



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS- GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
INSTITUIÇÃO ASSOCIADA: IFPI – CAMPUS FLORIANO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL MEDIADO PELA MODELAGEM
MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM COM BASE EM QUESTÕES DO ENEM**

ANTONIO MARCOS DE LIMA MIRANDA

Orientador: Prof(a). Dr(a). André Luiz Ferreira de Carvalho Melo

Coorientador: Prof(a). Dr(a). Ezequias Matos Esteves

FLORIANO
2026

ANTONIO MARCOS DE LIMA MIRANDA

**O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL MEDIADO PELA MODELAGEM
MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM COM BASE EM QUESTÕES DO ENEM**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal do Piauí/ *Campus* Floriano, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Ferreira de Carvalho Melo

Coorientador: Prof. Dr. Ezequias Matos Esteves

FLORIANO
2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Miranda, Antonio Marcos de Lima

M672e O Ensino de Geometria Espacial Mediado pela Modelagem Matemática :
Uma Abordagem com Base em Questões do ENEM / Antonio Marcos de Lima
Miranda. - 2026.
179 f.: il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Floriano, 2026.

Orientador : Prof Dr. André Luiz Ferreira de Carvalho Melo.

Coorientador : Prof Dr. Ezequias Matos Esteves.

1. Geometria Espacial. 2. ENEM. 3. Modelagem Matemática. 4. Ensino
Médio. I. Título.

CDD - 510

Elaborado por Aurilene Araujo da Costa CRB 3/1272

ANTONIO MARCOS DE LIMA MIRANDA

**O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL MEDIADO PELA MODELAGEM
MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM COM BASE EM QUESTÕES DO ENEM**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal do Piauí/*Campus* Floriano, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 26/06/2026

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. André Luiz Ferreira de Carvalho Melo
Instituto Federal do Piauí – IFPI
Orientador

Prof. Dr. Ezequias Matos Esteves
Instituto Federal do Piauí – IFPI
Coorientador

Prof. Dr. Egnilson Miranda de Moura
Universidade Federal do Piauí – UFPI
Avaliador Interno

Prof. Dr. Marcelo Teixeira Carneiro
Instituto Federal do Piauí – IFPI
Avaliador Externo

Prof. Dr. Salvino Coimbra Filho
Instituto Federal do Maranhão – IFMA
Avaliador Externo

Dedico este trabalho a Deus e à minha família, em especial à minha esposa e filha, pelo apoio, incentivo e compreensão ao longo de toda a trajetória acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por conceder luz, força, determinação e sabedoria ao longo de toda a minha trajetória no curso de mestrado. Em cada desafio enfrentado, senti-me fortalecido para perseverar, mantendo a confiança necessária para não desistir e seguir na construção deste sonho acadêmico e profissional.

Agradeço, de forma especial, à minha família, que sempre esteve ao meu lado oferecendo apoio, compreensão e incentivo. À minha esposa, Jamile Sousa, pelo companheirismo, zelo e dedicação, por caminhar comigo em todos os momentos, enfrentando os desafios com honra, perseverança e confiança. À minha filha, Geovana Sousa, fonte constante de fé, carinho e motivação, sendo uma das maiores razões para toda essa trajetória de esforço e superação. À minha mãe, Gorete Lima, pelo apoio incondicional e pela presença constante ao longo dessa caminhada.

Registro também minha gratidão aos colegas de trabalho da área da educação, pela compreensão, incentivo e apoio demonstrados durante esse período de formação, reconhecendo a importância dessa conquista para o fortalecimento da prática docente. Agradeço, igualmente, aos colegas de curso do PROFMAT, pelo companheirismo desde o início da jornada, pelo compartilhamento de ideias, pelas trocas de experiências, pelo acolhimento, incentivo mútuo e pela parceria nos estudos e deslocamentos, que tornaram o percurso mais leve e enriquecedor.

Aos meus alunos, expresso minha sincera gratidão, pelo incentivo constante durante meus estudos, pela compreensão da importância dessa formação para minha atuação profissional e pela colaboração nas atividades acadêmicas, que contribuíram significativamente para o aprimoramento da minha postura docente.

