



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO PIAUÍ
CAMPUS ANGICAL
CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

LUCAS DE JESUS PIRES AGUIAR SILVA

**OS NÚMEROS COMPLEXOS COMO FERRAMENTA PARA
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA PLANA**

**ANGICAL
2022**

LUCAS DE JESUS PIRES AGUIAR SILVA

OS NÚMEROS COMPLEXOS COMO FERRAMENTA PARA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS DE GEOMETRIA PLANA

Trabalho de Conclusão de Curso (artigo científico) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Angical.

Orientador: Prof^o. Me. Edson da Silva Lira.

ANGICAL

2022

OS NÚMEROS COMPLEXOS COMO FERRAMENTA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA PLANA

Lucas de Jesus Pires Aguiar Silva ¹

Edson da Silva Lira ²

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar de que forma os números complexos podem ser utilizados como ferramenta para a resolução de problemas de geometria plana. A pesquisa se caracteriza como uma pesquisa exploratória, os conceitos de números complexos serão explorados de tal forma a obter relações geométricas suficientes para se aplicar na resolução de problemas de geometria plana. Nesta pesquisa caracterizaremos os números complexos através de suas propriedades geométricas e algébricas, e, em seguida, resolveremos 03 problemas de geometria plana utilizando exclusivamente números complexos. Exploramos o uso de coordenadas, e com isso mostramos que podemos transportar qualquer figura geométrica plana para o plano de Argand-Gauss, e assim, resolver os problemas de geometria como se fossem problemas de números complexos.

Palavras-chave: Números complexos. Geometria plana. Resolução de problemas.

ABSTRACT

This work aims to analyze how complex numbers can be used as a tool for solving plane geometry problems. The research is characterized as an exploratory research, the concepts of complex numbers will be explored in such a way as to obtain enough geometric relationships to be applied in the resolution of plane geometry problems. In this research we will characterize complex numbers through their geometric and algebraic properties, and then we will solve 03 plane geometry problems using exclusively complex numbers. We explored the use of coordinates, and with that we showed that we can transport any flat geometric figure to the Argand-Gauss plane, and thus solve geometry problems as if they were complex number problems.

Keywords: Complex numbers. Flat geometry. Problem solving.

Data de apresentação: 21/06/2022

¹Acadêmico do curso de licenciatura em Matemática, IFPI/CAANG. Email: lucasdejesuspiresaguiar-silva@gmail.com

²Orientador e professor do Curso de Licenciatura em Matemática, IFPI/CAANG. Email: edson.lira@ifpi.edu.br

1 Introdução

Um dos conteúdos da matemática de maior grau de abstração no ensino médio é o de números complexos. Neste trabalho pretendemos analisar e mostrar aplicações interessantes destes números na resolução de problemas de geometria plana, construindo uma ponte entre números complexos com a geometria plana.

A geometria plana é uma área muito rica em problemas contextualizados. E dentre todas as formas de resolução de problemas de geometria plana, pretendemos mostrar as formas de resolução na qual utilizem números complexos. Essas aplicações são bem peculiares, pois se utiliza de métodos próprios do conteúdo de números complexos. Muitas vezes os métodos utilizando números complexos são até mais simples do que os demais métodos.

Pretendemos não apenas apresentar uma excelente forma de conexão entre geometria plana e números complexos, mas também apresentar um método para ser utilizado em sala de aula.

Para conectarmos duas áreas da matemática aparentemente muito distintas, devemos primordialmente definir bem nossos objetivos. Desta forma temos como objetivo geral: “Analisar de que forma os números complexos podem funcionar como metodologia de ensino para a resolução de problemas de geometria plana”. Seguido dos objetivos específicos: “Identificar a relação dos números complexos com a geometria plana”; “Caracterizar um método de resolução de problemas de geometria plana utilizando números complexos”; “Compreender as vantagens de se utilizar os números complexos para resolução de problemas de geometria plana”.

2 História dos Números Complexos

Através da história da matemática, os métodos de resolução de equações polinomiais sempre foram alvo de indagações. Muitas culturas antigas já conheciam (ou dominavam) métodos de resoluções de alguns tipos de equações. Diversos escritos babilônicos mostram que soluções de equações quadráticas eram alcançadas sem grandes dificuldades (Boyer e Merzbach, 2011).

Na idade média surgiu um método, sofisticado para a época, que era usado para resolver equações polinomiais do 3º grau. Em 1545, Jeronimo Cardano (1501-1576), em seu livro “Ars Magna” (A Grande Arte), mostrou um método para resolver equações de terceiro grau, que hoje é chamado de Fórmula de Cardano (Lima, 2006, p.183).

