



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS ANGICAL
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

SAMUEL ALOÍSIO DE SOUSA SILVA

**GEOMETRIA FRACTAL E ETNOMATEMÁTICA NO PISO INTERTRAVADO DA
PRAÇA ALFREDO NUNES EM SÃO GONÇALO DO PIAUÍ**

**ANGICAL DO PIAUÍ
2023**

SAMUEL ALOÍSIO DE SOUSA SILVA

GEOMETRIA FRACTAL E ETNOMATEMÁTICA NO PISO INTERTRAVADO DA
PRAÇA ALFREDO NUNES EM SÃO GONÇALO DO PIAUÍ

Trabalho de Conclusão de Curso (artigo científico)
apresentado como exigência parcial para obtenção
do diploma do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Angical.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Francisco Ramos.

ANGICAL DO PIAUÍ
2023

GEOMETRIA FRACTAL E ETNOMATEMÁTICA NO PISO INTERTRAVADO DA PRAÇA ALFREDO NUNES EM SÃO GONÇALO DO PIAUÍ

Samuel Aloísio de Sousa Silva¹
Antônio Francisco Ramos²

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo entender em que medida os conhecimentos etnomatemáticos são aplicados na construção do piso intertravado da praça Alfredo Nunes em São Gonçalo do Piauí possuem relação com a geometria fractal? para tal, o estudo investigou os conhecimentos etnomatemáticos aplicados na construção do piso intertravado da praça Alfredo Nunes em São Gonçalo do Piauí e sua relação com padrões fractais. Em um primeiro momento desta pesquisa, foi feito um levantamento bibliográfico das informações existentes sobre *Geometria Fractal*, *Etnomatemática* e *Piso intertravado*, onde foi amplamente usada a plataforma Google Acadêmico. Em um segundo momento foi feita uma entrevista com os profissionais responsáveis pela construção do piso da praça, acerca da construção do piso. Ademais, foi feito registros fotográficos que servirão como fontes para análise dos padrões encontrados. Ao final, será mostrada a relação encontrada entre fractais e o piso intertravado, bem como seu etnomodelo e como esse ambiente pode ser visto e aplicado usando a BNCC(Base Nacional Comum Curricular).

Palavras-chave: geometria fractal; etnomatemática; piso intertravado.

ABSTRACT

The aim of this study is to understand to what extent ethnomathematical knowledge applied in the construction of the interlocking pavement of Alfredo Nunes Square in São Gonçalo do Piauí is related to fractal geometry. To do so, the study investigated ethnomathematical knowledge applied in the construction of the interlocking pavement of Alfredo Nunes Square in São Gonçalo do Piauí and its relation to fractal patterns. In the initial stage of this research, a literature review was conducted on existing information about Fractal Geometry, Ethnomathematics, and Interlocking Pavement, with extensive use of the 'Google Scholar' platform. In a second stage, interviews were conducted with the professionals responsible for the construction of the square's pavement regarding the construction process. Furthermore, photographic records were made to serve as sources for the analysis of the patterns found. Finally, the relationship between fractals and interlocking pavement, as well as its ethnomodel, will be demonstrated, along with how this environment can be viewed and applied using the BNCC (National Curricular Common Base).

Keywords: fractal geometry; ethnomathematics; interlocking floor.

Data de Aprovação: 28/09/2023

¹Técnico em Informática pelo Instituto Federal do Piauí - IFPI, Graduando em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal do Piauí - IFPI. E-mail: caang.201911ma34@aluno.ifpi.edu.br.

²Doutor em Educação pela *Universidad Internacional Iberoamericana* (UNINI-México). Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Angical do Piauí. E-mail: francisco.ramos@ifpi.edu.br.

1 INTRODUÇÃO

O estudo de matemática descreve, primeiramente, quais conteúdos são repassados aos alunos em suas fases escolares iniciais, com objetos de conhecimento variando de aritmética básica como as quatro operações, até a mais complexa expressões algébricas. O fato que se dá é que ao seguir estritamente um currículo de matemática que monta um caminho para tornar o aluno mais crítico e capaz, acaba-se deixando de lado pequenas áreas da matemática, como os números complexos e a geometria fractal.

Com base no que foi dito, esta pesquisa então possui o tema *geometria fractal e etnomatemática no piso intertravado da praça Alfredo Nunes em São Gonçalo do Piauí*, buscou uma resposta para o seguinte problema: *Em que medida a geometria fractal se relaciona com os conhecimentos etnomatemáticos aplicados na construção do piso intertravado da praça Alfredo Nunes em São Gonçalo do Piauí?*

Nesta pesquisa fez-se uso do seguinte objetivo geral: *investigar os conhecimentos etnomatemáticos aplicados na construção do piso intertravado da praça Alfredo Nunes em São Gonçalo do Piauí e sua relação com padrões fractais.*

Neste estudo, além do objetivo geral, buscou-se o alcance dos seguintes objetivos específicos: *Identificar o etnomodelo formado pelos padrões do piso intertravado; Estabelecer a relação dos saberes etnomatemáticos utilizados na construção do piso intertravado da praça com a geometria dos fractais; Relacionar conhecimentos etnomatemáticos aplicados na produção do piso intertravado e os objetos do conhecimento matemático previstos na BNCC.* A análise e descobertas obtidas a partir desta pesquisa, podem agregar valor à identidade da cidade, acentuando seu valor histórico-cultural e matemático, além de oferecer novas perspectivas de estudos em sala de aula, contribuindo assim para educação São Gonçalense.

Em via de regra, além desta introdução o presente estudo está organizado nos seguintes núcleos temáticos, que sistematizam a discussão. Primeiramente, será delineada toda uma contextualização sobre os conceitos básicos sobre *Geometria Fractal, Tipos de Piso Intertravado, Etnomatemática*, em seguida uma breve introdução sobre fractais na BNCC, logo após, a metodologia feita para execução desta pesquisa, e ao fim, haverá uma discussão com análises das informações encontradas e estudo do piso intertravado, bem como a interpretação dos padrões escondidos no piso.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Para início de discussão delineia-se uma breve abordagem histórica do surgimento desta discussão e os tipos de fractais.

2.1 GEOMETRIA FRACTAL

A grande área da matemática pode ser compreendida em cinco campos/unidades temáticas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), são elas: números/aritmética, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística (BRASIL, 2018). entre estas unidades, a geometria é amplamente conhecida pela repartição em 3 pequenas áreas, que são a Geometria Plana, Espacial e Analítica. Porém, há mais ramos nesta unidade, como o objeto desta pesquisa, a Geometria Fractal.

Ademais, “Os padrões fractais podem ser encontrados em toda a natureza, desde uma folha de papel amassado até a distribuição das galáxias.” (LOURENÇO; SILVA; QUEIROZ, 2004, p. 31). Na praça, esses padrões podem ser observados no piso, que se assemelham a fractais do tipo de substituição.