Por fim, manifesto meu agradecimento especial aos professores que contribuíram para a minha formação acadêmica e profissional: Dr. Guilherme Luiz, Dr. Roberto Arruda, Dr. Ezequias Esteves, Dr. Rui Marques, Me. Gildon César, Me. Fábio Luz, e, em particular, ao meu orientador, Dr. André Luiz, pelo apoio, incentivo, ensinamentos, disponibilidade e compromisso com a formação acadêmica. Suas experiências, orientações e contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa e para a consolidação da minha trajetória no mestrado.

“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender,
não a posse, mas o ato de chegar lá, que concede
o maior prazer.” (Carl Friedrich Gauss)

RESUMO

Esta dissertação investiga as contribuições da Modelagem Matemática para o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio, a partir de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O estudo fundamenta-se na perspectiva de que a Geometria constitui uma linguagem essencial para a compreensão do espaço e que seu ensino, frequentemente marcado pelo formalismo e pela descontextualização, tem gerado dificuldades significativas no desenvolvimento do raciocínio espacial dos estudantes. Metodologicamente, a pesquisa caracteriza-se como de natureza aplicada, com abordagem quali-quantitativa e caráter interventivo, sendo desenvolvida em uma turma da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública. A intervenção consistiu na elaboração e aplicação de uma sequência didática baseada em atividades de Modelagem Matemática estruturadas a partir de questões do ENEM. A coleta de dados envolveu questionários diagnósticos, testes de desempenho (pré-teste e pós-teste), observações em sala de aula, registros em diário de campo e relatos dos estudantes. Os dados quantitativos permitiram a comparação do desempenho discente antes e após a intervenção pedagógica, enquanto os dados qualitativos possibilitaram a análise das percepções, estratégias e dificuldades manifestadas ao longo do processo de ensino e aprendizagem. Os resultados indicam que a abordagem por meio da Modelagem Matemática favoreceu a compreensão conceitual de conteúdos de Geometria Espacial, ampliou a capacidade de interpretação e resolução de problemas contextualizados e contribuiu para o desenvolvimento das competências e habilidades requeridas pelo ENEM. Conclui-se que a Modelagem Matemática constitui uma estratégia didático-pedagógica relevante para a ressignificação do ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio.

Palavras-chave: Geometria Espacial; Modelagem Matemática; ENEM; Ensino Médio; Educação Matemática.

ABSTRACT

This dissertation investigates the contributions of Mathematical Modeling to the teaching and learning of Spatial Geometry in High School, based on questions from the Brazilian National High School Examination (ENEM). The study is grounded on the perspective that Geometry constitutes an essential language for understanding space and that its teaching, often characterized by formalism and lack of contextualization, has led to significant difficulties in the development of students' spatial reasoning. Methodologically, the research is classified as applied in nature, with a qualitative-quantitative approach and an interventionist character, conducted with a third-year High School class from a public school. The pedagogical intervention consisted of the design and implementation of a didactic sequence based on Mathematical Modeling activities structured around ENEM questions. Data collection involved diagnostic questionnaires, performance tests (pre-test and post-test), classroom observations, field notes, and students' reports. Quantitative data enabled the comparison of students' performance before and after the intervention, while qualitative data allowed for the analysis of perceptions, strategies, and difficulties manifested throughout the teaching and learning process. The results indicate that the Mathematical Modeling approach promoted conceptual understanding of Spatial Geometry topics, enhanced students' ability to interpret and solve contextualized problems, and contributed to the development of competencies and skills required by the ENEM. It is concluded that Mathematical Modeling represents a relevant didactic-pedagogical strategy for re-signifying the teaching of Spatial Geometry in High School.