Contudo, por meio da fórmula de Cardano, chegava-se a um impasse: obtinha-se uma raiz quadrada de um número negativo. Esse impasse só foi retirado com a construção de um novo conjunto: o conjunto dos números complexos. A partir desse conjunto, pode-se aceitar sob determinadas condições a existência de raiz quadrada de números negativos.

Algebricamente, os números complexos são definidos como os números da forma $a + bi$, com a e b números reais e $i = \sqrt{-1}$, eles também admitem a forma trigonométrica. Escrevemos o número complexo z , como $z = r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$, com $\theta = \arg(z)$ (θ é o ângulo que o vetor forma com o semieixo positivo x no sentido anti-horário).

Os números complexos se relacionam com a geometria plana através de questões relacionadas a ângulos, segmentos, retas, áreas etc. Em cada problema de geometria plana pode-se aplicar conceitos de números complexos, bem como diversos de seus teoremas.

Mas nem sempre houve essa relação direta de números complexos com a geometria plana, temos que, segundo Neves (2014), “a primeira tentativa de se obter uma representação geométrica para os números complexos que se tem registro é atribuída a John Wallis, em 1673. (...) Infelizmente Wallis não obteve sucesso”. (p.04, 2014).

Ainda de acordo com Neves (2014), foi somente em 1797, que foi concebido legitimamente num texto do livro de Cardano que propunha uma representação geométrica dos números complexos (p.04, 2014). E com isso podemos perceber que a relação entre números complexos e geometria plana, foi muito dificultosa de ser compreendida entre os matemáticos.

3 Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino Matemática

Atualmente, a diversificação e emprego de diferentes metodologias de ensino de matemática é um grande ponto a ser pensado. Isso, porque o ensino de matemática não é simples e requer muita preparação. Segundo Bicudo e Borba, Sempre houve muita dificuldade para se ensinar matemática (...) “pois, como o elemento mais importante para se trabalhar matemática é o professor de matemática, e este não está sendo bem preparado para desempenhar bem suas funções” (p.233, 2004).

Na busca de metodologias de ensino de matemática, destacamos o método de resolução de problemas. Segundo, Bicudo e Borba: “É sabido que a matemática tem desempenhado um papel importante no desenvolvimento da sociedade e que problemas de matemática têm ocupado um lugar central no currículo escolar desde a Antiguidade” (Bicudo e Borba, 2004, p.232).

Segundo Bicudo e Borba, 2004: “Sem dúvidas, ensinar matemática através da resolução de problemas é uma abordagem consistente com as recomendações do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) e dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais)”.

Temos que a resolução de problemas como metodologia de ensino é crucial para que o aluno obtenha solidez em seu conhecimento. Essa metodologia se deve utilizar de recursos e meios coerentes, para o desenvolvimento do aluno. Segundo Lima (2007): “(...) a prática

de exercícios algébricos formais é indispensável a fim de que se adquira a desenvoltura necessária ao entendimento de temas mais avançados”.

É interessante observar que a resolução de problemas como metodologia de ensino ainda conta com a vantagem de ser desafiante. Pois de acordo com Bicudo e Borba (2004): “Professores que experimentam ensinar dessa maneira nunca voltam a ensinar do modo “ensinar dizendo”. A excitação de desenvolver a compreensão dos alunos através de seu próprio raciocínio vale todo o esforço e, de fato, é divertido, também para os alunos.”

4 Os Números Complexos

Definição 4.1. O conjunto dos números complexos, representados por $\mathbb{C}$, é o conjunto dos pares ordenados (a, b) com a e b números reais, no qual são consideradas as seguintes operações internas:

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Dado um número complexo $z = (a, b)$, as coordenadas cartesianas a e b são chamadas de *parte real* e *parte imaginária* do número complexo z , respectivamente.

Propriedade 4.1. As operações de adição e multiplicação de números complexos, definidas acima, gozam das seguintes propriedades:

1. *Comutativa:* $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
2. *Associativa:* $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ e $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
3. *Distributiva:* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$
4. *Elemento Neutro:*
 $\exists! z_a \in \mathbb{C}; z_a + z = z + z_a = z$ e $\exists! z_m \in \mathbb{C}; z_m \cdot z = z \cdot z_m = z; \forall z \in \mathbb{C}$
5. *Elemento Oposto:* $\forall z \in \mathbb{C}, \exists (-z) \in \mathbb{C},$ tal que $z + (-z) = -z + z = z_a$
6. *Elemento Inverso:* $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists z^{-1} \in \mathbb{C},$ tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = z_m.$

Observação:

- $z_a = (0, 0)$ e $z_m = (1, 0)$ são os elementos neutros da adição e da multiplicação, respectivamente.
- Dado $z = (a, b)$ o seu inverso será $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ com $a^2 + b^2 \neq 0$.

