno de forma quadrada que foi reduzido, da maneira indicada na FIGURA 1, para dar lugar a uma calçada com 3 m de largura. No final, sua área passou a ser de Qual era a medida do lado do quadrado original?

Figura 2 -Representação de área quadrada



Fonte: Lima, p. 40

Solução:

Seja x a medida do lado quadrado original. Após a redução, o lado do quadrado menor mede $x - 6$. Portanto, $(x - 6)^2 = 729$, e daí $x - 6 = \sqrt{729}$, donde $x - 6 = 27$. Assim, os números x que cumprem a condição $(x - 6)^2 = 729$ são $x = 8 + 27 = 35$ e $x = 8 - 27 = -19$. Como -19 não é a medida do lado de um quadrado, no corpo dos números reais com a métrica euclidiana, a resposta é $x = 35$.

A equação $(x - 6)^2 = 729$, que acabamos de resolver, encontrando dois valores (35 e -19) para a incógnita x , é um exemplo de equação do segundo grau. Apresentada desta forma, é fácil achar suas soluções. Mas, se desenvolvermos o quadrado, a mesma equação se escreverá como $x^2 - 12x - 729 = 0$, ou, equivalentemente,

$x^2 - 12x - 729 = 0$. Se nos depararmos com uma equação como esta, que também é uma equação do segundo grau, como poderemos resolver?

Se tivermos alguma experiência com fatoração, veremos que –
 () () Quando Decompomos 665 como produto de dois fatores: ;

; ; . Por sorte, – e , logo

– () (), assim também teríamos como solução e

. Tal afirmação é verdadeira pois, o produto de dois fatores só se anula quando (pelo menos) um desses fatores é zero. Então temos dois tipos de equação do segundo grau, a saber:

i) Equação do tipo () ;

ii) Equação do tipo () () .

Note que, se é trinômio do segundo grau, com ,
 portanto a equação do segundo grau é equivalente $- \quad - \quad$.
 Assim, sempre que for conveniente, podemos supor que equação do segundo grau tem a
 forma , onde $- \quad -$.

Observe que, fatorando o trinômio podemos escrever a equação
 sob a forma $(\quad)(\quad)$. Assim, $(\quad)(\quad) (\quad)$,
 para fatorar o trinômio , devemos achar números tais que $\alpha + \beta = -p$ e $\alpha \beta$
 $= q$. Em casos escolhidos a dedo, isto é fácil de fazer. Por exemplo, $(\quad)$
 $(\quad)$ porque .

Há casos em que a fatoração é óbvia. Isso ocorre notadamente quando tem uma
 equação dos tipos incompletos: . Evidentemente
 $(\quad)$ logo tem-se se, e somente se, ou A equação
 incompleta não possui solução quando q é negativo. Mas se então
 , onde r é a raiz quadrada de , logo podemos escrever $(\quad)$
 $(\quad)$ e a fatoração está feita: as raízes de são e .

Continuamos com aula expositiva, com equação de segundo grau e mostrando o
 conteúdo de complementação de quadrados.

Dissemos anteriormente que, para resolver uma equação do segundo grau,
 procura-se reduzi-la a um de dois tipos básicos: quadrado de um binário igual a uma constante
 $(\quad)$ ou produto de dois binário igual a zero $(\quad)$. Até agora, tratamos essencialmente do
 tipo $(\quad)$. Mostraremos, a seguir, como modificar a equação a fim de reduzi-la ao tipo $(\quad)$. para
 isso, empregaremos a técnica de complementação de quadrados.

Sabemos que $(\quad)$. Portanto, $(\quad)$
 $(\quad) -$. Completar o quadrado é escrever uma expressão do tipo sob a forma
 $(\quad)$. Em geral, o coeficiente 2 não aparece explicitamente. Então fazemo-
 lo aparecer: , portanto $(\quad) (\quad)$, ou $- \quad -$
 seja:

$$(\quad -) \quad -.$$

Dada a equação do segundo grau , vamos usar a técnica de
 completar quadrado para reduzi-la a uma equação do Tipo i.

Definição 7

Chama-se de equação do 2º grau com uma incógnita, toda equação que assume a forma: Onde: “ é a incógnita”, em que , e são números reais, com . Assim é coeficiente do termo em é coeficiente do termo em , é o coeficiente do termo independente de .

Temos, sucessivamente:

$$(\quad) - \quad [(\quad) - \quad -]$$

$$\leftarrow) - \quad (\quad) - \quad -.$$

Portanto, a equação equivale a

$$\leftarrow) - \quad (\quad) - \quad -.$$

Temos, agora, uma equação do tipo (), equivalente à equação do segundo grau . Se o discriminante for negativo, a equação não tem raízes reais. Se for então () — , logo a equação possui a raiz dupla . —

Finalmente, se temos sucessivamente

(—) — — $\frac{\sqrt{\quad}}{\quad}$ $\frac{\sqrt{\quad}}{\quad}$ a equação dada possui as raízes reais distintas $\frac{\sqrt{\quad}}{\quad}$ $\frac{\sqrt{\quad}}{\quad}$.

A identidade (—) — , acima estabelecida, mostra que, quando $a > 0$, o menor valor do trinômio () é obtido quando-

Quando $a < 0$, é o valor de x para o qual () é máximo. Por isso é costume escrever

— , onde representa o ponto do domínio em que a função () atinge o máximo ou o

seu valor mínimo. Notemos ainda, na identidade acima, que a parcela ^() ~~no segundo~~

membro é o valor de quando-, ou seja, é igual a () (). Escreve- —

se () ^(). Então a ~~identidade~~ identidade acima assume o aspecto

() , com () ^(). Esta é a chamada forma canônica do trinômio () .

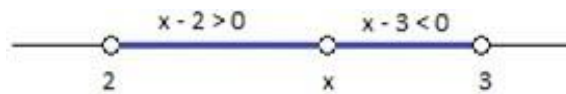
Direcionamos ao conteúdo de Inequação, sendo este relacionado a equação de segundo grau, onde mostraremos esta relação de desigualdade, através de exemplos com método e técnicas de resolução de problemas.

Definição 8

Inequação do segundo grau () – Quando resolvemos uma inequação como $x^2 - 5x + 6 < 0$ significa determinar o conjunto dos valores de x para os quais o trinômio $x^2 - 5x + 6$ assume valores negativos. Para responder esta questão, começamos com a forma fatorada do trinômio. Como as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são $x = 2$ e $x = 3$, temos $(x - 2)(x - 3) < 0$.

Como o fator 2 é positivo, o trinômio assume valores negativos quando o produto $(x - 2)(x - 3)$ for negativo, isto é, quando os fatores $x - 2$ e $x - 3$ tiverem sinais opostos. Isto ocorre quando x está à direita de 2 e à esquerda de 3, ou seja, quando $2 < x < 3$. Portanto, o conjunto das soluções da inequação $x^2 - 5x + 6 < 0$ é o intervalo aberto $(2, 3)$.

Figura 3 - Intervalo aberto



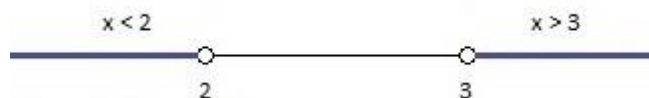
Fonte: Lima, p. 52

Se a inequação fosse $x^2 - 5x + 6 > 0$, estaríamos procurando os números x tais que $(x - 2)(x - 3) > 0$, isto é, tais que os fatores $x - 2$ e $x - 3$ tenham o mesmo sinal:

– e – são ambos positivos quando $x < 2$ ou $x > 3$.

– e – são ambos negativos quando $2 < x < 3$.