Keywords: Spatial Geometry; Mathematical Modeling; ENEM; High School; Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1– Fases da Modelagem Matemática	27
Figura 2 – Fases da Modelagem Matemática e ações cognitivas dos alunos	27
Figura 3 – Exemplo de item do ENEM envolvendo Geometria Espacial	34
Figura 4 – Aplicação do pré-teste diagnóstico em Geometria Espacial	44
Figura 5 – Registros escritos dos estudantes sobre o nível de confiança e as dificuldades iniciais em Geometria Espacial (pré-teste)	57
Figura 6 - Questão 136 (ENEM 2016 – Caderno Azul)	63
Figura 7 – Construção do modelo físico do silo de grãos construído em escala reduzida	65
Figura 8 – Validação experimental do modelo do silo por meio da pesagem do arroz	66
Figura 9 - Questão 164 (ENEM 2020 – Caderno cinza)	69
Figura 10 – Construção do modelo físico do recipiente com esferas utilizado na validação experimental	70
Figura 11 - Questão 148 (ENEM 2022 – Caderno Amarelo)	74
Figura 12 – Construção dos protótipos dos cones utilizados na validação experimental com sorvete	76
Figura 13 – Validação experimental do modelo matemático do cone	77
Figura 14 - Questão 175 (ENEM 2024 – Caderno Azul)	80
Figura 15 – Construção dos modelos físicos dos cilindros a partir de superfícies laterais idênticas	82
Figura 16 – Socialização dos resultados da sequência didática pelos representantes de cada grupo de alunos	85
Figura 17 – Registros escritos dos estudantes sobre a contribuição da Modelagem Matemática para a superação de dificuldades em Geometria Espacial	91

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Distribuição do nível de confiança dos estudantes na resolução de problemas de Geometria Espacial	56
Gráfico 2 – Comparação entre os resultados do modelo matemático e do modelo físico do silo de grãos.....	68
Gráfico 3 – Comparação entre o nível de água previsto pelo modelo matemático e o observado no modelo físico	72
Gráfico 4 – Relação entre o raio da base do cone, o volume teórico e a massa experimental .	79
Gráfico 5 – Comparação dos níveis de desempenho em habilidades de Geometria Espacial no pré-teste e no pós-teste.....	89
Gráfico 6 – Evolução do Nível de Confiança: Pré-teste vs Pós-teste.....	91

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Habilidades da Matriz de Referência do ENEM relacionadas à Geometria Espacial	33
Quadro 2 - Distribuição etária dos estudantes participantes.....	40
Quadro 3 – Cronograma de execução da intervenção pedagógica.....	45
Quadro 4 – Organização dos Grupos de Trabalho na Sequência Didática.....	46
Quadro 5 – Categorização dos artigos selecionados na revisão integrativa	47
Quadro 6 – Síntese das Produções dos Grupos na Sequência Didática.....	61
Quadro 7 – Comparativo entre o Modelo Matemático (Teórico) e o Modelo Físico (Experimental)	78
Quadro 8 - Modelo Teórico vs. Experimento Físico (Grupo 4)	83
Quadro 9 - Síntese da Validação dos Modelos Físicos e Matemáticos	84
Quadro 10 – Desempenho Comparativo por Habilidades do ENEM.....	87
Quadro 11 - Nível de Confiança dos Estudantes Após a Intervenção	90

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Desempenho dos alunos no Exercício 01 do Pré-Teste	52
Tabela 2 – Desempenho Estatístico Consolidado (Exercícios 02 ao 05)	53
Tabela 3 – Desempenho e Matriz de Competências ENEM (Exercícios 06 a 10)	55
Tabela 4 – Recursos didáticos considerados mais úteis em Geometria Espacial	59
Tabela 5 – Principais desafios enfrentados pelos alunos na resolução de questões de Geometria Espacial do ENEM.....	60
Tabela 6 - – Comparação do Desempenho Médio no Pré e Pós-Teste.....	88
Tabela 7 – Evolução das Habilidades em Geometria Espacial.....	89

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

EM13MAT301 – Ensino Médio, 1º ao 3º ano, Matemática, Competência Específica 3, Habilidade número 1. (Habilidade BNCC)