4.1 Propriedades Geométricas dos Números Complexos

Realizada a caracterização dos números complexos via pares ordenados, iremos agora conceituá-los geometricamente. Para caracterizarmos os números complexos geometricamente, precisamos invocar conceitos geométricos naturais dos números complexos, como o plano de *Argand-Gauss*, o módulo (comprimento) de um número complexo, o argumento de um número complexo etc.

O plano de *Argand-Gauss* é um sistema de coordenadas cartesianas na qual cada ponto representa um número complexo. Esse sistema de coordenadas é composto por duas retas perpendiculares, uma representando as coordenadas reais dos números complexos $\mathbb{C}$, e a outra representando as coordenadas imaginárias i . O módulo de um número complexo $z = (a, b)$, é a distância do afixo $(0, 0)$ ao afixo (a, b) do plano de *Argand-Gauss*.

Vejamos o plano de *Argand-Gauss* representado abaixo.

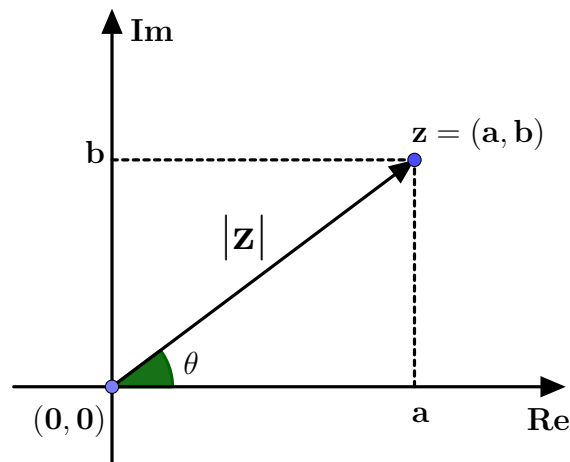


Figura 1 – Criado pelo autor.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, temos que:

1. $|z| \geq 0$.
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
3. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ com $z_2 \neq 0$.
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. (desigualdade triangular)

4.2 Propriedades Algébricas dos Números Complexos

Considere a seguinte função f definida por:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, 0) &\longrightarrow f(x, 0) = x \end{aligned}$$

Considerando o número complexo $z = (a, b)$, podemos escrever:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

Observe que $(b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b)$, logo teremos:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

Definição 4.2. Define-se como unidade imaginária o número complexo $(0, 1)$. Indica-se por $i = (0, 1)$.

Assim, podemos escrever:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b \cdot i \therefore (a, b) = a + bi \text{ ou } z = a + bi.$$

Em relação a unidade imaginária $i = (0, 1)$, pela multiplicação de pares ordenados pode-se determinar a potencia i^2 :

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Definição 4.3. Todo número complexo é definido algebricamente como $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, dois números complexos, temos que:

- Igualdade de números complexos: $z_1 = z_2 \iff a + bi = c + di \iff a = c \text{ e } b = d$.
- Soma de números complexos: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
- Produto de números complexos: $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Definição 4.4. Dado o número complexo $z = a + bi$, indicamos o seu conjugado por $\bar{z}$ e definimos como sendo $\bar{z} = a - bi$.

Propriedade 4.2. O conjugado de um número complexo goza das seguintes propriedades:

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $z + \bar{z} = 2 \cdot a = 2 \cdot \text{Re}(z)$
3. $z - \bar{z} = 2 \cdot bi = 2 \cdot \text{Im}(z)$
4. $z = \bar{z}, z \in \mathbb{R}$
5. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
6. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$$7. \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$8. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \text{ com } z_2 \neq 0.$$

$$9. (\overline{z})^n = \overline{z^n}$$

Proposição 4.1. *Dado um número complexo qualquer, quando multiplicado pela unidade imaginária sofre uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno da origem O do sistema de eixos do plano complexo.*

Demonstração. $(a, b) \in \mathbb{C}$ e $i = (0, 1)$; $(a, b) \cdot (0, 1) = (a \cdot 0 - b \cdot 1, a \cdot 1 + b \cdot 0) = (-b, a)$ $\square$

Vejamos a representação no plano de Argand-Gauss.