Figura 4 - Intervalo aberto, com coeficiente de x^2 positivo



Fonte: Lima, p. 52

Se tivermos uma inequação como $-x^2 + 5x - 6 < 0$, onde o coeficiente de x^2 é negativo, podemos transformá-la em $x^2 - 5x + 6 > 0$, multiplicando-a por -1 .

Então o coeficiente de x^2 é positivo, recaindo assim no caso anterior. Resolvendo:

$(x - 2)(x - 3) > 0$. Portanto, se,

e somente se, ou $x < 2$ ou $x > 3$.

Figura 5 - Intervalo aberto, com coeficiente de x^2 negativo



Fonte: Lima, p.52

Podemos deparar-nos com uma inequação como $ax^2 + bx + c < 0$, onde $a < 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$, logo é a única raiz (α) da equação. Então (α) para todo x .

Se a inequação fosse $ax^2 + bx + c > 0$, então o conjunto das soluções seria vazio, pois o quadrado $(x - 3)^2$ não pode ser negativo para valor algum de x .

Pode-se ocorrer que o discriminante seja negativo, como no caso da inequação $x^2 + 1 > 0$. Neste caso, o trinômio $x^2 + 1$ não admite forma fatorada em $\mathbb{R}$.

Para estudar o sinal da expressão $x^2 + 1$, observamos que, na notação acima adotada, temos, logo, a forma canônica $x^2 + 1 = (x - 0)^2 + 1$.

O gráfico ($y = x^2 + 1$) - mostra que o trinômio $x^2 + 1$ assume apenas valores positivos (maiores do que ou iguais a 1), seja qual for o valor que se atribua a x .

Portanto, a inequação não possui solução. Ao contrário, todo número real x é solução da inequação $x^2 + 1 > 0$.

Os argumentos acima usados valem em geral e nos permitem enunciar os seguintes fatos acerca do sinal do trinômio $ax^2 + bx + c$, para o qual escrevemos

:

i) Se α e β são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então o trinômio $ax^2 + bx + c$ tem o mesmo sinal de a quando x está fora do intervalo $[\alpha, \beta]$ e sinal contrário ao sinal de a quando está no interior desse intervalo.

Noutras palavras, (α, β).

E (α, β).

ii) Se $\alpha = \beta$ é a raiz dupla da equação, então (α) tem o mesmo sinal de a para todo x .

iii) Se $\alpha < \beta$ então (α, β) tem o mesmo sinal de $-a$, seja qual for x .

Sendo assim, a forma fatorada $(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$, no primeiro caso e $(x - \frac{1}{2})$ no segundo. E terceiro é consequência da forma canônica, observando-se que, sendo a - um número positivo, $-a$ tem o mesmo sinal de a , logo o mesmo acontece com $(x - a)$, que é igual a $(x + (-a))$.

Direcionamos ao conteúdo de Máximos e Mínimos, sendo este relacionado a equação de segundo grau, onde mostraremos esta relação, através de exemplos com método e técnicas de resolução de problemas.

Definição 9

Máximos e Mínimos – A forma canônica $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, como já foi observado, quando $x = \frac{1}{2}$, o trinômio $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ assume seu valor mínimo, igual a $\frac{3}{4}$, quando.....Se, porém, $x = -\frac{1}{2}$, então no mesmo ponto $x = -\frac{1}{2}$, o valor $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ é o máximo entre todos os valores $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

Equações do segundo grau disfarçadas – Algumas equações não parecem ser do segundo grau, mas podem ser transformadas de modo a sê-lo. Vejamos três exemplos.

Definição 10

a) Equação fracionária: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+2}$

Eliminando denominadores: $x(x+1)(x+2) \cdot \frac{1}{x} + x(x+1)(x+2) \cdot \frac{1}{x+1} = x(x+1)(x+2) \cdot \frac{1}{x+2}$, ou seja:

. Raízes $\sqrt{x}$ e $\sqrt{x+1}$

Definição 11

b) Equação irracional: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+2}$. Elevando ambos os membros ao quadrado: $(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^2 = (\sqrt{x+2})^2$.

Raízes: $\sqrt{x}$ e $\sqrt{x+1}$.

Ambas as raízes são $\sqrt{x}$ e $\sqrt{x+1}$. Entretanto, substituído $\sqrt{x}$ por $\sqrt{x+1}$ e por $\sqrt{x+1}$ na equação dada, obtemos respectivamente

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+2} \text{ CERTO}$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+2} \text{ ERRADO}$$

Logo, a única raiz da equação $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+2}$ é $x = 7$. O motivo da exclusão de $x = 7$ como raiz da equação dada é que $\sqrt{x+1}$ implica $(x+1) \geq 0$, mas a recíproca não é verdadeira: $(x+1) \geq 0$ não implica $\sqrt{x+1}$ ou $\sqrt{x}$. Em outras palavras, toda raiz da equação $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+2}$ é também raiz de $(x+1) \geq 0$, mas esta segunda equação pode ter outra raiz.

Ao tratar de equações irracionais é da maior importância ter em mente que, quando $\sqrt{\quad}$, o símbolo $\sqrt{\quad}$ significa o número tal que $\sqrt{\quad}^2 = \quad$. Embora valha também a igualdade $(\quad)^2 = \quad$ não se escreve $\sqrt{\quad}$ quando Nem se diz que é raízes de $\quad$. A maneira correta de expressar-se é $\sqrt{\quad}$ e $\sqrt{\quad}$ ($\sqrt{\quad}$ é “menos raiz de ”).

Definição 12

c) Equação biquadrada: É uma equação do tipo $x^4 = a$. Ela se resolve mediante a substituição $y = x^2$, que a transforma em $y^2 = a$.

Por exemplo, seja $x^4 - 16 = 0$. Pondo $y = x^2$, temos $y^2 - 16 = 0$, cujas raízes são $y = 4$ e $y = -4$. Evidentemente, não se pode ter $y = -4$, logo as raízes da equação dada são os números tais que $x^2 = 4$, isto é: $x = 2$ e $x = -2$.

É claro que $x = 2$ é raiz de uma equação biquadrada então também $x = -2$. Sendo assim quando temos $x^4 = a$ então a equação biquadrada possui exatamente duas raízes reais.

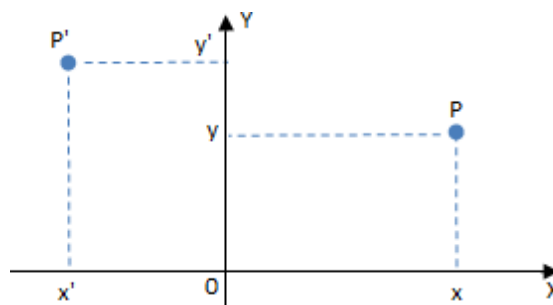
Agora, direcionamos o minicurso ao estudo do Gráfico da função de segundo grau, através de exemplos com método e técnicas de resolução de problemas.