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

Ex1 – Exercício 1

Ex2 – Exercício 2

Ex3 – Exercício 3

Ex4 – Exercício 4

Ex5 – Exercício 5

Ex6 – Exercício 6

Ex7 – Exercício 7

Ex8 – Exercício 8

Ex9 – Exercício 9

Ex10 – Exercício 10

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

TRI – Teoria de Resposta ao Item

LISTA DE SÍMBOLOS

cm – centímetro

cm³ – centímetro cúbico

g – grama

% – porcentagem

π – constante pi

r – raio da base

h – altura

V – volume

M – massa

C – comprimento da circunferência

K – capacidade do caminhão

A_b – área da base

Δ_h – variação da altura da coluna da água

n – número de bolinhas

θ – ângulo

— – traço indicativo de ausência de valor ou não aplicável

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	17
2 REFERENCIAL TEÓRICO	21
2.1 O ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL: DESAFIOS E PERSPECTIVAS.....	21
2.2 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	24
2.2.1 Concepções Teóricas de Modelagem Matemática	28
2.2.2 A Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino para o ENEM.....	31
2.3 O ENEM E A MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA	32
2.3.1 Competências do ENEM e Habilidades Relacionadas à Geometria Espacial	33
2.3.2 Análise de Itens de Geometria em Edições Anteriores do ENEM	34
3 PERCURSO METODOLÓGICO.....	38
3.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA (NATUREZA APLICADA/QUALI- QUANTITATIVA).....	38
3.2 A CONSTRUÇÃO DO ESTADO DA ARTE.....	39
3.3 LOCUS DA PESQUISA E OS SUJEITOS (PERFIL DA TURMA DE 3ª SÉRIE)	40
3.4 INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS	41
3.5 DESCRIÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL: SEQUÊNCIA DIDÁTICA	41
3.6 PROCEDIMENTO DE ANÁLISE DE DADOS	42
3.7 ORGANIZAÇÃO DAS ETAPAS DE EXECUÇÃO DA INTERVENÇÃO.....	44
4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	47
4.1 COMPREENDENDO O ESTADO DA ARTE DA INVESTIGAÇÃO	47
4.2 DIAGNÓSTICO INICIAL: ANÁLISE DO PRÉ-TESTE	50
4.2.1 Análise do Questionário Diagnóstico de Geometria Espacial.....	51
4.2.2 Análise dos Resultados do Pré-teste: Percepções e Dificuldades em Geometria Espacial.....	56
4.3 VIVÊNCIA DA MODELAGEM: RELATO DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	61
4.3.1 Discussões iniciais para Procedimentos Didáticos	62
4.3.2 Grupo 1 – Modelo Matemático: O Problema do Silo de Grãos	63
4.3.2.1 Experimentação e Validação: O Modelo Físico e a Proporcionalidade.....	65
4.3.3 Grupo 2 - O Modelo de Imersão e o Problema do Empacotamento	68
4.3.3.1 Experimentação e Validação: O Modelo Físico e a Divergência Experimental	70
4.3.4 Grupo 3 – Modelagem da Redução de Volume em Cones	73

4.3.4.1	Experimentação e Validação: O Modelo Físico e a Validação Experimental.....	75
4.3.5	Grupo 4 - A Razão de Proporcionalidade em Cilindros de Mesma Área Lateral...	80
4.3.5.1	Construção do Modelo Físico e Validação Experimental	82
4.3.6	Análise integrada dos resultados da sequência didática	84
4.3.7	Socialização e Compartilhamento de Resultados	85
4.4	AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM: ANÁLISE COMPARATIVA (PRÉ-TESTE VS. PÓS-TESTE)	86
4.5	PERCEPÇÃO DOS ESTUDANTES SOBRE A METODOLOGIA	90
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	94
5.1	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	95
	REFERÊNCIAS.....	97
	APÊNDICE 1 – PRÉ-TESTE DIAGNÓSTICO.....	102
	APÊNDICE 2 – PÓS-TESTE DE AVALIAÇÃO	113
	ANEXO 1 – PRODUTO EDUCACIONAL.....	119

1 INTRODUÇÃO

A Geometria constitui, essencialmente, a linguagem por meio da qual o ser humano descreve, interpreta e organiza o espaço que ocupa. Entretanto, no contexto da educação básica brasileira, observa-se um paradoxo recorrente: embora a realidade seja predominantemente tridimensional, o ensino de Geometria, em especial da Geometria Espacial, permanece, em muitos casos, restrito ao plano do papel, à representação bidimensional e ao formalismo de fórmulas apresentadas de forma descontextualizada. Conforme assinala Lorenzato (1995), ao longo do tempo a Geometria foi sendo progressivamente relegada a um segundo plano nos currículos escolares, o que contribuiu para a formação de lacunas significativas no desenvolvimento do raciocínio espacial dos estudantes.