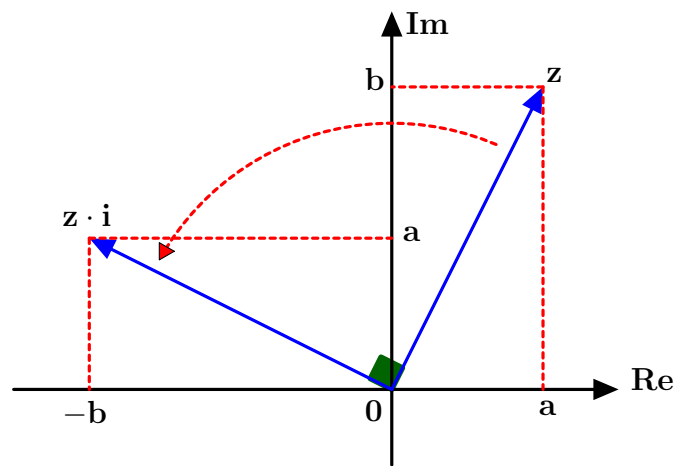


Figura 2 – Transformação no sentido anti-horário

Proposição 4.2. *Dado um número complexo qualquer, quando multiplicado pela unidade imaginária negativa sofre uma rotação de 90° no sentido horário em torno da origem O do sistema de eixos do plano complexo.*

Demonstração. $(a, b) \in \mathbb{C}$ e $-i = (0, -1)$; $(a, b) \cdot (0, -1) = (a \cdot 0 - b \cdot (-1), a \cdot (-1) + b \cdot 0) = (b, -a)$ $\square$

Vejamos a representação no plano de Argand-Gauss.

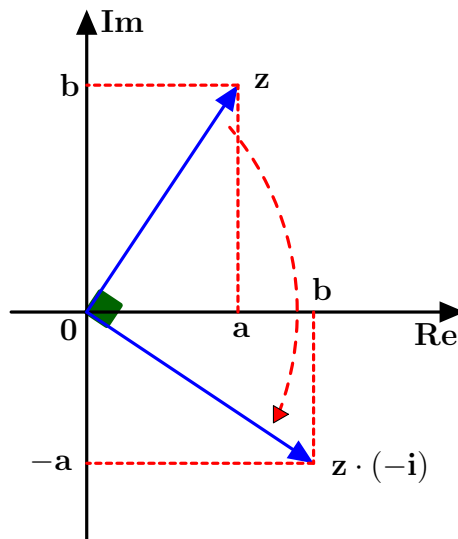


Figura 3 – Transformação no sentido horário

Proposição 4.3. (*Área de um triângulo*) A área do triângulo $A_1A_2A_3$ cujos vértices possuem coordenadas $z_1z_2z_3$ é igual ao valor absoluto do número:

$$\frac{1}{4}i \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}$$

Demonstração. Usando coordenadas cartesianas, a área de um triângulo de vértices $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ é igual ao valor absoluto do determinante

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Já que $x_k = \frac{z_k + \overline{z_k}}{2}$ e $y_k = \frac{z_k - \overline{z_k}}{2i}$, $k = 1, 2, 3$. Obtemos:

$$\Delta = \frac{1}{8i} \cdot \begin{vmatrix} z_1 + \overline{z_1} & z_1 - \overline{z_1} & 1 \\ z_2 + \overline{z_2} & z_2 - \overline{z_2} & 1 \\ z_3 + \overline{z_3} & z_3 - \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}i \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}$$

□

5 Metodologia

Para obter os resultados e respostas acerca da problematização apresentada neste trabalho, foi feita uma pesquisa qualitativa de problemas de geometria plana no livro "A

matemática do ensino médio vol 3”, no artigo ”Aplicações de Números Complexos em Geometria” e em avaliações da disciplina de Geometria I do PROFMAT. O intuito dessa pesquisa é obter uma visão geral a respeito dos problemas de geometria plana.

Quanto aos objetivos, a pesquisa se caracteriza como uma pesquisa exploratória, pois os conceitos de números complexos serão explorados de tal forma a obter relações geométricas suficientes para se aplicar na resolução de problemas de geometria plana.

Com isso, a pesquisa quanto aos procedimentos se caracteriza como uma pesquisa bibliográfica com um caráter educacional. Gil (2007, p. 44) explica que a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Assim, pesquisaremos problemas de geometria plana, já elaborados, em materiais de matemática do ensino fundamental e médio.