Definição 13

Gráficos – Como vamos estar falando de funções dos $(\quad)$, $(\quad)$ e $(\quad)$ (sempre com $\neq 0$!), chamá-las-emos de $(\quad)$, em vez de “ ”

Quando se introduz no plano cartesiano um sistema de eixos perpendiculares, os pontos desse plano passam a ser representados por suas coordenadas (x, y) , que são números reais. Escreve-se (x, y) ou (x, y) , onde x é a abscissa de P e y é a ordenada de P . Tem-se $x > 0$ ou $x < 0$ conforme P esteja à direita ou à esquerda do eixo vertical. Analogamente, tem-se $y > 0$ ou $y < 0$ conforme P esteja acima ou abaixo do eixo horizontal, FIGURA 5

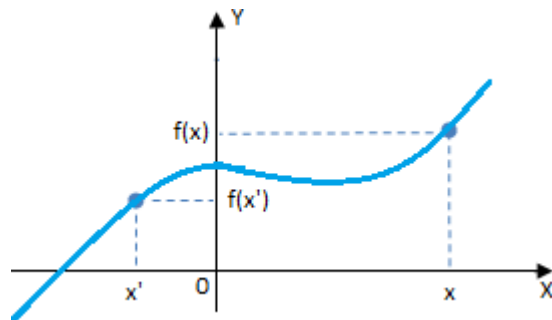
Figura 6 - Sistema de eixos perpendiculares



Fonte: Lima, p. 58

O gráfico de uma função é o conjunto dos pontos $(x, f(x))$ que tem abscissa x e ordenada $f(x)$, para todo x no domínio da função, FIGURA 6

Figura 7 - Gráfico de uma função qualquer no plano cartesiano

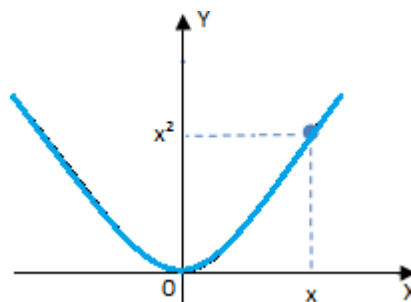


Fonte: Lima, p. 58

O gráfico da função afim $f(x) = ax + b$, é uma reta não vertical (isto é não paralela ao eixo Y) que corta o eixo X no ponto de coordenadas $(-\frac{b}{a}, 0)$ e passa pelo ponto de coordenadas $(0, b)$.

O gráfico da função quadrática mais simples, $f(x) = x^2$, definida por $f(x) = x^2$, é uma curva chamada parábola. Para distingui-la, chamá-la-emos de Ela tem a forma mostrada na FIGURA 7

Figura 8 - O gráfico da função quadrática, "parábola".

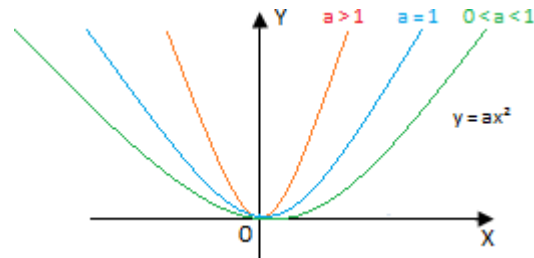


Fonte: lima, p. 59

Se $f(x) = x^2$ então o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem a forma apresentada na FIGURA 8. Essa curva chama-se, ainda, uma parábola. Ela dá a impressão de

menos aberta ou mais aberta do que a parábola básica, conforme se tenha ou

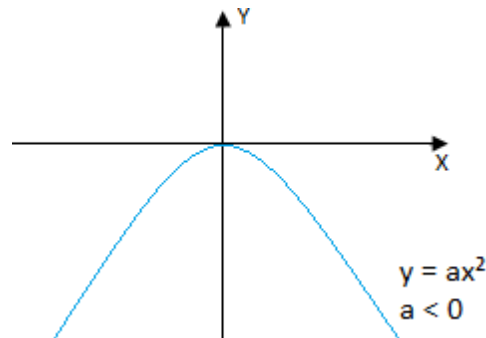
Figura 9 - O gráfico do "movimento da parábola" quando $a > 0$.



Fonte: Lima, p. 60

Quando , o gráfico da função () ainda é uma parábola, agora com a concavidade voltada para baixo, como na FIGURA 9

Figura 10 - O gráfico da "concavidade da parábola".



Fonte: Lima, p. 60

O ponto de coordenadas (), origem do sistema de coordenadas, é o ponto mais baixo (de menor ordenada) da parábola quando $a > 0$ e é o ponto mais alto (de maior ordenada) se $a < 0$. Ele se chama o da parábola .

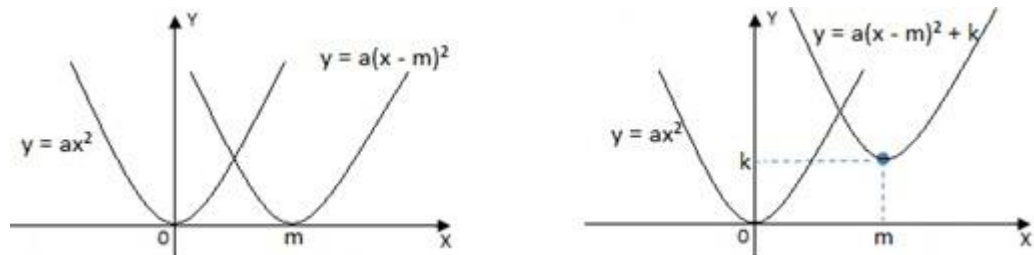
Se $f(x) = a(x-h)^2 + k$ é uma função e a é uma constante positiva, então o gráfico da função () se obtém do gráfico de $y = ax^2$ trasladando-o horizontalmente de h unidades para direita.

Assim, o gráfico da função quadrática () () é ainda uma parábola, obtida do gráfico de $y = ax^2$ por uma translação horizontal de h unidades. Seu vértice (ponto mais baixo ou mais alto, conforme ou $a > 0$ ou $a < 0$) é ponto () do eixo y .

Dada uma constante k , o gráfico da função $y = ax^2 + k$ se obtém a partir do gráfico de $y = ax^2$ deslocando-o verticalmente de $|k|$ unidades, para cima ou para baixo, conforme seja $k > 0$ ou $k < 0$.

Portanto, o gráfico da função quadrática $y = a(x - m)^2 + k$ é uma parábola, obtida a partir do gráfico de $y = ax^2$ deslocando-o de $|m|$ unidades na horizontal e $|k|$ unidades na vertical, de modo que seu vértice é o ponto de coordenadas (m, k) . Qualquer função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita sob a forma canônica $y = a(x - m)^2 + k$, logo o gráfico de toda função quadrática é uma parábola, FIGURA 10

Figura 11 - O gráfico do "movimento do vértice da parábola".

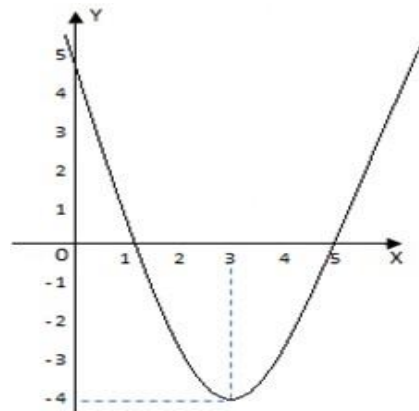


Fonte: Lima, p. 62

Por exemplo, o gráfico de $y = -x^2 + 4x - 4$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima, com vértice no ponto $(2, 0)$. Tem-se $\Delta = 16 - 16 = 0$,As raízes da equação $-x^2 + 4x - 4 = 0$ são $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$. Logo, o gráfico de $y = -x^2 + 4x - 4$ corta o eixo horizontal nos pontos de abscissas $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$. Note que 2 é a média aritmética entre 2 e 2 .