Esse cenário revela-se ainda mais crítico quando confrontado com as exigências contemporâneas impostas pelas avaliações externas em larga escala, especialmente pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A matriz de referência do exame atribui papel central à capacidade de interpretar fenômenos espaciais, modelar situações-problema e mobilizar conhecimentos matemáticos de forma integrada, particularmente no âmbito das Competências de Áreas 2 e 3. Assim, a Geometria Espacial deixa de ser apenas um conjunto de conteúdos formais e passa a assumir a função de ferramenta conceitual indispensável à leitura crítica da realidade e à tomada de decisões fundamentadas.

O ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio, contudo, tem se configurado historicamente como um dos campos mais desafiadores da Matemática escolar, em razão do elevado nível de abstração exigido para a compreensão de objetos tridimensionais, das dificuldades associadas à visualização espacial e da frequente dissociação entre conceitos matemáticos e situações concretas. Tais limitações de compreensão manifestam-se tanto nas práticas pedagógicas cotidianas quanto no desempenho dos estudantes em avaliações como o ENEM, nas quais se exige não apenas o domínio de procedimentos, mas também a compreensão conceitual, a interpretação de contextos e a articulação entre diferentes áreas do conhecimento matemático.

Diante desse panorama, torna-se necessário repensar práticas pedagógicas tradicionalmente centradas na transmissão de conteúdos e na aplicação mecânica de algoritmos, buscando metodologias que favoreçam a construção de significados e a aproximação entre teoria e prática. Nesse sentido, a Modelagem Matemática apresenta-se como uma abordagem didático-pedagógica promissora, ao possibilitar a investigação de situações-problema oriundas da realidade dos discentes e a construção de modelos matemáticos para compreendê-las e

solucioná-las. Conforme destaca Burak (1992), o ensino por meio da modelagem contribui para que os conteúdos matemáticos sejam estudados em contextos significativos, favorecendo a atribuição de sentido aos conceitos abordados.

A adoção de metodologias contextualizadas e investigativas encontra respaldo nas transformações pelas quais a própria Matemática e o seu ensino vêm passando. Como observa D'Ambrosio (2009), os meios de observação, coleta e processamento de dados — elementos centrais na produção do conhecimento matemático — sofreram profundas mudanças, o que implica uma ressignificação do rigor científico, sem a perda de sua consistência. Nessa perspectiva, o ensino de Matemática, e particularmente da Geometria, deve acompanhar tais transformações, incorporando práticas que valorizem a investigação, a interpretação e a aplicação do conhecimento em situações reais. Ademais, ao conceber a educação como uma estratégia social voltada ao desenvolvimento pleno dos indivíduos e à promoção do bem comum, D'Ambrosio (2009) reforça a responsabilidade dos educadores em potencializar práticas pedagógicas que favoreçam a autonomia intelectual e a colaboração.

As orientações presentes nos documentos oficiais que regem a Educação Básica brasileira reforçam essa necessidade. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a importância de contextualizar os conteúdos curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los e conectá-los de modo a torná-los significativos, considerando a realidade do tempo e do espaço em que as aprendizagens se situam (BRASIL, 2018). No âmbito da Matemática, tais orientações convergem para a valorização de práticas que promovam a resolução de problemas, a investigação e a aplicação de conhecimentos em contextos socialmente relevantes, em consonância com as demandas do ENEM.

No que se refere às experiências relatadas na literatura brasileira sobre Modelagem Matemática, observa-se que sua integração às atividades escolares ocorre em diferentes circunstâncias, seja no interior das aulas regulares de Matemática, em espaços e tempos extraclasse ou por meio da articulação entre essas duas modalidades. De modo geral, esses estudos indicam que a Modelagem Matemática pode ser incorporada de forma flexível ao contexto escolar, ampliando as possibilidades de abordagem dos conteúdos e favorecendo a participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem (Almeida; Silva; Vertuan, 2016).

Apesar das orientações curriculares e das contribuições apontadas pela literatura, muitos alunos concluem o Ensino Médio apresentando fragilidades significativas na compreensão de conceitos de Geometria Espacial, especialmente no que se refere às relações entre áreas e volumes, à proporcionalidade e à interpretação de representações bidimensionais de objetos

tridimensionais. Diante desse contexto, coloca-se como problema de pesquisa a seguinte questão: de que maneira a utilização da Modelagem Matemática, articulada a questões do ENEM, pode contribuir para o ensino e a aprendizagem de nesse campo da Geometria no Ensino Médio, auxiliando na superação dessas dificuldades e no desenvolvimento das competências e habilidades requeridas pelo exame?