Neste Trabalho, resolvemos 3 problemas contextualizados de geometria plana utilizando exclusivamente os números complexos e realizamos uma análise dos métodos de números complexos como ferramenta de resolução de problemas de geometria plana. Essa análise teve o objetivo de se verificar a viabilidade do uso dos números complexos, pois sabemos que a simplicidade é uma qualidade indispensável nos métodos matemáticos.

6 Problemas de Geometria Plana e Números Complexos

6.1 Problema 1: O Problema do Tesouro: página 64 do livro *A Matemática do Ensino Médio, Volume 3*

Recentemente foi descoberto um manuscrito do pirata Barba Negra descrevendo a localização de um rico tesouro enterrado por ele em certa ilha do Caribe. O manuscrito identifica perfeitamente a ilha e dá as seguintes instruções.

“... qualquer um que desembarque nesta ilha verá imediatamente dois grandes carvalhos, que chamarei A e B e também uma palmeira, que chamarei C. Eu enterrei o tesouro em um ponto X que pode ser encontrado da seguinte forma.

Caminhe de C para A contando seus passos. Chegando em A, vire para a esquerda e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto M.

Volte ao ponto C.

Caminhe de C para B contando seus passos. Chegando em B, vire para a direita e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto N.

O ponto X está na reta que liga M a N, e a mesma distância desses dois pontos”.

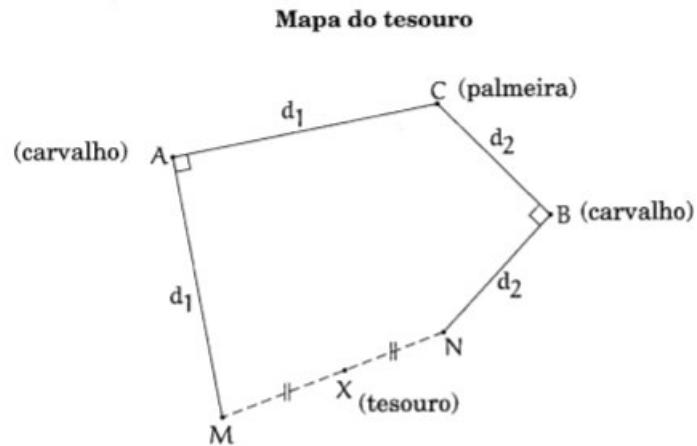


Figura 4 – Figura 54 da página 65 do livro A Matemática do Ensino Médio, Volume 3

Com essas precisas informações, os exploradores chegaram à referida ilha, mas tiveram uma desagradável surpresa. Os carvalhos (A e B) lá estavam, mas a palmeira (C) tinha desaparecido completamente.

O tesouro estava perdido.

Solução 6.1. Vamos representar o mapa no plano de Argand-Gauss tomando como origem o carvalho A.

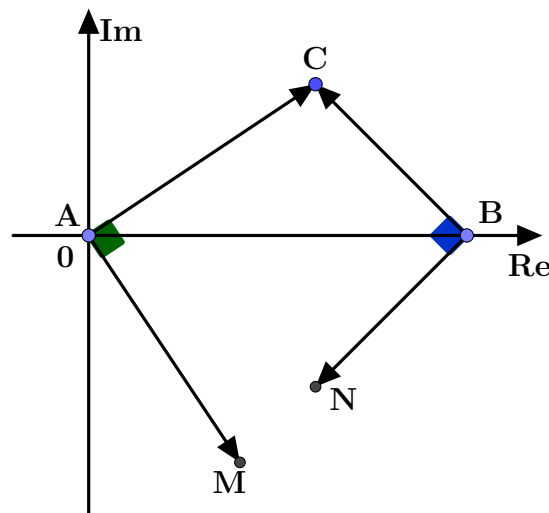


Figura 5 – Mapa do tesouro representado no plano de Argand-Gauss

Considerando os seguintes complexos: $A = (0,0)$, $B = (d,0)$, e $C = (x,y)$, iremos determinar as coordenadas dos pontos M e N.