Isto é geral: como $x_1 + x_2 = -b/a$ e a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é $-b/a$, sempre que esta equação admite duas raízes distintas e $a \neq 0$, o vértice da parábola que é o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ tem abscissa $(x_1 + x_2)/2$, logo, o ponto $(-b/2a, c - b^2/4a)$ é equidistante dos pontos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$. Estes são os pontos em que a parábola corta o eixo horizontal, FIGURA 11

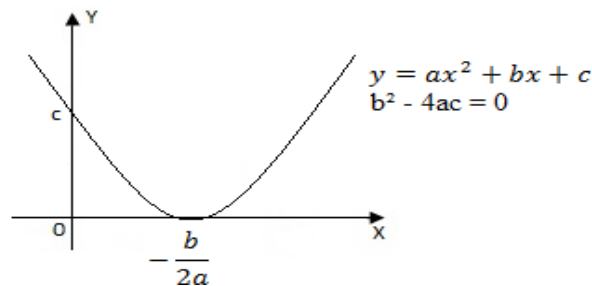
Figura 12 - O gráfico dos "pontos em que a parábola corta o eixo $0x$ ".



Fonte: Lima, p. 63

Se a equação não admite raízes reais, então o gráfico da função não corta o eixo $0x$. E, quando a equação acima possui uma raiz dupla a parábola-gráfico tangencia o eixo horizontal no ponto de abscissa $-\frac{b}{2a}$. FIGURA 12

Figura 13 - O gráfico do "ponto em que a parábola corta o eixo $0y$ ".



Fonte: Lima, p. 63

Em todos os casos, a parábola corta o eixo vetical no ponto de ordenada c , pois este é o valor de quando $x = 0$.

Após a aplicação do minicurso, iniciamos mais um momento, no qual foi aplicado o questionário II com 05 questões (03 discursivas e 02 objetivas) e foi dado um tempo razoável para que os alunos leiam e compreendam os problemas para que possam resolvê-los.

Dessa forma esperamos que os alunos consiga adquirir conhecimentos e capacidades, para resolver problemas, a linguagem clara para que os alunos evite a não compreensão do problema e assim, incentivar o aluno a descoberta das diferentes estratégias utilizadas.

Quando os alunos descobrem o objetivo das equações, acaba acontecendo uma transformação na visão dos alunos, pois o que antes era visto como fórmulas e cálculos imensos passam a ser vistos como estratégias para se conseguir chegar a um propósito. Dessa forma, o aluno passa a desenvolver o gosto pelos conteúdos matemáticos, pois percebem sua importância.

A terceira fase se fez pela análise dos dados coletados e a descrição das resoluções feita pelos os alunos, para assim obtermos os resultados.

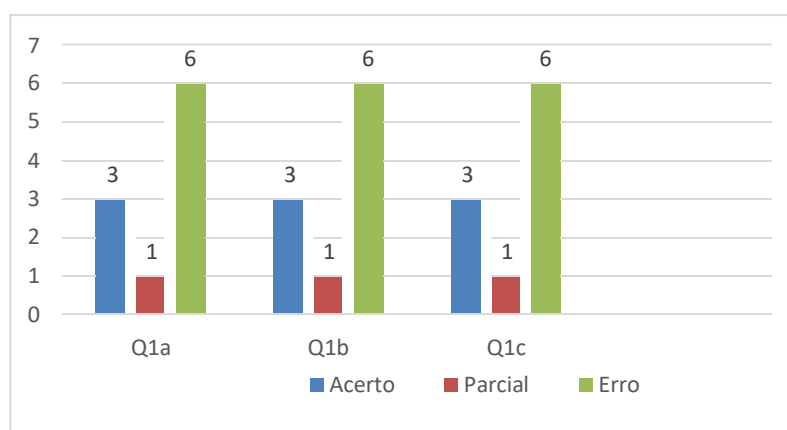
4. ANÁLISE DOS DADOS

O objetivo principal deste estudo é mostrar estratégias e técnicas para a resolução de problemas de equações de segundo grau na turma de 3ª série do Ensino Médio e contribuir para a melhoria de formações futuras.

4.1 Questionários diagnóstico I

Análise consiste no exame detalhado sobre o conteúdo de equação de 2º grau, através das resoluções feitas pelos participantes da pesquisa. Utilizaremos alguns gráficos para representar os resultados encontrados e assim comentaremos as estratégias e as técnicas apresentadas nos questionários.

Gráfico 1 - Questão 1/ diagnostico I



Fonte: Autor, 2016

Começamos por analisar a primeira questão que está representada no GRÁFICO 1 que pede para encontrar o valor da variável na equação..... Para determinar o valor de em cada alínea basta encontrar o coeficiente da equação de

segundo grau, onde o valor de Δ é igual a zero. Para isso, faz-se necessário as seguintes habilidades de fatoração (i) e (ii) e a mecânica (fórmula de Bháskara).

Quando observamos o GRÁFICO 1, percebemos que na alínea 30% dos alunos desenvolveram corretamente, 10% dos alunos fizeram parcialmente, ou seja, iniciou-se a resolução mais não concluiu sua resposta, e 60% dos alunos não responderam, ou seja, não tentaram ou não souberam resolver este tipo de questão. Observando as alíneas e o desenvolvimento se deu da mesma forma que na alínea , ou seja, 30% desenvolveram corretamente, 10% parcialmente e 60% erraram.

Nota-se que os alunos desta turma do Ensino Médio têm bastante dificuldade em resolver problemas de equações do segundo grau.

Figura 14 - Resolução do aluno L. F do Questionário I

$$\begin{aligned} x^2 - 2mx + 1 &= 0 \\ x^2 - 20x + 1 &= 0 \\ x^1 - 20x + 1 &= 0 \\ -20x^1 + 1 &= 0 \\ &= 20x \end{aligned}$$

Fonte: Autor, 2016

O aluno L. F, partiu do pressuposto de que para resolver esta questão deveria atribuir um valor numérico para m , note que o aluno inseriu um termo na equação de forma equivocada, pois este altera a situação final desta, percebemos uma grande dificuldade com os procedimentos algébricos nessa solução.

Figura 15 - Resolução da aluna L. S do Questionário I

1. Na equação $x^2 - 2mx + 1 = 0$ determine os valores de “m” para que a equação: e justifique cada resposta.

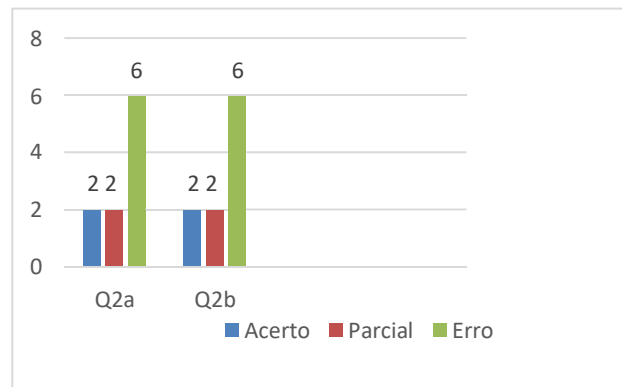
- a) tenha uma única raiz real;
- b) não tenha raízes reais;
- ☒ c) tenha raízes reais e diferentes;

Fonte: Autor, 2016

A aluna L. S, não sabia como proceder nesta questão, note que a mesma resolveu marcar uma das alternativa, sem ao menos, tentar solucionar cada uma das alíneas , e . Pela falta de atenção ou de compreensão, mais da metade da turma erraram esta questão.

Para que se tenha uma única raiz real é necessário calcular o discriminante (Δ) que na fórmula canônica equivale a $\Delta = b^2 - 4ac$, basta encontrar os coeficientes “a”, “b” e “c” da equação dada, e igualar o discriminante a zero. Agora, para resolver a alínea , é necessário que , assim . E para resolver a alínea , basta fazer .