Assim, este estudo tem como objetivo geral investigar as contribuições da Modelagem Matemática no ensino de Geometria Espacial, a partir de questões do ENEM, por meio da elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática contextualizada em uma turma do Ensino Médio. Como objetivos específicos, busca-se: analisar os conhecimentos prévios e as principais dificuldades dos estudantes na resolução de problemas de Geometria Espacial; aplicar atividades de Modelagem Matemática fundamentadas em questões do ENEM, observando suas implicações na compreensão conceitual dos estudantes; desenvolver um produto educacional na forma de uma sequência didática voltada ao ensino de Geometria Espacial; e comparar o desempenho dos estudantes antes e após a intervenção pedagógica, a fim de identificar possíveis contribuições da abordagem proposta para o processo de aprendizagem.

No que se refere aos procedimentos metodológicos, a pesquisa caracteriza-se como de natureza aplicada, com abordagem quali-quantitativa e caráter interventivo, sendo desenvolvida em uma turma da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública. A investigação tem como eixo central a implementação de uma sequência didática baseada em atividades de Modelagem Matemática estruturadas a partir de questões do ENEM, com vistas a contribuir para a ressignificação do ensino de Geometria Espacial e para o fortalecimento do processo de ensino e aprendizagem nesse nível de escolaridade. A coleta de dados envolveu a aplicação de questionários diagnósticos, testes de desempenho (pré-teste e pós-teste), observações em sala de aula, registros em diário de campo e relatos dos estudantes.

Os dados quantitativos possibilitaram a comparação do desempenho discente antes e após a intervenção, enquanto os dados qualitativos permitiram compreender as percepções, estratégias e dificuldades manifestadas ao longo do processo formativo. O estudo fundamenta-se em referenciais teóricos da Educação Matemática que discutem a Modelagem Matemática como metodologia de ensino, bem como em pesquisas relacionadas ao ensino de Geometria Espacial e às competências avaliadas pelo ENEM.

Além desta introdução, a dissertação organiza-se em capítulos que se complementam. O Capítulo 2 apresenta o referencial teórico, abordando fundamentos da Geometria Espacial no Ensino Médio, a Modelagem Matemática como metodologia de ensino e as competências e

habilidades relacionadas às questões de Geometria no ENEM. O Capítulo 3 descreve os procedimentos metodológicos da pesquisa, detalhando o contexto investigado, os sujeitos envolvidos, os instrumentos de coleta de dados e as etapas de desenvolvimento da sequência didática. No Capítulo 4 são analisados e discutidos os dados obtidos a partir da intervenção pedagógica, à luz do referencial teórico adotado. Por fim, o Capítulo 5 apresenta as considerações finais, nas quais se retomam o problema de pesquisa e os objetivos do estudo, discutem-se as principais contribuições da Modelagem Matemática para o ensino de Geometria Espacial e são indicadas recomendações para trabalhos futuros.

2 REFERÊNCIAL TEÓRICO

Este capítulo apresenta o referencial teórico que ampara a pesquisa, organizado conforme os tópicos estabelecidos para este trabalho. A fundamentação articula discussões sobre o ensino de Geometria no Brasil, a Modelagem Matemática na Educação Matemática e o papel do ENEM como orientador curricular, com base em autores clássicos e contemporâneos, tais como Almeida, Silva e Vertuan (2016), Bassanezi (2002), Burak (1992), Biembengut e Hein (2018), Lorenzato (1995), dentre outros e documentos oficiais como a LDB, a BNCC e a Matriz de Referência do ENEM.

2.1 O ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL: DESAFIOS E PERSPECTIVAS

A Geometria constitui um dos pilares da Matemática escolar, desempenhando papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio lógico, da visualização espacial e da capacidade de interpretar e modelar situações do mundo físico. Apesar de sua relevância histórica e conceitual, diversos estudos apontam que o ensino de Geometria, especialmente da Geometria Espacial, tem sido historicamente negligenciado ou tratado de forma excessivamente formalista na Educação Básica brasileira.