2.1.1 Contexto de Surgimento

A geometria fractal, por sua vez, é uma sub-área relativamente nova, que estuda formas que possuem uma propriedade de auto-similaridade, segundo Barbosa (2009, p.11), “Estas formas foram denominadas **fractais** em 1975 por Benoit Mandelbrot por possuírem a característica da auto-similaridade, ou seja, qualquer de suas partes é semelhante ao todo, ao conjunto.” Mandelbrot denominou tais entidades como fractais, segundo Barbosa (2005, p.9), “baseando-se no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere* correspondente significa *quebrar*: criar fragmentos irregulares, fragmentar”.

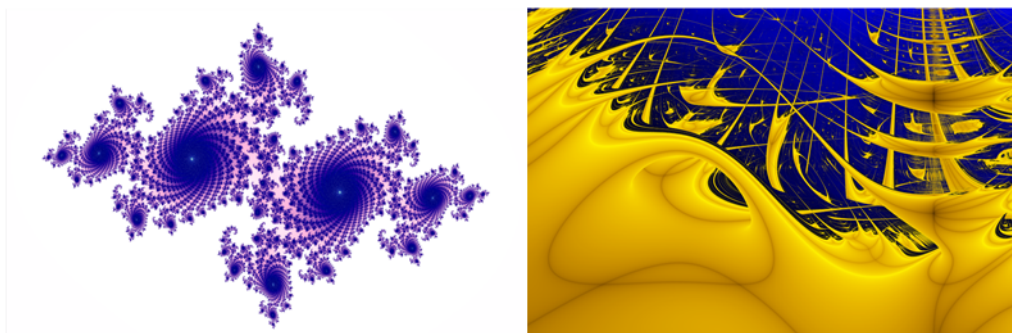
Pelo que fala Barbosa (2005, p.10) nas últimas 4 ou 5 décadas(a contar), houve o nascimento e o rápido desenvolvimento de uma nova ciência denominada Caos, que conseguia, ver ordem e padrões onde antes era observada apenas irregularidade, desse modo, essa ciência formou um elo entre temas que não se relacionavam, justamente pela sua irregularidade. A notoriedade da geometria fractal está relacionada a sua grande relação com essa ciência do caos, pois “as estruturas fragmentadas, extremamente belas e complexas dessa geometria, fornecem uma certa ordem ao Caos, razão de ser, às vezes, considerada a sua linguagem”(BARBOSA, 2005, p. 9).

Ainda segundo Barbosa (2005), desde 1948 ao ir trabalhar na IBM³, Mandelbrot resolveu um problema de ruídos em linhas telefônicas ao usar o conhecimento da Poeira de Cantor⁴, com isso, ao longo dos anos, Mandelbrot procurou situações em que podia aplicar suas ideias. Mostrando assim, como as duas ciências estão correlacionadas e podem trazer soluções para problemas do mundo real.

2.1.2 Tipos de classificações dos Fractais

Segundo Menezes (2003), citado por Rinaldi e Menezes (2007, p. 2), existem dois tipos de fractais: os geométricos (determinísticos) e os não não-lineares (ou aleatórios). Não-lineares são fractais de interação geralmente usando funções complexas como processo de interação, sendo construído a partir de computadores. À exemplo, o conjunto de Julia e o fractal de Lyapunov(Figura 1):

Figura 1 - Conjunto de Julia e fractal de Lyapunov



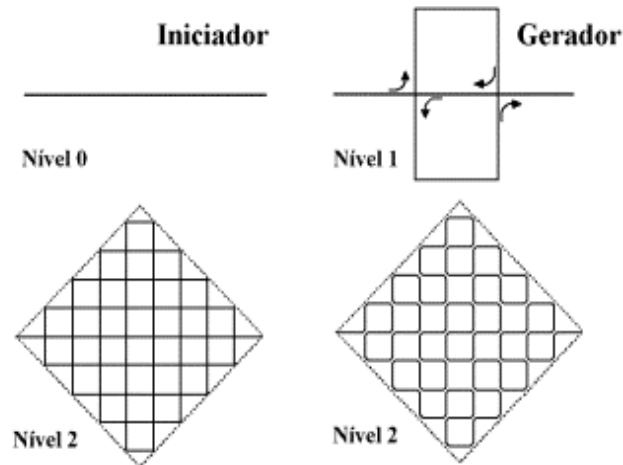
Fonte: GOOGLE Images

Os fractais geométricos existentes variam de forma, tipo ou classificação, até à sua construção. Pode-se iniciar citando a curva de Peano (Figura 2) e curva de Hilbert, que são fractais construídos a partir da substituição de uma unidade inicial por uma com uma certa característica, e repetir esse processo infinitamente.

Figura 2 - Curva de Peano

³ IBM - Centro de Pesquisas Thomas Watson

⁴ Trabalho de Georg Cantor que mostra a versão multidimensional do Conjunto de Cantor

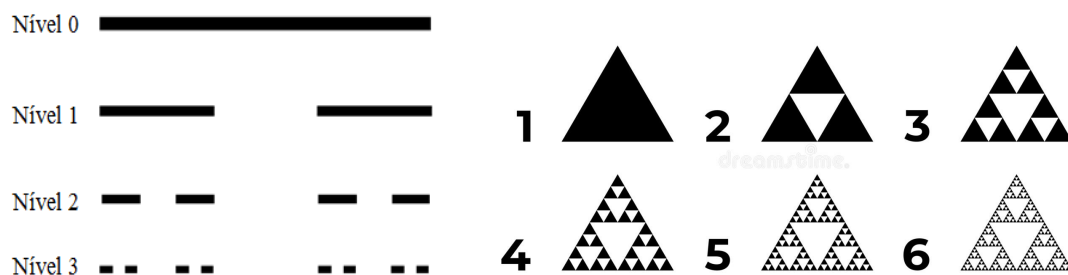


Fonte: GOOGLE Images

Há outros fractais famosos que seguem essa mesma construção, a citar a curva e a ilha de Koch e a curva de Sierpinski [veja todos em detalhes no anexo 1].

Outro tipo de construção existente é o fractal por remoção, em que se elimina uma determinada parte de uma figura infinitamente, como visto no conjunto de Cantor e triângulo de Sierpinski (Figura 3).

Figura 3 - Conjunto de Cantor e triângulo de Sierpinski

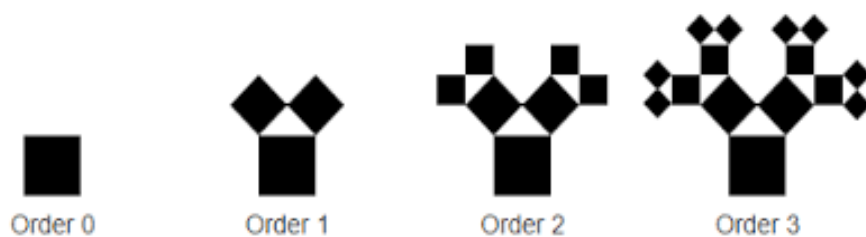


Fonte: GOOGLE Images

O fractal por remoção, será o tipo de fractal que será utilizado para analisar os padrões no piso intertravado, esta análise será feita na subseção 3.2.1.

Por fim, existem a construção dos fractais tipo árvore, a citar o fractal da árvore pitagórica (Figura 4).