Gráfico 2 - Questão 2/ Diagnóstico I



Fonte: Autor, 2016

No GRÁFICO 2, analisaremos a questão 2 sendo aberta a solução, que pede para observar a equação $x^2 + 20x + 36 = 0$, qual é o número que devemos somar aos dois membros para tornar esta equação em um trinômio quadrado perfeito? Para esta resolução é preciso o uso da técnica de completamento de quadrado, procura-se reduzir a um quadrado de um binômio igual a uma constante ou produto de dois binômios igual a zero.

Quando observamos o GRÁFICO 2, percebemos que na alínea temos 20% dos alunos desenvolveram corretamente, 20% dos alunos fizeram parcialmente, ou seja, iniciou-se a resolução mais não concluiu sua resposta, e 60% dos alunos não responderam, ou seja, não tentaram ou não sabem resolver este tipo de questão. Quando observando-se as alínea o desenvolvimento se deu da mesma forma que na alínea , ou seja, 20% desenvolveram corretamente, 20% parcialmente e 60% erraram.

Figura 16 - Resolução do aluno J. L do questionário I

$$\begin{aligned}
 &bx^2 + 20x + 36 = 0 \\
 &18x^2 + 20x + 36 = \\
 &-18x^2 + 20x + 36 = 21432902 \sqrt{18}
 \end{aligned}$$

Fonte: Autor, 2016

A aluna J. L, encontrou uma solução improvável, esta inseriu um termo na equação de forma equivocada, $20x + 36 = 56$, pois este altera a situação final da equação, percebemos uma grande dificuldade com os procedimentos algébricos nessa solução.

Figura 17 - Resolução da aluna L. S do Questionário I

2. Considere a equação $x^2 + 20x + 36 = 0$:

a) Que número deve ser somado aos dois membros da equação para que o primeiro membro seja um trinômio quadrado perfeito? $20x + 36 = 56$

b) Após resolver o item anterior resolva a equação pelo método de completar quadrados. $x^2 + 20x + 36 = 0$

Fonte: Autor, 2016

Notou-se que a aluna L. S, sumiu com o termo da equação e igualou a um número e na alínea , apenas escreveu a mesma equação, isso mostra o despreparo desse discente para desenvolver a solução do assunto relacionado.

Pede-se na alínea a resolução da equação pelo método de complemento de quadrado. Utilizando o método prático do quadrado igual a uma constante

. Portanto, ,
, () , () . Obtendo também, a solução da alínea .

O GRÁFICO 3 foi construído com base nas questões 3 e 4, estas sendo abertas às resoluções. A questão 3 trata-se da relação da soma e o produto das raízes da equação do 2º grau, cujas, raízes são os números correspondentes ao mês e ao dia do aniversário do aluno. A questão 4 trata-se de construir a equação de segundo grau, escolhendo aleatoriamente dois números e cada número representa uma raiz, assim podemos determinar a soma das raízes e o produto destas, também pede para escrever a maneira de resolução da equação e descrever uma situação problema com os números escolhidos.

Gráfico 3 - Questões 3 e 4/ diagnóstico I



Fonte: Autor, 2016

Fazendo-se a observação do GRÁFICO 3, percebemos que na questão 3, temos 20% dos alunos desenvolveram corretamente, 40% dos alunos fizeram parcialmente, e 40% dos alunos não responderam. Na questão 4, na alínea temos 30% dos alunos desenvolveram corretamente e que 20% dos alunos fizeram parcialmente, e 50% dos alunos não responderam. Observando as alíneas e o desenvolvimento se deu de forma análoga a alínea . Já na alínea temos que 20% dos alunos desenvolveram corretamente, 30% dos alunos responderam parcialmente, e 50% dos alunos não responderam.

Figura 18 - Resolução do aluno M. L do Questionário I

3. Escreva a equação do 2º grau cujas raízes são os números correspondentes ao mês e ao dia de seu aniversário. Comente a sua resposta.

$$\sqrt{1996} = 44.6766158$$

$$\sqrt{28} = 5.2915026221$$

Fonte: Autor, 2016

A resposta do aluno M. L, mostra a dificuldade de compreensão para resolver problemas, note que o aluno não conseguiu formular a equação do segundo grau exigida, e que apenas fez um cálculo numérico envolvendo o ano e dia de seu nascimento, note ainda que ele associou o número correspondente ao mês sendo o ano. Esse tipo de erro é gravíssimo, mostrando a falta de compreensão desse aluno.

Figura 19 - Resolução da aluna G. M do Questionário I

$$(10) - a) - 8 = 10$$

$$b - 8^2 = 16 \rightarrow 10^2 = 20 \text{ e' um numero real}$$

$$c - 20^2 + 20x + 60 = 0$$

$$-20^2 + 20x + 60 = 81$$

Fonte: Autor, 2016

A escolha de dois números feita pela aluna G. M, foram os números e na alínea , é suficiente para se escrever uma equação de segundo grau, partindo do pressuposto de que a soma é igual 2 e o produto é igual - 80, isso na alínea , basta substituir na expressão , temos a equação . Mas a aluna elevou o primeiro número ao quadrado e assim fez com o segundo número, seguindo um raciocínio equivocado. Já alínea , escreveu uma equação, que não condiz com a solução na alínea anterior e ainda introduziu o número , o qual indicou como sendo solução. Observamos que a discente não compreende de forma alguma a definição de raízes e nem os processos de resoluções de equações.

A questão acima por se tratar de algo que eles conhecem, a maioria tentou fazer. Porém, poucos acertaram. Exemplo, escolhendo os números e , temos

$$\{ \quad , \quad \}$$

assim, uma equação na forma geral (com) , pode ser colocada na forma: , ou seja, () (). - -

Portanto, e . Portanto, a solução seria .

Figura 20 - Resolução do aluno M. L do Questionário I

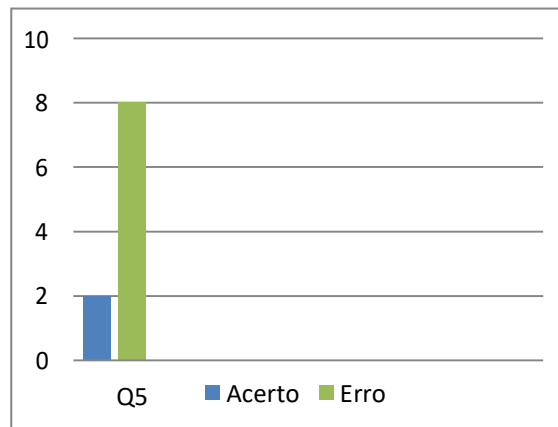
4. Agora é com você:

- a) Escolha dois números quaisquer.
 b) Escreva a expressão da equação do 2º grau que tenha como raízes os números que você escolheu. $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{25} = 5$
 c) Use a fórmula da equação do 2º grau para resolver a equação que você escreveu no item anterior. $9 \cdot 25 = 225$
 d) Formule um problema para seu professor, envolvendo os números e a equação que você escreveu, na forma “a soma de dois números é tanto e seu produto é tanto; descubra os dois números”. $9 \cdot 25$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{25} = 5$

Fonte: Autor, 2016

A resposta do aluno M. L, a alínea , não foi escolhido nenhum números, já na alínea foi escrita a raiz quadrada de dois números, acredita que seja os escolhidos, na alínea foi escrita o produto das duas raízes, isso mostra a falta de atenção e compreensão por parte do aluno, a alínea não foi contextualizado nenhum problema.

Gráfico 4 - Questão 5/ diagnostico I



Fonte: Autor, 2016

O GRÁFICO 4, representa as respostas dos alunos em relação a questão 5, múltipla escolha, onde é preciso analisar cada uma das alternativas, ou seja, realizar cálculos, para assim marcar a alternativa correta. A questão é uma função real, definida por ()

, pede-se para analisar a afirmação correta; a) vértice do gráfico de f é o ponto (1; 4); b) f possui dois zeros reais e distintos; c) f atinge um máximo para $x = 1$; d) gráfico de f é tangente ao eixo das abscissas; e) n.d.a.