Temos que: $z = (x,y)$, $v = \overrightarrow{BC}$

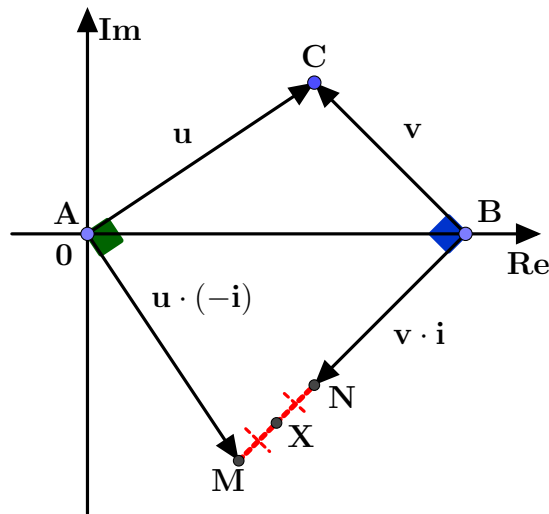


Figura 6 – Mapa do tesouro com indicações dos complexos

Realizando as contas no plano acima, teremos:

$u = \overrightarrow{AC} = C - A = (x, y) - (0, 0) = (x, y)$ e $v = \overrightarrow{BC} = C - B = (x, y) - (d, 0) = (x - d, y) \therefore u = (x, y)$ e $v = (x - d, y)$.

Aplicando as proposições 4.1 e 4.2:

$u \cdot (-i) = (x, y) \cdot (0, -1) = (y, -x)$ e $v \cdot i = (x - d, y) \cdot (0, 1) = (-y, x - d)$.

Vamos determinar as coordenadas dos pontos M e N.

$\overrightarrow{AM} = u \cdot (-i) \Rightarrow M - A = (y, -x) \Rightarrow M = A + (y, -x) \Rightarrow M = (0, 0) + (y, -x) \therefore M = (y, -x)$.

$\overrightarrow{BN} = v \cdot i \Rightarrow N - B = (-y, x - d) \Rightarrow N = B + (-y, x - d) \Rightarrow N = (d, 0) + (-y, x - d) \therefore N = (-y + d, x - d)$.

Determinemos o ponto médio X:

$$X = \frac{1}{2} \overline{MN} \Rightarrow X = \left(\frac{-y + d + y}{2}, \frac{x - d + (-x)}{2} \right) \therefore X = \left(\frac{d}{2}, \frac{-d}{2} \right).$$

6.2 Problema 2: Questão 02 da 1ª Avaliação da Disciplina de Geometria I de 2012/2 – (PROFMAT)

Quadrados foram construídos sobre os lados de um paralelogramo como mostra a figura abaixo. Mostre que os centros desses quatro quadrados são vértices de outro quadrado.

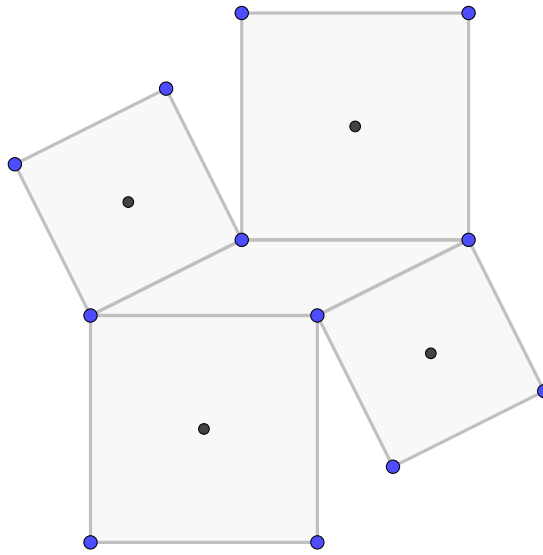


Figura 7 – Quadrilátero e os quatro quadrados

Solução 6.2. Vamos considerar o paralelogramo $ABCD$, são construídos exteriormente a $ABCD$ os quadrados $ABEF$, $BCGH$, $CDJI$ e $ADHL$, cujos centros são, respectivamente, os pontos M , N , O e P . Iremos provar que o quadrilátero $MNOP$ é um quadrado.

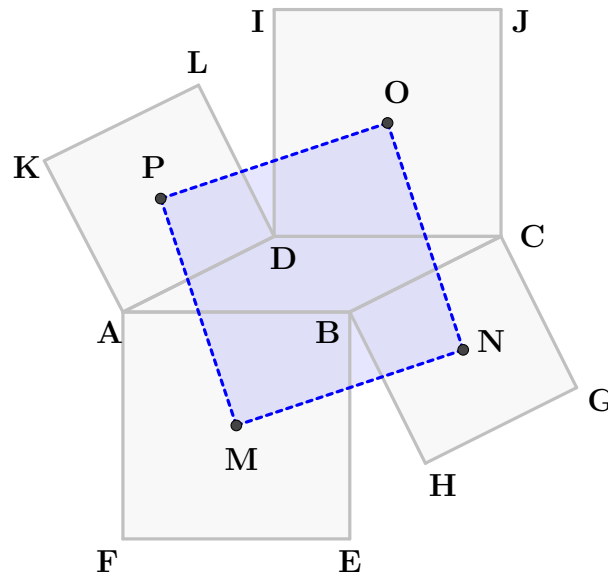


Figura 8 – Indicação dos pontos e do figura MNOP

Vamos indicar alguns vértices complexos, assim teremos:

$A = 0, B = z_1, C = z_2, D = z_3, M = z_4, N = z_5, O = z_6, P = z_7, E = z_8, G = z_9, I = z_{10}$ e $K = z_{11}$.

Provaremos que: $z_6 = z_5 + (z_4 - z_5) \cdot (-i)$ e $z_7 = z_4 + (z_5 - z_4) \cdot i$.

Observação 6.1. As duas equações acima são suficientes para demonstrarmos que o qua-

drilátero com vértices em M, N, O e P é um quadrado, pois elas mostram que o quadrilátero em questão tem os quatro lados congruentes e quatro ângulos retos.

Vejamos a figura no plano de Argand-Gauss.

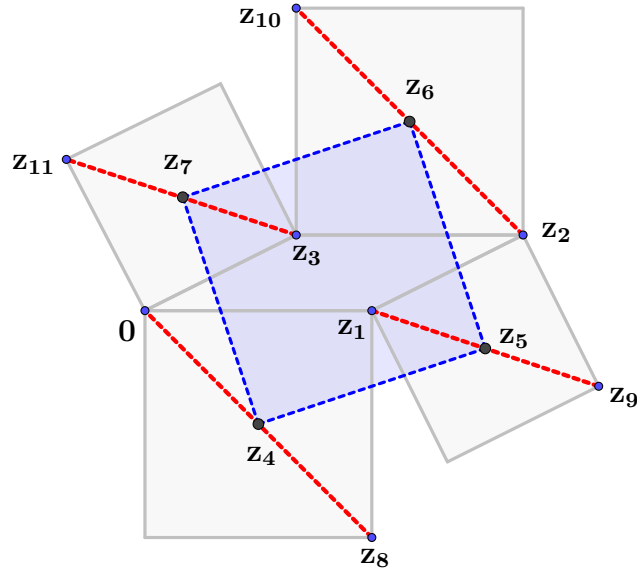


Figura 9 – Vértices complexos

Dessa forma teremos:

- $z_2 = z_1 + z_3$;
- $z_8 = (0 - z_1) \cdot i + z_1$;
- $z_9 = (z_1 - z_2) \cdot i + z_2$;
- $z_{10} = (z_2 - z_3) \cdot i + z_3$
- $z_{11} = z_3 \cdot i$.

Pelo ponto médio de cada quadrado, teremos:

- $z_4 = \frac{1}{2} \cdot (0 + z_8) = \frac{1}{2} \cdot [(0 - z_1) \cdot i + z_1]$;
- $z_5 = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_9) = \frac{1}{2} \cdot [z_1 + (z_1 - z_2) \cdot i + z_2]$;
- $z_6 = \frac{1}{2} \cdot (z_2 + z_{10}) = \frac{1}{2} \cdot [z_2 + (z_2 - z_3) \cdot i + z_3]$;
- $z_7 = \frac{1}{2} \cdot (z_3 + z_4) = \frac{1}{2} \cdot [z_3 + z_3 \cdot i]$.

E portanto:

$$z_5 + (z_4 - z_5) \cdot (-i) = z_6 \text{ e } z_4 + (z_5 - z_4) \cdot i = z_7$$

6.3 Problema 3: Aplicação do Teorema da área de um triângulo.

Calcule a área de um triângulo complexo com vértices $z_1 = (1, 3)$, $z_2 = (3, 1)$ e $z_3 = (4, 5)$.

Solução 6.3. Vamos localizar os vértices no plano de Argand-Gauss:

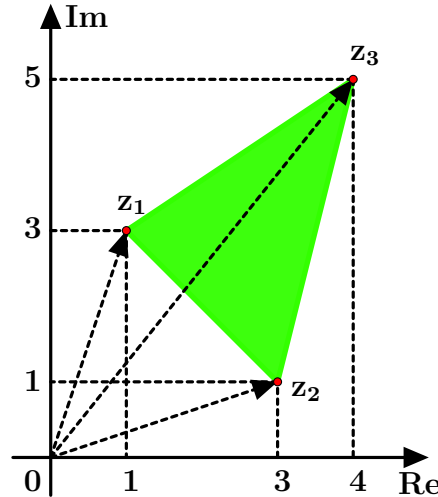


Figura 10 – Representação do triângulo complexo

Os conjugados dos vértices são: $\bar{z}_1 = (1, -3)$, $\bar{z}_2 = (3, -1)$ e $\bar{z}_3 = (4, -5)$.