Figura 4 - Árvore pitagórica



Fonte: GOOGLE Images

A discussão sobre fractais é alvo de muitos tipos de análise, e podem ser feitas de diversas maneiras. Dentre elas, é possível observar uma análise educacional escondida, que será mais bem trabalhada na subseção 3.3.

2.2 TIPOS DE PISO INTERTRAVADOS

Segundo a NBR 9781(2013, p. 2), o piso intertravado é um:

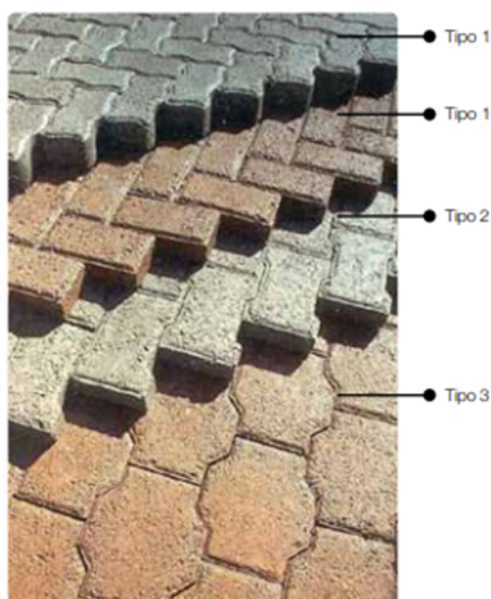
Pavimento flexível cuja estrutura é composta por uma camada de base (ou base e sub-base), seguida por camada de revestimento constituída por peças de concreto justapostas em uma camada de assentamento e cujas juntas entre as peças são preenchidas por material de rejuntamento e o intertravamento do sistema é proporcionado pela contenção.

De acordo com o Manual de Pavimento Intertravado (ABCP, 2010, p.9) a origem do piso intertravado data em torno de 5000 a.C. na Mesopotâmia, onde eram usadas pedras como forma de pavimento, também há uma datação de seu uso na Grécia por volta de 3000 a.C.(NASCIMENTO, 2016). Dessas formas primitivas de compor o pavimento dos pisos, surgiram outras formas como o uso de paralelepípedos ou pedras justapostas.

No contexto histórico, “após a Segunda Guerra Mundial, os blocos passaram a ser produzidos em fábricas maiores e com grande produção na Alemanha, tomando grande impulso na década de 70, quando chegaram ao Brasil.”(ABCP, 2010, p.9). De acordo com Fernandes (2013) citado por Nascimento (2016, p.18) “no Brasil, esta técnica foi utilizada pelos índios nos caminhos de Beaberu São Thomé, trilhas indígenas que interligavam diversas aldeias do litoral sul do Brasil a outros povos na Bolívia e Peru”

Ainda de acordo com o Manual (ABCP, 2010, p.11) há três tipos básicos de formatos de blocos, o *tipo 1* com formatos retangulares de fácil produção, com dimensões em torno de 20 cm de comprimento por 10 cm de largura; o *tipo 2* apresentando o formato de “I” com as mesmas dimensões do *tipo 1*; e o *tipo 3* de maior dimensão(ao menos 20 x 20 cm), os tipos são como na figura a seguir.

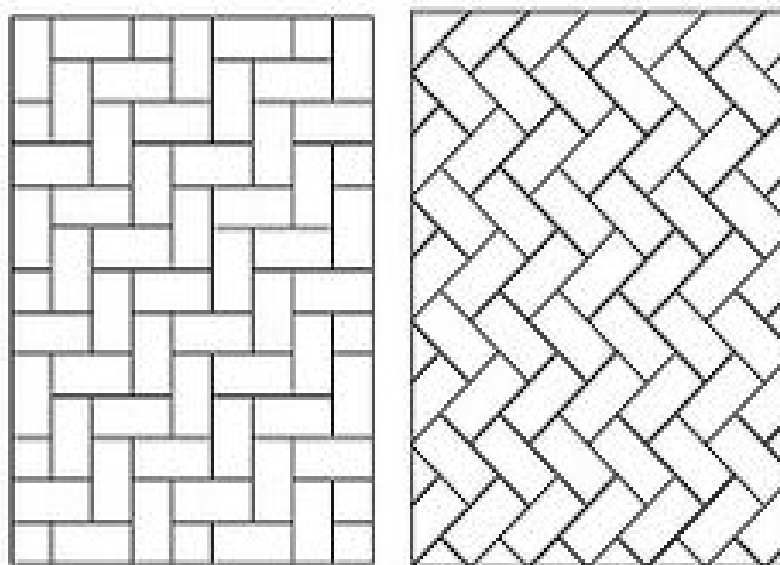
Figura 5 - Tipos de piso intertravado



Fonte: ABCP - Manual de Pavimento Intertravado(2010)

Não há uma clara obrigação de como se deve dispor os bloquetes de concreto para formar seus padrões, estes encaixes estão sujeitos às demandas do projeto em que serão inseridas. O encaixe entre os bloquetes podem ser feitos de várias maneiras, em especial à *Figura 6*, o encaixe é feito de forma que os bloquetes formem ângulos de 90° graus entre si.

Figura 6 - Piso intertravado tipo 1



Fonte: Paginação do Piso, Pinterest.

Este tipo de encaixe será o enfoque desta pesquisa, a seguir será feita uma aproximação conceitual sobre a etnomatemática do piso da praça que contém esse padrão.

2.3 ETNOMATEMÁTICA DO PISO INTERTRAVADO DA PRAÇA

Pode-se definir o programa etnomatemática como um “campo de pesquisa que pode ser descrito como o estudo das idéias e das atividades matemáticas encontradas em contextos culturais específicos.”(ROSA; OREY, 2006, p. 2). Desse modo segue que, atribuindo a pequena praça Alfredo Nunes este direcionamento, pode ser possível encontrar saberes etnomatemáticos presentes na estrutura da mesma.

Nota-se que o programa etnomatemática está relacionado com a forma que o conhecimento é concebido e as situações que levaram a isso, e os conhecimentos êmicos utilizados na construção do piso da praça se fazem importantes para essa análise, de fato “o conhecimento êmico é essencial para uma compreensão intuitiva e empática das práticas matemáticas de determinado grupo cultural.”(ROSA; OREY, 2012, p. 877).

Posteriormente, em 3.1, será mostrado como esse conhecimento êmico está relacionado com a construção do piso intertravado da praça. Dado o exposto, é necessário entender a relação de fractais com a educação, para entender as suas relações com a etnomatemática.

2.4 FRACTAIS NA BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo, que define “o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.”(BRASIL, 2018, p.7),

esse conjunto baseia-se no objetivo de assegurar as 10(dez) competências gerais da BNCC, que devem ser adquiridas pelos alunos ao longo da sua passagem pela educação básica.

Ressalta-se, que na BNCC:

A competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.(BRASIL, 2018, p. 8)

Segundo Brasil(2018, p.29) “As habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares”, tais habilidades são descritores específicos que regem e se entrelaçam para delinear um caminho em que o objeto de conhecimento em questão seja aprendido.