Nesta questão, 30% dos alunos marcaram a resposta correta, a qual é alínea . No entanto 70% dos alunos erraram.

Analisando as soluções, percebemos que na alínea , 20% dos alunos marcaram como certa, na alínea , foram 30% dos alunos que marcaram como certa, na alínea , 10%

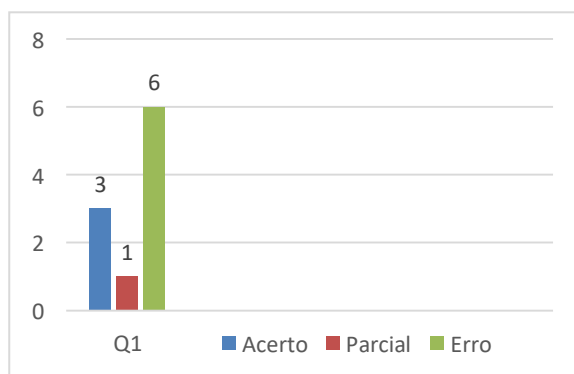
dos alunos marcaram a alternativa errada acreditando que seria a correta. Já na alínea temos 10% dos alunos que acreditavam ser a correta.

Logo se percebe que os alunos desta turma, não entenderam a questão, ou pelo fato de ser uma questão de múltipla escolha marcaram aleatoriamente sem resolver, ou por não conseguirem resolver. Todavia, pelo o nível da questão seria necessário que se fizesse o cálculo em cada alínea para ter um bom aproveitamento.

4.2 Questionários diagnóstico II.

Ao longo das aulas do minicurso, muitas vezes os alunos tiveram dificuldades em resolver as equações corretamente devido a erros provenientes das operações algébricas. Verificamos que o uso das técnicas como a de fatoração do $a^2 + b^2$, isso nos casos notáveis, assim como o *completamento de quadrado*, *inequação do segundo grau*, *máximos e mínimos*, *equações do segundo grau disfarçadas e gráficos*, causam estranheza aos alunos. Daí a importância de reforçar as técnicas e estratégias de resolução de problemas de equação de 2º grau, dando-lhes oportunidade para compreender os processos e regras envolvidas nas operações algébricas.

Gráfico 5 - Questão 1 do questionário II



Fonte: Autor, 2016

O GRÁFICO 5, representa a questão 1, do segundo questionário onde deseja-se ampliar uma praça, que tem formato retangular, para que os jovens tenham mais espaço para passear. A antiga praça tinha 20 m x 30 m de lados. A faixa, em torno da praça antiga, de largura constante x de cada lado, tem de ter 336 m². Qual deve ser a largura da nova faixa de passeio?

Observando a questão 1 do Questionário II, obtemos 30% dos alunos desenvolveram corretamente, 10% dos alunos fizeram parcialmente e 60% dos alunos não responderam.

Figura 21 - Resposta da aluna G. M do Questionário II

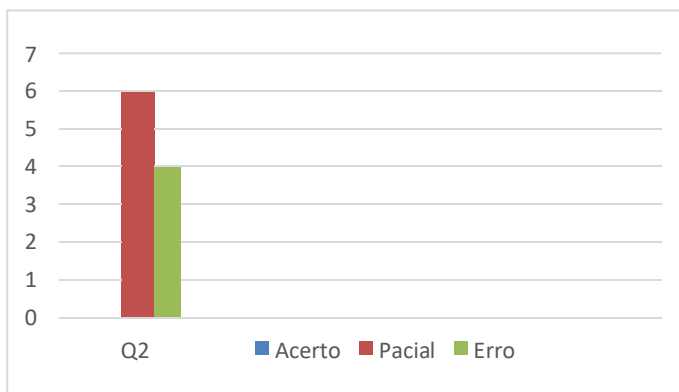
1. A prefeitura de uma cidade deseja ampliar a praça da matriz, que tem formato retangular, para que os jovens tenham mais espaço para passear e namorar. A antiga praça tinha 20 m x 30 m de lados. A faixa, em torno da praça antiga, de largura constante x da cada lado, tem de ter 336 m². Qual deve ser a largura da nova faixa de passeio? *20m x 30m tem 336 m²*
336 : 336 = 1,896
 Fonte: Autor, 2016

Fonte: Autor, 2026

Na resposta apresentada da aluna G. M, escreveu um produto dos lados da antiga praça, ou seja, o produto da área total da praça, que não é o objetivo da questão.

Na resolução desta questão, o aluno teria de usar a técnica de , e em seguida utilizando a fórmula resolutive de.....Onde encontraria dois resultados, sendo um desconsiderado e o outro sendo a solução do problema. Logo, e , mas considerando que a praça antiga tivesse e foi ampliado a , então a medida de é a solução e e esse valor é desconsiderado pois quando se faz a verificação na expressão () ()

Gráfico 6 - Questão 2 do Questionário II



Fonte: Autor, 2016

No GRÁFICO 6, representa a questão 2, do questionário II, onde uma loja fez uma campanha publicitária para vender seus produtos importados. Supondo que , representa os dias após o término da campanha, as vendas diárias foram calculadas segundo a equação , após quantos dias, depois de encerrada a campanha, a venda atingiu o valor máximo?

Note que a questão 2, não teve nenhum acerto, 60% dos alunos fizeram parcialmente, e 40% não fizeram nada.

Figura 22 - Resolução do aluno K. N do Questionário II

$$\begin{aligned}
 -2x^2 + 20x + 150 &= 0 \\
 \Delta &= -20^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 150 \\
 \Delta &= 400 + 1200 \\
 \Delta &= 1600 \\
 x &= \frac{20 \pm \sqrt{1600}}{2 \cdot (-2)} \\
 x &= \frac{20 \pm 40}{-4} \\
 x_1 &= \frac{20 + 40}{-4} = \frac{60}{-4} = -15 \\
 x_2 &= \frac{20 - 40}{-4} = \frac{-20}{-4} = 5
 \end{aligned}$$

Fonte: Autor, 2016

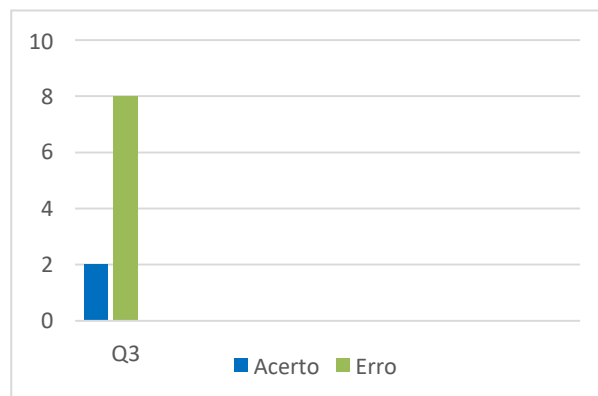
O discente não deveria calcular as raízes, e somente encontrar a localização do vértice, assim o do vértice é a solução procurada. Já o aluno K. N considera uma equação do 2º grau, tendo duas raízes reais, onde o mesmo quando foi determinar o discriminante () errou a soma, pois é igual a , logo o restante da resolução está errado.

Portanto, a expressão , simplificando por 2, temos , () () , logo o valor de e , então a coordenada da abscissa () e (), para encontrar o basta calcular a média aritmética das raízes , substituindo o valor de na equação

, encontra o , então .

Note que o ponto máximo é o que é igual e os dias corresponde ao que é igual 5.