Usando a Proposição 4.2. (Área de um triângulo):

$$A = \frac{i}{4} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \cdot [(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) - (z_2 \bar{z}_1 + z_3 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_3)]$$

Lembremos que $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, teremos:

$$z_1 \bar{z}_2 = (1, 3) \cdot (3, -1) = (1 \cdot 3 - 3 \cdot (-1), 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 3) = (6, 8).$$

$$z_2 \bar{z}_3 = (3, 1) \cdot (4, -5) = (3 \cdot 4 - 1 \cdot (-5), 3 \cdot (-5) + 1 \cdot 4) = (17, -11).$$

$$z_3 \bar{z}_1 = (4, 5) \cdot (1, -3) = (4 \cdot 1 - 5 \cdot (-3), 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 1) = (19, -7).$$

Usando o conjugado do produto $\overline{z_1 \bar{z}_2} = \bar{z}_1 \cdot z_2$, temos:

$$z_2 \cdot \bar{z}_1 = \overline{z_1 \bar{z}_2} = \overline{(6, 8)} = (6, -8)$$

$$z_3 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_2 \bar{z}_3} = \overline{(17, -11)} = (17, 11)$$

$$z_1 \cdot \bar{z}_3 = \overline{z_3 \bar{z}_1} = \overline{(19, -7)} = (19, 7)$$

$$\text{Realizando a soma: } z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 = (42, -10)$$

Usando o conjugado da soma $\overline{z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, temos:

$$\overline{z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1} = z_2 \bar{z}_1 + z_3 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_3 = (42, 10).$$

Cálculo da área será:

$$A = \frac{i}{4} \cdot [(42, -10) - (42, 10)] = \frac{i}{4} \cdot (0, -20) = \frac{1}{4} \cdot (0, 1) \cdot (0, -20) = \frac{1}{4} \cdot (20, 0) = \frac{1}{4} \cdot 20$$

$\therefore A = 5u.a.$

7 Considerações Finais

Vimos nesse Artigo que o conjunto dos Números Complexos é uma ferramenta para resolver problemas de Geometria Plana. Através do plano Argand-Gauss, podemos fazer o uso de coordenadas dos números complexos, e com isso, pensarmos neles geometricamente.

Identificamos inicialmente a relação dos números complexos com a geometria plana, por meio do pensamento geométrico dos números complexos induzido pelo plano Argand-Gauss e, em seguida, caracterizamos alguns métodos de resolução de problemas de geometria plana utilizando números complexos através da resolução de questões.

Os números complexos, com suas propriedades algébricas e geométricas, auxiliam os alunos a pensarem a geometria de forma algébrica, isso se torna útil para uma consolidação do pensamento algébrico aplicado.

Os números imaginários são ricos em interpretações geométricas. Vimos por exemplo na questão 01 que o produto de um número complexo z pela unidade imaginária i equivale a uma rotação de z no sentido anti-horário. Analogamente o produto de número complexo z por $(-i)$ equivale a uma rotação de z no sentido horário. Essa definição foi muito importante, pois através dela podemos interpretar o produto de números complexos geometricamente.

Nas questões 02 e 03, exploramos o uso de coordenadas, podemos transportar figura geométrica no plano para o plano de Argand-Gauss, e assim, resolver os problemas de geometria como se fossem problemas de números complexos.

Referências

ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorin. Números Complexos de A a Z. 1 ed. Fortaleza: Vertseller. 2013.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: pesquisa em movimento. 4.ed. – São Paulo: Cortez, 2012.

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH Uta Caecilia; [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012. Título original: A history of mathematics.

GIL, Antônio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 4.ed. São Paulo: Atlas, 2007.

LIMA, Elon Lages.; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. A matemática do ensino médio vol 3. 6. ed. – Rio de Janeiro. Editora: SBM. 2006.

LIRA, Edson da Silva. Uma aplicação dos números complexos no ensino médio da educação profissional técnica. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, Teresina. 2014.

NEVES, Robson Coelho Neves. Aplicações de Números Complexos em Geometria. INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL. Rio de Janeiro. 2014.