Não há na BNCC um objeto de conhecimento destinado aos fractais, sendo que eles só são citados na habilidade EM13MAT105, que diz:

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (**fractais**, construções civis, obras de arte, entre outras).(BRASIL, 2018, p. 533, grifo do autor).

Outra habilidade, que não cita os fractais, mas contém um conceito semelhante, é a habilidade EF06MA21, que diz: “Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 303), pertencendo ao objeto de conhecimento: Construção de figuras semelhantes.

As demais habilidades, podem ter relações com a geometria fractal, fato que será explorado posteriormente. Segue-se a metodologia utilizada na pesquisa.

2.5 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

O estudo se trata de uma abordagem qualitativa com o intuito de atingir o objetivo de investigar os conhecimentos etnomatemáticos aplicados na construção do piso intertravado da praça Alfredo Nunes em São Gonçalo do Piauí e sua relação com padrões fractais. Esse estudo irá buscar entender fatos sobre a praça, a maneira como os pedreiros que trabalham na praça fazem seu serviço, assim como conhecimentos etnomatemáticos e da geometria fractal que podem ser encontrados na mesma.

Ao fazer uma abordagem que envolve a etnomatemática, é necessário entender que há realidades culturais e observacionais distintas quanto a como será feita a pesquisa, fato exposto por Rosa e Orey (2012), que mostram as diferenças entre as perspectivas de quem está inserido na cultura/contexto cultural a ser analisado(abordagem êmica) e a perspectiva do pesquisador(abordagem ética).

Faz-se necessário, o uso da pesquisa bibliográfica e da pesquisa de campo, que serão feitas no intuito de atingir os objetivos deste estudo. Para a primeira, será usada a plataforma *google acadêmico*, onde será usada para encontrar artigos, livros e todo tipo de *e-material*, usando dos descritores lógicos ‘*Análise Fractal; Etnomatemática; Piso Intertravado*’. Para a pesquisa, também foi necessário o auxílio de leis como a Lei nº 9.394/1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional) e normas ABNT como a NBR 9781. Para a pesquisa de campo, com fim de fazer uma análise etnomatemática, foi preparada uma entrevista, de maneira informal, com os pedreiros responsáveis pela construção, a mesma pode ser encontrada no apêndice 1.

Além da abordagem etnomatemática presente, é necessário fazer um estudo e análise matemática a fim de entender os padrões escondidos no piso intertravado da praça. Para essa abordagem, foi feita uma pesquisa bibliográfica sobre a geometria e análise fractal, como descrito antes, bem como uma modelagem de um tipo específico de padrão do piso intertravado, que foi necessário para entender as relações do piso com a geometria fractal.

3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesta seção, se iniciará uma discussão com objetivo de *identificar o etnomodelo formado pelos padrões do piso intertravado*; estabelecer a relação dos saberes etnomatemáticos utilizados na construção do piso intertravado da praça com a geometria dos fractais; e relacionar conhecimentos etnomatemáticos aplicados na produção do piso intertravado e os objetos do conhecimento matemático previstos na BNCC. Para tal, será mantido em mente a estrutura do piso intertravado (Figura 7).

Figura 7 - Piso Intertravado da Praça



Fonte: Foto tirada pelo autor

A próxima subseção se analisa os aspectos etnomatemáticos presentes na construção dos pisos intertravados.

3.1 ASPECTOS ETNOMATEMÁTICOS DO PISO INTERTRAVADO DA PRAÇA ALFREDO NUNES

No dia 10 de abril de 2023, no horário das 14:59 às 14:35, na praça Alfredo Nunes, em São Gonçalo do Piauí, foi realizada uma entrevista com o pedreiro responsável pelos demais na obra de reconstrução da praça. Nesta entrevista foi seguido um roteiro de perguntas previamente estabelecido, onde o pedreiro respondeu as perguntas.

Ao realizar a entrevista, foi percebido que os pedreiros chamam o Piso Intertravado de *Piso de Bloco*, induzindo-nos a concluir que este nome foi passado para eles em algum momento de suas vidas como o nome correto para este tipo de piso. Vale lembrar que *Piso*

Intertravado é um nome formal introduzido na engenharia e que pedreiros de obras com maior grau de responsabilidade usam.

Continuada a entrevista, outro nome diferente foi introduzido, ao que foi chamado de espinha de peixe, os pedreiros chamaram *Escama de peixe* (Figura 8). Como dito anteriormente, este nome pode ter sido repassado a eles de forma êmica, e este nome pode ser puramente visualizado por simples intuição, veja a imagem a seguir.

Figura 8 - Escama de Peixe



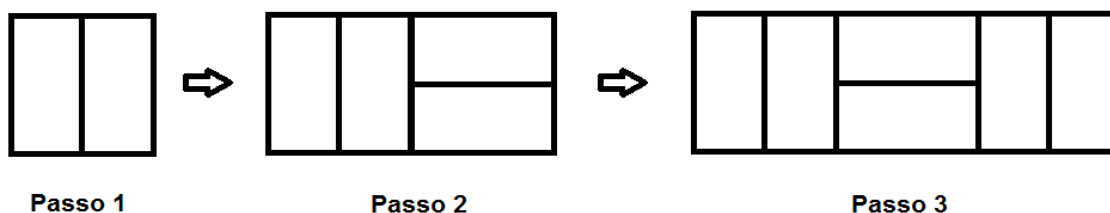
Fonte: Escama de peixe - VECTEEZY

Mesmo que haja pequenas diferenças, há também semelhanças na disposição das escamas em relação aos blocos do piso intertravado.

Um dos detalhes mais importantes desta entrevista foi sobre o projeto, que se mostrou em falta, pois os pedreiros alegaram que o dono do serviço ditou como seria feita a obra e passou as instruções para o pedreiro. Evidencia-se neste *sociofato*⁵, que a construção se baseou em conhecimentos êmicos.

Segundo o pedreiro, havia outras formas de se arranjar os bloquetes para formar padrões de colocação no piso, padrões que denominaram “de dois em dois” e “em linha reta”. O padrão “de dois em dois” é simples e foi demonstrado como é feito, primeiramente dois bloquetes são colocados e assentados lado a lado, formando uma unidade quadrada de 20 x 20 cm, em seguida é colocada, por conveniência à qualquer direção, outra unidade quadrada, onde os blocos estão rotacionados 90° em relação à primeira unidade, este processo segue até findar a construção, veja o passo a passo (Figura 9):

Figura 9 - Passo a passo da construção do padrão de dois em dois

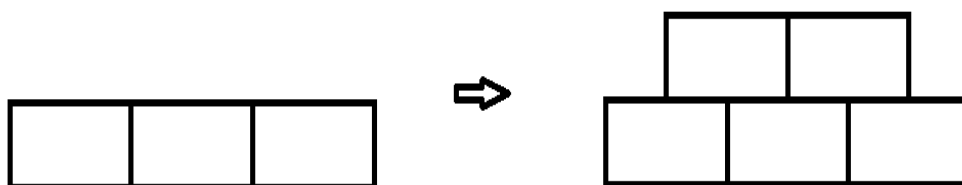


⁵ Sociofato “são as estruturas e organizações que influenciam o comportamento social e o desenvolvimento de saberes e fazeres científico e matemático”(ROSA; OREY, 2018, p. 88)

Fonte: Imagem feita pelo autor.