Gráfico 7 - Questão 3 do questionário II



Fonte: Autor, 2016

O GRÁFICO 7, trata da questão 3 do Questionário II, de um projétil disparado por um canhão, posicionado num ponto de altitude igual a 200 metros, atinge um alvo localizado num ponto de altitude igual a 1200 metros. Considerando-se as seguintes afirmativas: I) A trajetória descrita pelo projétil é dada pela equação - - ; II) Com e em

quilômetros, e referenciada a um sistema cartesiano com origem no canhão; III) O alvo é atingido quando o projétil encontra-se no ramo descendente da sua trajetória.

Observando a questão 3, obteve dois acertos, que representa 20% dos alunos e oito erros, que representa 80% dos alunos que não fizeram nada.

Percebe-se que uma pequena parte conseguiu encontrar a resposta correta. Neste tipo de questão é preciso analisar os itens, como foi feito pelos alunos.

Portanto basta encontrar a distância horizontal entre as posições do canhão e o alvo é atingido quando o projétil encontra-se no ramo descendente da sua trajetória, ou seja, ele superou a altura 1200 e veio caindo, é a o deslocamento de altura,

m km é altura e não distancia horizontal. Substituindo km na função

– , então , – e logo o valor

0,5 km raiz é menor quando atinge 1 km de altitude na subida. Já o valor de km é a distancia horizontal entre as posições do canhão e do alvo quando atingi o projétil.

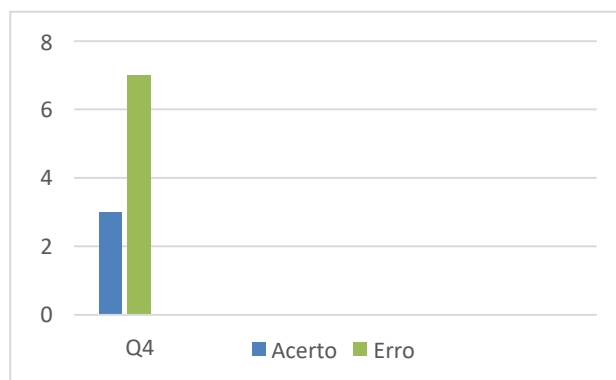
O GRÁFICO 8 está relacionado a um grupo de funcionários que vai viajar para participar de um congresso. Eles tiveram a ideia de fretar um ônibus no qual todos viajariam juntos e cada um pagaria o preço do fretamento dividido pelo número de pessoas. Ao pesquisar os preços, descobriram que uma empresa de turismo só aceitava grupos de 15 a 40 passageiros para cada ônibus, e calculava o preço (em reais) do fretamento do ônibus pela fórmula $p(x) = -x^2 + 70x + 50$, onde x representa o número de passageiros. Considere as seguintes afirmações a respeito dos preços nessa empresa.

I) Se viajarem 40 pessoas, cada pessoa pagará mais de R\$ 30,00.

II) Se viajarem 30 pessoas, o preço do fretamento será menor do que o preço correspondente a 40 pessoas.

III) Existe um número x de pessoas para o qual o preço do fretamento é igual a R\$ 1.150,00.

Gráfico 8 - Questão 4 do questionário II



Fonte: Autor, 2016

Note que a questão 4, teve três acertos, que corresponde a 30% dos alunos fizeram, ou seja, desenvolveram corretamente e sete que marcaram aleatória, que corresponde a 70%, ou seja, que não fizeram nada.

Neste caso, é necessário analisar os itens (I, II, e II), e pela resolução apenas o item I e a correta, logo a alternativa é alínea .

I. Se viajarem 40 pessoas, cada pessoa pagará mais de R\$ 30,00.

() ()

()

() ~~Reais~~ (CORRETA)

II. Se viajarem 30 pessoas, o preço do fretamento será menor do que o preço correspondente a 40 pessoas.

() ()

()

() , Será igual. (ERRADA)

III. Existe um número X de pessoas para o qual o preço do fretamento é igual a R\$ 1.150,00

$$\Delta = (70)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1100)$$

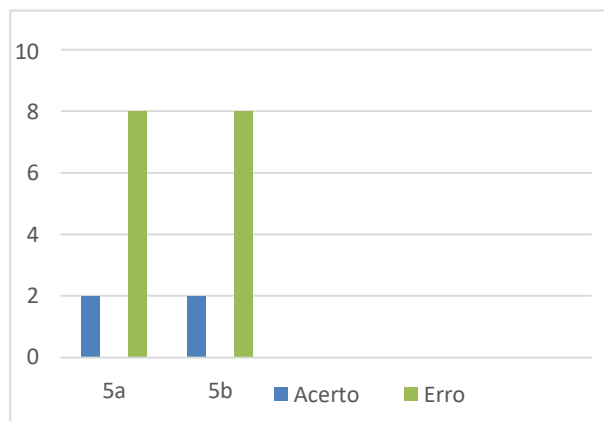
-

(ERRADO)

Não existe um número exato de pessoas pois a raiz quadrada de 500 não é exata.

O Gráfico 9 a questão 5 está relacionada a uma partida de vôlei, onde um jogador deu um saque em que a bola atingiu uma altura h em metros, num tempo t, em segundos, de acordo com a relação $h(t) = -t^2 + 8t$: a) Em que instante a bola atingiu a altura máxima? b) De quantos metros foi à altura máxima alcançada pela bola?

Gráfico 9 - Questão 5/ diagnostico II



Quando observamos o GRÁFICO 9, percebemos que na alínea temos 20% dos alunos desenvolveram corretamente, e 80% dos alunos não responderam esta questão. Observando as alínea o desenvolvimento se deu análoga a alínea .

Percebemos que a resolução desta questão se dá pela a compreensão sobre o ponto máximo e o ponto mínimo, onde a alínea , pede para calcular o instante que a bola atingiu a altura máxima? Então basta encontrar o , sendo este igual a $\frac{\quad}{\quad}$ segundos e alínea , pede para calcular à altura máxima alcançada pela bola? Logo basta encontrar o , este sendo igual a $\frac{\quad}{\quad} \frac{(\quad)}{(\quad)} \text{ metros.}$

Apesar de as equações terem sido introduzidas no Ensino Fundamental, é de se esperar que os alunos trouxessem com eles algum conhecimento. Sabe-se, pela investigação já realizada, que o estudo da Álgebra, nomeadamente o estudo das equações, traz dificuldades aos alunos, devido à sua natureza ser elementar, e ao aparecimento de conceitos complexos e de nova simbologia ou de novos significados para símbolos já conhecidos. Para que conseguisse perceber um pouco melhor este conhecimento, estabeleci como objetivo do meu trabalho de “analisar e verificar a importância de se trabalhar em sala de aula, com matemática através da Resolução de Problemas de equações de segundo grau que contribui e promova uma aprendizagem com compreensão para os alunos de Ensino Médio”.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A resolução de problemas é a essência no desenvolvimento da Matemática e têm um papel importante no ensino em todos os níveis.

As etapas de resolução de problemas matemáticos proposto por Polya não se constituem em uma „poção mágica“ para resolver todo e qualquer problema matemático, mas podem ajudar bastante quem quer se tornar um bom resolvidor de problemas matemáticos, ou ainda, quem já o é e pretende se aperfeiçoar nesta tarefa. As ideias de Polya ajudam o resolvidor no sentido de organizar as ideias do mesmo e, da nossa perspectiva, quando temos ideias organizadas a solução de um problema se torna uma tarefa comumente mais simples em comparação a uma situação onde as ideias não estão organizadas.