O outro padrão citado foi o “em linha reta” (Figura 10), que dispõe os bloquetes em fileiras de linhas retas em uma mesma direção, em seguida é colocada outra fileira de bloquetes “por cima”, onde cada bloquete dessa fileira estará sobre a junção entre dois bloquetes da fileira de baixo.

Figura 10 - Passo a passo da construção “em linha reta”



Fonte: Imagem feita pelo autor

Para construir o piso, os pedreiros utilizaram de materiais como *marreta*, *maquita e colher* (Figura 11), na fala sobre os tipos de padrões que podem ser construídos, também houve a menção da linha de nylon bastante utilizada em construções do tipo. Faz-se uma menção à trena, que também foi utilizada como instrumento de medição, porém não foi mencionada.

Figura 11 - Alguns dos Materiais Utilizados



Fonte: Foto tirada pelo Autor

Em questão sobre a metragem dos blocos, foi mencionado que cada metro quadrado equivale à disposição de 50 bloquetes, esta resposta veio naturalmente, por um senso comum entre os pedreiros. Este fato pode ser facilmente verificado, visto que cada bloquete possui $0,1\text{ m} \times 0,2\text{ m} = 0,02\text{ m}^2$ de área, 50 bloquetes tem, então, $50 \times 0,02\text{ m}^2 = 1\text{ m}^2$ de área.

Este saber pode ser evidenciado nas falas do pedreiro, quando ele diz que para construção do piso, é preciso “*só um pouco de capricho e a linha*”, e que estes aprenderam na prática. Este conhecimento é previsto no Art. 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional que diz que “A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na

vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais.”(BRASIL, 1996), onde pode-se concluir que é um tipo válido de educação, que foi passado pela prática no trabalho.

Esta educação é chamada de educação não formal, ou informal, e pode ser entendida como “qualquer tentativa educacional organizada e sistemática que, normalmente, se realiza fora dos quadros do sistema formal de ensino.”(BIANCONI; CARUSO, 2005, p. 20). Estes saberes e conhecimentos, que foram utilizados nos remetem ao programa etnomatemática pela valorização da situação e valores êmicos que foram utilizados para construção do piso.

Findada essa discussão, a seguir será feita uma análise matemática sobre os padrões e conhecimentos puramente matemáticos que estão presentes no piso intertravado.

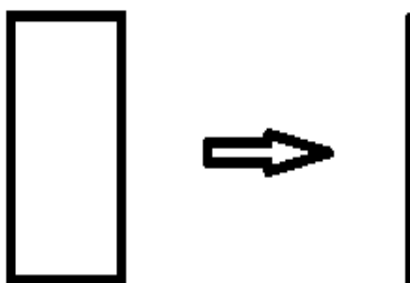
3.2 PADRÕES DOS PISOS INTERTRAVADOS DA PRAÇA

A estrutura do piso será analisada observando sua composição, assumindo os bloquetes como as unidades que compõem o padrão.

3.2.1 Padrões analisando os bloquetes como unidade

Em geral, como visto na seção 2.2, os bloquetes de tipo 1 apresentam dimensões de 20 cm de comprimento por 10 cm de largura, neste ponto ignora-se sua espessura, pois não irá comprometer os resultados de análise dos padrões. Assim, de início, para composição da figura, transforma-se cada bloquete de 10 x 20 cm em uma linha espessa que manterá seu comprimento original.

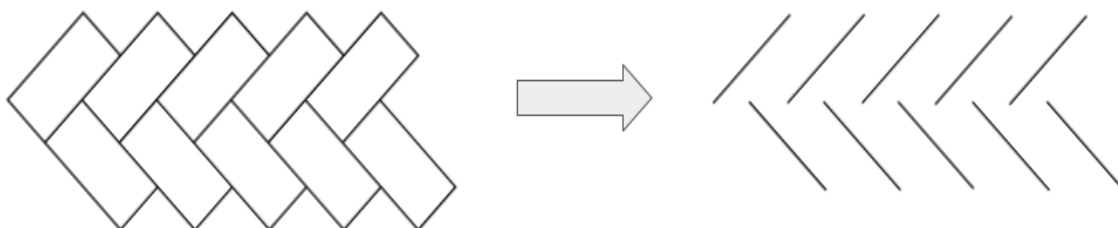
Figura 12 - Transformação do bloquete em um segmento de reta de mesmo comprimento



Fonte: Desenho criado pelo autor

Assumindo essa composição, pode-se construir o modelo do piso de uma maneira diferente, observe como seria o padrão de um amontoado de blocos intertravados quando cada bloco é substituído pelo segmento de reta conforme a Figura 12.

Figura 13 - Comparação do amontoado de blocos



Fonte: Desenho criado pelo autor

Nota-se na figura 13, algumas propriedades entre os segmentos de reta. Assumindo que o segmento de reta dista exatamente 5 cm de cada lateral, ou seja, justapondo o bloquete e o segmento, o bloco é dividido exatamente em duas partes iguais de 5 x 20 cm, é possível deduzir que cada segmento aponta para exatamente $\frac{3}{4}$ (três quartos) do outro segmento.

A seguir a figura um pouco mais completa, entenda-a como uma generalização do piso, pois a mesma tende a um tamanho infinito. Veja o tracejado vermelho (Figura 14).

Figura 14 - Tracejado na figura



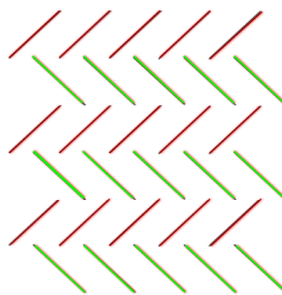
Fonte: Desenho criado pelo autor

Este tracejado pode ser entendido como a segmentação de um segmento de reta. Imagine que originalmente, este tracejado tinha tamanho p , então corta-se este segmento em pedaços iguais de tamanho l (note que na situação em questão, $l = 20$ cm) em que $l|p$, então a partir do primeiro segmento l_1 , retira-se o segmento adjacente e é mantido o próximo. Esta construção é mantida até ser construído o conjunto dos segmentos $l_1, l_2, \dots, l_n$, onde $n = \frac{p}{l}$ caso $\frac{p}{l}$ seja par, e $n = \frac{p}{l} + 1$, caso $\frac{p}{l}$ seja ímpar.

Chamando este conjunto de S , nota-se que a partir do conjunto criado, se tomarmos cada segmento $l_i \in S$, dividirmos em 3 segmentos iguais e retirarmos o segmento central, e repetirmos este processo infinitamente, teremos um fractal⁶.

Desta forma, a figura completa, do piso intertravado analisando o bloquete como unidade, é composta por um arranjo de conjuntos $S_1, S_2, \dots, S_n$, onde $l = 20$ cm e $20|p$. Onde existe uma certa quantidade de conjuntos S dispostos *paralelamente* e outra *perpendicularmente*, observe o desenho a seguir.

Figura 15 - Disposição dos conjuntos S .



Fonte: Desenho criado pelo autor

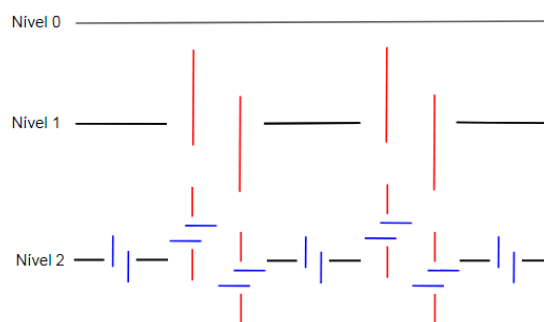
⁶ Se trata de uma versão estendida do fractal conjunto de Cantor

Dada a figura 15, observa-se a existência de 9 conjuntos em verde que são paralelos entre si, analogamente aos vermelhos. Comparando as cores vermelha e verde, temos que os conjuntos são perpendiculares entre si.

Entende-se que, cada conjunto S corresponde ao nível 1 do fractal, devemos perceber que, caso queiramos entender como essa construção funciona com os próximos níveis dos fractais, devemos construir mais conjuntos $S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, \dots, S_n^{(n)}$, correspondentes aos níveis 1, 2, ..., n respectivamente.

Esta construção se dá, construindo dois novos conjuntos “paralelos” entre si, que serão colocados perpendicularmente em relação ao conjunto inicialmente citado, nos segmentos que foram removidos na sua construção, observe a visualização da construção.

Figura 16 - Construção dos níveis fractais



Fonte: Desenho criado pelo autor

Como pode ser observado, a partir da segmentação no 1º nível, o espaço “vazio” entre segmentos l adjacentes do conjunto, foi preenchido com outros 2 segmentos l de mesmo tamanho destacados em vermelho, estes segmentos pertencem cada um a um conjunto que é perpendicular ao conjunto inicial. Novamente, para o nível 2, cada segmento l é segmentado conforme o padrão de construção mencionado anteriormente, e o espaço vazio é preenchido com 2 novos segmentos de tamanho $\frac{l}{3}$. Este processo pode ser repetido infinitamente.

Faz-se importante dizer que a figura completa com essa união dos conjuntos fractais, não são um novo fractal, pois esta situação encontra-se na teoria dos ladrilhos⁷. Mas cada conjunto S que forma a figura é um fractal. Sobre a teoria dos ladrilhos, é necessário entender que não é o foco principal deste trabalho, mas há uma forma de entendê-la observando como a trabalhar em sala de aula, para tal, veja a Quadro 1.

Quadro 1 - Objetos de conhecimento e geometria dos ladrilhos

Objeto de conhecimento	Interpretação
“Esboço de roteiros e de plantas simples.”(BRASIL, 2018, p. 282)	Esboços e plantas são essenciais para entender a estrutura do plano a ser preenchido, bem como a do polígono a ser usado para preenchê-lo.
“Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações,	Estudar as características das figuras geométricas espaciais/planas ajudam a

⁷ É importante destacar que “Ladrilhamento consiste em cobrir todas as partes de um plano com polígonos, de maneira que não sobrejam espaços vazios e nenhum polígono sobreponha o outro.”(SANTOS, 2014, p. 21).

planificações e características. ” e “Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos”(BRASIL,2018, p. 296).	encontrar a maneira de preencher o plano. Esse estudo também pode se estender a entender maneiras de preencher espaços, e pode ser integrado na topologia ⁸ .
“Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem.”(BRASIL, 2018, p.308).	Ao usar de transformações geométricas, é possível gerar polígonos congruentes, que podem ser usados para ladrilhar o plano. Tal ladrilhamento é chamado de Ladrilhamento Monoédrico.(ARAÚJO, 2019, p. 29).

Fonte: Brasil (2018).

Como foi observado, há uma possibilidade de estudo e entendimento dos aspectos e padrões do piso intertravado relacionados à teoria do ladrilhamento do plano, e a mesma pôde ser adaptada para estudo em sala de aula. Dado o exposto, resta-nos, analisar a relação da geometria fractal com os objetos de conhecimento da matemática da BNCC, como forma de terminar a discussão iniciada na seção 2.4.

3.3 A GEOMETRIA FRACTAL NA BNCC

Findada a discussão sobre os padrões do piso da praça, nos resta analisar como as habilidades, competências, objetos de conhecimento, áreas e subáreas da matemática na educação básica, mostram como a BNCC abrange a geometria fractal. Nesta subseção, será feita uma análise voltada para a geometria fractal em si, sem comprometimento com a possibilidade de aplicação no estudo dos padrões do piso intertravado da praça.

Segundo a própria BNCC (BRASIL, 2017, p.265) a matemática, ”estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório”, são esses fenômenos que estão dispostos na natureza ou fenômenos da humanidade, tais quais podem ser analisados de um ponto de vista fractal. Fato que está intimamente ligado à educação, pois:

(...) ao introduzirmos o estudo da Geometria Fractal na sala de aula, os alunos têm, por meio dele, a oportunidade e a capacidade de investigar tópicos da Matemática Tradicional por um novo ângulo, possibilitando aos alunos fazer conexões dentro da própria Matemática entre o mundo geométrico da Natureza e do Homem, explorando a Matemática por caminhos não-analíticos (MANDELBROT, 1977 apud CRUZ, 2018, p. 62).

Na BNCC entende-se como objetos de conhecimento “conteúdos, conceitos e processos”(BRASIL, 2018, p. 28) e como habilidades “as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares.”(BRASIL, 2018, p. 29)

Os conteúdos de matemática da educação básica, que podem ser trabalhados com o estudo dos fractais, são, segundo Cruz (2018, p. 90):

Auto semelhança, Forma, Rugosidade e Dimensão, Polígonos e sólidos geométricos, Ângulos internos e externos, Áreas, volumes e perímetros, Trigonometria, Números complexos, Funções (afins, quadráticas, trigonométricas), Transformações Geométricas (translação, rotação, simetria, homotetias), Semelhança de Figuras (razão de semelhança, ampliação, redução, razão entre áreas e volumes de figuras semelhantes), Sucessões (termos, termo geral e generalização, limite, sucessão limitada, infinitésimo, infinitamente grande, noção de infinito), Operações com conjuntos e Iteração de funções.

⁸ Ramo da matemática que estuda os espaços topológicos, sendo considerado como uma extensão da geometria.

A BNCC possui em seu texto 100 objetos de conhecimento abrangendo o ensino fundamental menor e 88 no ensino fundamental maior, no ensino médio o correspondente a 5 competências específicas. Há vários objetos de conhecimento que de certa forma podem auxiliar no ensino-aprendizagem da geometria fractal, que condizem com certas características ou são conhecimentos necessários para interpretá-los.