Por fim, expusemos em linguagem simples através de minicurso as maneiras de resolver as equações de segundo grau, e com isso acreditamos ter ajudado a preencher uma lacuna no ensino desta turma. Dizemos isso por experiência própria pois, nos tempos de estudante sentíamos extrema dificuldade em encontrar algum material que tratasse da resolução de problemas de equações, e foi uma satisfação elaborar este trabalho que poderá se prestar ao papel de mais uma fonte de pesquisa acerca do assunto.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAUMGART, John K, Trad. Domingues, Hygino H. **História da Álgebra: Tópicos de histórias da matemática para uso em sala de aula**; v. 4. São Paulo: Atual, 1992.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Projeto Velear: Matemática (Ensino Fundamental)**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais de matemática** Brasília : MEC/SEF, 1997.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. 23ª ed. - Campinas-SP: Papirus, 2012. - (Coleção perspectivas da Educação Matemática)

DANTE, Luiz Roberto **Tudo é matemática**. São Paulo, Ática, 2002a e 2002b. v. 6 e v. 7.

MAIO, Waldemar De, **Didática da Matemática** – Rio de Janeiro: LTC, 2012. il.; 28 cm. (Fundamentos de matemática)

MARTINS, H. S. S.G. **Dificuldades na Resolução de equações de 2.º grau dos alunos do 8.º ano**. 2014 (Mestrado) Universidade de Lisboa. Queluz, Portugal 2014.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **Temas e Problemas elementares**. – 5.ed. – Rio de Janeiro: SBM 2013

_____. **A matemática do ensino médio – volume 3**. – 7.ed. – Rio de Janeiro: SBM 2016

MEC (1998) Parâmetros curriculares nacionais: **terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais** – 1998. Secretaria de Educação Fundamental, Ministério da Educação e do Desporto, Brasília, DF.

NEWELL, A .; SIMON, H.A. **Resolução de Problemas Humanos**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. "**O Surgimento da Equação do 2º Grau** "; *Brasil Escola*. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/matematica/o-surgimento-equacao-2-o-grau.htm>>. Acesso em 09 de janeiro de 2017.

ROQUE, Tatiana **História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas** Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

USISKIN, Z. (1999). **Por que a Álgebra é importante para aprender (Professor, este é para seus alunos!)**. Em Algebraic thinking - Grade k-12.

ANEXOS



INSTITUTO FEDERAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ

CAMPUS CORRENTE

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO LATU SENSU EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PROFESSOR: MARCOS JANE DE SOUZA AZEVEDO

ORIENTADOR: PROF. ME. CARLOS ADRIANO DA COSTA GOMES

QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO I DA PESQUISA

1. Na equação $x^2 - 2mx + 1 = 0$ determine os valores de “m” para que a equação: e justifique cada resposta.

- a) tenha uma única raiz real;
- b) não tenha raízes reais;
- c) tenha raízes reais e diferentes.

2. Considere a equação $x^2 + 20x + 36 = 0$:

- a) Que número deve ser somado aos dois membros da equação para que o primeiro membro seja um trinômio quadrado perfeito?
- b) Após resolver o item anterior resolva a equação pelo método de completar quadrados.

3. Escreva a equação do 2º grau cujas raízes são os números correspondentes ao mês e ao dia de seu aniversário. Comente a sua resposta.

4. Agora é com você:

- a) Escolha dois números quaisquer.
- b) Escreva a expressão da equação do 2º grau que tenha como raízes os números que você escolheu.
- c) Use a fórmula da equação do 2º grau para resolver a equação que você escreveu no item anterior.
- d) Formule um problema para seu professor, envolvendo os números e a equação que você escreveu, na forma “a soma de dois números é tanto e seu produto é tanto; descubra os dois números”.

5. (UF-CE) Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x + 5$. Pode-se afirmar corretamente que:

- a) vértice do gráfico de f é o ponto $(1; 4)$;
- b) f possui dois zeros reais e distintos;
- c) f atinge um máximo para $x = 1$;
- d) gráfico de f é tangente ao eixo das abscissas.
- e) n.d.a



t

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ –
CAMPUS CORRENTE.

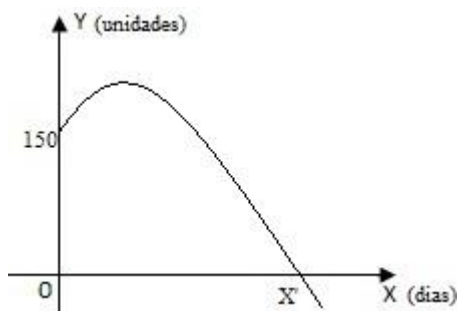
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO *LATU SENSU* EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PROFESSOR: MARCOS JANE DE SOUZA AZEVEDO

ORIENTADOR: PROF. ME. CARLOS ADRIANO DA COSTA GOMES

QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO II DA PESQUISA

1. A prefeitura de uma cidade deseja ampliar a praça da matriz, que tem formato retangular, para que os jovens tenham mais espaço para passear e namorar. A antiga praça tinha 20 m x 30 m de lados. A faixa, em torno da praça antiga, de largura constante x da cada lado, tem de ter 336 m². Qual deve ser a largura da nova faixa de passeio?
2. (UMC-SP) Uma loja fez campanha publicitária para vender seus produtos importados. Suponha que x dias após o término da campanha, as vendas diárias tivessem sido calculadas segundo a equação $-2x^2 + 20x + 150 = 0$, conforme o gráfico ao lado. Depois de quantos dias, depois de encerrada a campanha, a venda atingiu o valor máximo?



3. (EXPCEX) O projétil disparado por um canhão, posicionado num ponto de altitude igual a 200 metros, atinge um alvo localizado num ponto de altitude igual a 1200 metros. Considerando-se que:

- I) A trajetória descrita pelo projétil é dada pela equação $y = -\frac{1}{20}x^2 + x$;
- II) Com x e y em quilômetros, e referenciada a um sistema cartesiano com origem no canhão.
- III) O alvo é atingido quando o projétil encontra-se no ramo descendente da sua trajetória.

Nas condições acima descritas, pode-se afirmar que a distância horizontal entre as posições do canhão e do alvo é:

- a) 0,5 km
- b) 1,0 km
- c) 1,5 km
- d) 2,0 km
- e) 2,5 km

4. (UF-PR) Um grupo de funcionários vai viajar para participar de um congresso. Eles tiveram a ideia de fretar um ônibus no qual todos viajariam juntos e cada um pagaria o preço do fretamento dividido pelo número de pessoas. Ao pesquisar os preços, descobriram que uma empresa de turismo só aceitava grupos de 15 a 40 passageiros para cada ônibus, e calculava o preço (em reais) do fretamento do ônibus pela fórmula $p(x) = -x^2 + 70x + 50$, onde x representa o número de passageiros. Considere as seguintes afirmações a respeito dos preços nessa empresa.

- I) Se viajarem 40 pessoas, cada pessoa pagará mais de R\$ 30,00.
- II) Se viajarem 30 pessoas, o preço do fretamento será menor do que o preço correspondente a 40 pessoas.
- III) Existe um número x de pessoas para o qual o preço do fretamento é igual a R\$ 1.150,00.

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente a afirmativa I é verdadeira.
- b) Somente a afirmativa II é verdadeira.
- c) Somente a afirmativa III é verdadeira.
- d) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
- e) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

5. Em uma partida de vôlei, um jogador deu um saque em que a bola atingiu uma altura h em metros, num tempo t , em segundos, de acordo com a relação $h(t) = -t^2 + 8t$.

- a) Em que instante a bola atingiu a altura máxima?

[Nota]: observem o vértice

- b) De quantos metros foi à altura máxima alcançada pela bola?