As habilidades da BNCC, por sua vez, estão distribuídas em 126 habilidades no ensino fundamental menor e 121 no ensino fundamental maior, totalizando 247 habilidades no ensino fundamental, juntamente com 43 habilidades do ensino médio. Destas habilidades, ambas EF06MA21 e EM13MAT105 (citadas anteriormente na seção 2.4), estão relacionadas com conceitos de fractais, sendo EF06MA21 relacionada com autossimilaridade em situações de ampliação e redução, que é característica dos fractais, e a EM13MAT105 que usa de transformações homotéticas para analisar situações da natureza e humanidade, que também é uma característica dos fractais.

Cita-se, de passagem, a competência específica 1:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.(BRASIL, 2018. p. 532)

Esta competência mostra claramente a intenção de usar meios matemáticos para interpretar situações e fatos na natureza e humanidade, o que inclui fenômenos que podem ser respondidos usando a geometria fractal.

No quadro 2 mostra uma síntese de como aplicar e entender certos objetos de conhecimento e sua respectiva habilidade na sala de aula.

Quadro 2 - Objetos de conhecimento, habilidades e os fractais

Objeto de conhecimento	Habilidade	Aplicação
“Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes.” (BRASIL, 2018, p. 296)	(EF05MA18) - “Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.” (BRASIL, 2018, p. 296)	Mostrar em sala de aula, podendo utilizar de recursos digitais como o geogebra, que figuras geométricas mantém ângulos em congruência em situações de ampliação e redução.
“Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.” (BRASIL, 2018, p. 302)	(EF06MA21) - “Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.”(BRASIL, 2018, p. 302)	Em consonância com o item anterior, esta habilidade pode ser desenvolvida na prática, podendo se usar recursos digitais para construir as figuras com os alunos, iniciando com ângulos simples e depois mais complexos.

“Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica.” (BRASIL, 2018, p. 306)	(EF07MA16) - “Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.”(BRASIL, 2018, p. 306)	Esta habilidade pode ser trabalhada, primeiramente ao introduzir expressões que tenham uma regularidade, e incentivando o aluno a encontrar esses padrões. Podem ser incluídos padrões fractais simples.
--	--	--

Fonte: Brasil (2018).

Há, além das citadas acima, outros objetos de conhecimento e habilidades que possam ser utilizados como ferramentas no ensino da geometria fractal em sala de aula. E com uma melhor compreensão do aluno, identidades como a praça citada neste artigo, podem ser analisadas de uma maneira melhor.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Findada a análise, podemos fazer considerações sobre as descobertas referentes ao piso da praça. Pode-se citar na BNCC que “A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico” (BRASIL, 2018, p. 265), fazendo assim, o piso da praça ser um possível objeto de estudo e análise matemática.

De acordo com as análises feitas, foi possível descobrir que dependendo da forma como é feito o estudo e da disposição dos blocos da praça, é possível observar padrões fractais, embora o próprio piso não seja de fato um fractal. Vale lembrar, que fractais são entes geométricos com característica de autossimilaridade que tende ao infinito, ou seja, “fractal será a figura limite do seu processo gerador e não qualquer um dos passos finitos presentes nesse mesmo processo”(CRUZ, 2018, p. 63).

Ao observar o piso intertravado, é possível notar a similaridade com a curva de Peano, e que ao tomar a curva e retirar certos segmentos, é possível formar o piso intertravado, porém, este estudo é alvo de outra pesquisa que não cabe a esta.

Como descrito na pesquisa, o piso intertravado está contido em uma área chamada Teoria dos ladrilhos, que se referem a maneiras de ladrilhar o plano. Esta teoria bate perfeitamente com as técnicas necessárias para estudo do piso intertravado, pois este piso é formado por blocos(polígonos), que preenchem um piso(plano), esta base de pesquisa pode ser mais bem trabalhada em outro estudo.

Por fim, foi possível observar que há como trabalhar com os fractais em sala de aula, mesmo não havendo citações diretas a esta geometria. Pôde-se encontrar habilidades e competências, que de alguma forma se relacionam com este objeto de conhecimento.

A geometria fractal é um dos muitos objetos de conhecimento matemático que raramente são incluídos em sala de aula, mas que contém relação próxima com o mundo e a sua ordem, pôde-se verificar neste trabalho, que a etnomatemática delineia um caminho para o ensino da geometria fractal, explicando sua relação com objetos culturais e seus conhecimentos êmicos.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Elton Cezar Vasconcelos de et al. **Aplicações geométricas utilizando ladrilhamento**. 2019. Disponível em: <http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/xmlui/handle/riufcg/12415>>. Acesso em: 03 set. 2023.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9781** Peças de concreto para pavimentação. Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <<http://salvadorpremoldados.com.br/wp-content/uploads/2016/04/NORMA-ABNT-NBR-9781-PISOS.pdf>>. Acesso em: 12 jun. 2023.

BARBOSA, Paulo Cesar Faccini. **Geometria fractal numa abordagem etnomatemática**. 2009. p.1 - 50. Monografia de Graduação - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5793830/mod_folder/content/0/Complementar%20-%20Geometria%20Fractal%20Etnomatem%C3%A1tica.pdf?>>. Acesso em 04 mar. 2023.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a Geometria Fractal: para a sala de aula**. Autêntica, 2005.

BIANCONI, M. Lucia; CARUSO, Francisco. Educação não-formal. **Ciência e cultura**, v. 57, n. 4, p. 20-20, 2005. Disponível em: <http://cienciaecultura.bvs.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0009-6725200500040013&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 23 ago. 2023.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, LDB. 9394/1996. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm>. Acesso em: 27 jun. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CRUZ, Rita de Cássia Morasco da. **Geometria Fractal: conjunto de Cantor, dimensão e medida de Hausdorff e aplicações**. 2018. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-04012019-151235/publico/RitadeCassiaMorascodaCruz_revisada.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2023.

FERNANDES, I. **Blocos e pavers produção e controle de qualidade**. São Paulo, 2013.

LOURENÇO, Mirelle Mara B. S., SILVA, Hirley Dayan L. da, QUEIROZ, Luiz Carlos de. **A aplicação de fractais no processo de ensino-aprendizagem de matemática**. 2004. p.31-34. Disponível em: <https://www.inicepg.univap.br/cd/INIC_2004/trabalhos/inic/pdf/IC1-11.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2023.

MANDELBROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**. [S.l.]: W.H. Freeman and Company, New York, 1977. Disponível em: <https://users.math.yale.edu/~bbm3/web_pdfs/encyclopediaBritannica.pdf>. Acesso em: 21 abr. 2023.

NASCIMENTO, Maria Victória Leal de Almeida. **Estudo de blocos intertravados de concreto para pavimentação de resíduo do polimento do porcelanato**. 2016. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/17151>>. Acesso em: 26 mar. 2023

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. Geometria Fractal e aplicações. **Departamento de Matemática Pura–Faculdade de Ciências da Universidade do Porto**, 2006. Disponível em:<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/matematica_artigos/dissertacao_nunes.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2023

PORTLAND, Associação Brasileira de Cimento. **Manual de Pavimento Intertravado: Passeio Público**, 2010. p.1-36. Associação Brasileira de Cimento Portland – ABCP, São Paulo. Disponível em:<<https://solucoesparacidades.com.br/wp-content/uploads/2012/08/ManualPavimentoIntertravado.pdf>>. Acesso: em 27 mar. 2023.

RINALDI, Ricardo Mendonça; DOS SANTOS MENEZES, Marizilda. Geometria Fractal: uma nova proposta para o ensino do desenho geométrico. In: **Anais do Graphica: VII International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design**, Curitiba. 2007. Disponível em:<http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/artigos_graphica/GEOMETRIAFRACTAL.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2023.

ROSA, Milton; OREY, Daniel C. **Abordagens atuais do programa etnomatemática: delineando um caminho para a ação pedagógica**. Boletim de Educação Matemática, v. 19, n. 26, p. 1-26, 2006. Disponível em:<<https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221866003.pdf>>. Acesso em: 28 jul. 2023.

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. O campo de pesquisa em etnomodelagem: as abordagensêmica, ética e dialética. **Educação e Pesquisa**, v. 38, n. 04, p. 865-879, 2012. Disponível em:<<http://educa.fcc.org.br/pdf/ep/v38n04/v38n04a06.pdf>>. Acesso em: 27 jun. 2023.

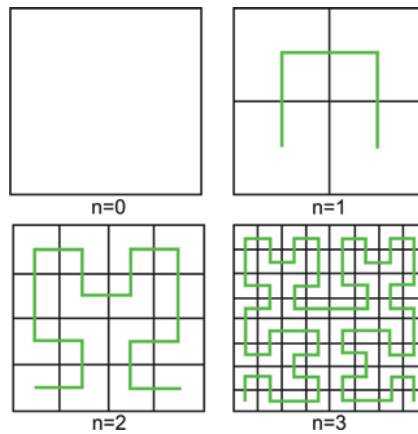
ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. Propondo um currículo trivium fundamentado nas perspectivas da etnomatemática e da modelagem. **Revista Educação Matemática em Foco**, v. 7, n. 2, p. 63-98, 2018. Disponível em:<<http://revista.uepb.edu.br/index.php/REVEDMAT/article/view/4116>>. Acesso em: 19 jul. 2023.

SANTOS, Lázaro Souza. **Ladrilhamento no Plano: Uma Proposta de Atividade para o Ensino Médio**. 2014. Disponível em:<http://www2.uesb.br/ppg/profmat/wp-content/uploads/2018/11/Dissertacao_LAZARO_SANTOS.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2023.

ANEXOS

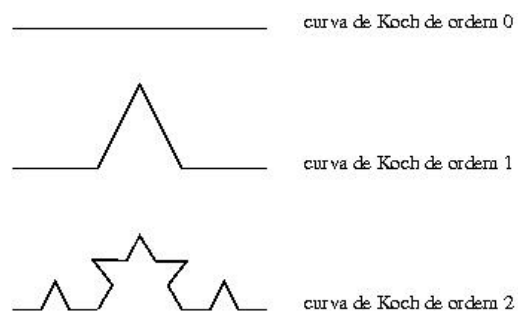
ANEXO 1 - Este apêndice contém as imagens dos níveis da Curva de Hilbert, Curva e ilha de Koch e Curva de Sierpinski.

Imagem 1 - Níveis 0, 1, 2 e 3 da Curva de Hilbert



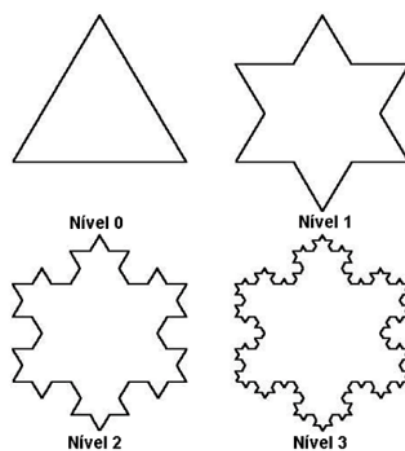
Fonte: Natalia Alves Bezerra - researchgate.net

Imagem 2 - Níveis 0, 1 e 2 da curva de koch



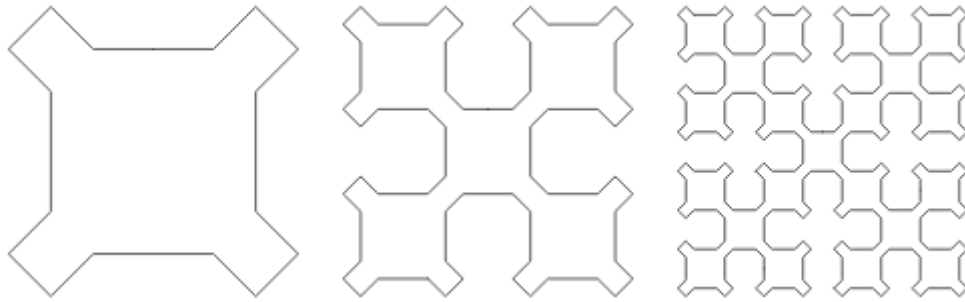
Fonte: USP - IME

Imagem 3 - Níveis 0, 1, 2 e 3 da ilha de koch



Fonte: SciELO Brasil, 2008.

Imagem 4 - Níveis 1, 2 e 3 da Curva de Sierpinski



Fonte: Sierpiński Curve - Wolfram Mathworld.

APÊNDICES

APÊNDICE A - ENTREVISTA REALIZADA COM O PEDREIRO RESPONSÁVEL. - DIA 10 DE ABRIL DE 14:29 ÀS 14:35 DA TARDE, NA PRÓPRIA PRAÇA ALFREDO NUNES.

Conversa informal.

Qual o nome deste tipo de piso que está sendo construído na praça?

~Piso de Bloco

Por que foi escolhido colocar os bloquetes desta maneira?

~Esse jeito aqui se chama escama de peixe

Mas isso foi por causa do projeto ou vocês que decidiram colocar assim?

~É no projeto e no... Não, mas... só que na verdade aqui foi escolha deles né, porque isso aqui na verdade... é... o projeto nem existe não disso aqui, entendeu? Aqui fica a critério do dono do serviço.

Que ferramentas ou instrumentos são utilizados na construção deste tipo de piso?

~Marreta, maquina e colher.

Como é calculada a quantidade de bloquetes necessários para uma determinada área de piso?

~É 50 blocos um metro.

Que outros tipos de desenhos podem ser feitos com este tipo de técnica para produção de piso?

~Pode botar de dois em dois ou fazendo uma linha também

Como e com quem os pedreiros aprenderam a construir o piso intertravado?

~Na verdade, aqui não exige tanta experiência para colocar o bloco, pra assentar. Aqui é só um pouco de capricho e a linha né.

Mas tipo assim... alguém como os pais passaram para vocês aprenderem ou na prática mesmo?

~Foi na prática mesmo.

APÊNDICE B - QUANTIDADE DE HABILIDADES EM CADA ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

Quadro 1 - Ensino Fundamental Menor

ANO	HABILIDADES
1º	22
2º	23
3º	28
4º	28
5º	25

Fonte: Autor.

Quadro 1 - Ensino Fundamental Maior

ANO	HABILIDADES
6º	34
7º	37
8º	27
9º	23

Fonte: Autor.