Ao discutir o ensino de Geometria no contexto escolar, Lorenzato (1995) afirma que esse conteúdo é frequentemente apresentado ao final dos livros didáticos, o que contribui para que não seja abordado de forma sistemática. Segundo o autor, “a Geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo”, sendo ainda tratada de modo desarticulado das demais áreas da Matemática. Isso leva a crer que a Geometria frequentemente aparece nos currículos como um conteúdo secundário, muitas vezes deslocado para o final do ano letivo, o que contribui para abordagens superficiais e fragmentadas.

Conforme aponta Pavanello (1993), a desvalorização da Geometria está associada à maior ênfase atribuída à Álgebra nos currículos escolares. Como consequência, os conteúdos geométricos passaram a ocupar um espaço secundário, sendo frequentemente abordados de forma superficial e fragmentada, o que compromete a construção de conhecimentos espaciais e a compreensão de conceitos geométricos mais complexos.

As discussões no âmbito educacional têm sido constantes, especialmente no que se refere às dificuldades enfrentadas pelos estudantes na compreensão de conceitos abstratos e na aplicação prática dos conhecimentos matemáticos. No caso da Geometria, tais dificuldades

estão diretamente relacionadas à ausência de situações que favoreçam o desenvolvimento do raciocínio visual e espacial. Nesse sentido, Lorenzato destaca a centralidade da Geometria na formação do pensamento matemático ao afirmar que

Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que, sem estudar Geometria, as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano. Sem conhecer Geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. (Lorenzato, 1995, p. 5)

Essa reflexão evidencia que a Geometria desempenha um papel fundamental na construção de significados e na leitura do mundo, o que reforça a necessidade de práticas pedagógicas que promovam a articulação entre o concreto, o representacional e o formal. No ensino de Geometria no Brasil, entretanto, observa-se com frequência uma abordagem excessivamente abstrata ou algébrica, que limita o desenvolvimento do raciocínio espacial dos estudantes e dificulta a compreensão de conceitos, especialmente no âmbito da Geometria Espacial.

Segundo Pavanello (1993), a Geometria sofreu uma progressiva perda de espaço nos currículos escolares brasileiros, o que contribuiu para fragilidades no processo de ensino e aprendizagem dessa área da Matemática.

Como perspectiva, destaca-se a necessidade de metodologias que integrem diferentes registros de representação, com o uso de materiais manipuláveis, recursos tecnológicos e situações contextualizadas. Essa integração favorece aprendizagens mais significativas e contribui para a superação das dificuldades historicamente associadas ao ensino de Geometria no cenário educacional brasileiro.

O papel do professor de Matemática vai além da transmissão de conteúdos, exigindo estratégias que favoreçam a compreensão e a relação do conhecimento com a realidade dos estudantes. Nesse sentido, Simão (2024, p. 19) destaca que “a função do professor não é simplesmente passar o conteúdo, mas também fazer com que os alunos o compreendam e consigam associá-lo a suas realidades sempre que possível, sendo fundamental que as aulas incluam teoria e práticas aliadas”. Essa perspectiva reforça a necessidade de práticas pedagógicas que integrem aspectos conceituais e práticos no ensino de Geometria.

Esse cenário atual tem se refletido em dificuldades apresentadas pelos estudantes em compreender sólidos geométricos, estabelecer relações entre área e volume e interpretar representações bidimensionais de objetos tridimensionais.

Documentos legais apontam para a necessidade de um ensino de Matemática voltado à compreensão, à contextualização e ao desenvolvimento do raciocínio. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB nº 9.394/1996) estabelece que a Educação Básica deve assegurar uma formação que possibilite ao estudante compreender e intervir na realidade, ao definir como finalidade o desenvolvimento pleno do educando, conforme expresso no Art. 22: “A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores” (Brasil, 1996).

Essa orientação legal fundamenta a adoção de práticas pedagógicas que ultrapassem a transmissão mecânica de conteúdos, favorecendo a construção de conhecimentos significativos e aplicáveis a diferentes contextos.

Nesse mesmo sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática destacam a importância de um ensino que favoreça a resolução de problemas, a investigação e a articulação entre diferentes conteúdos matemáticos. No que se refere à Geometria, os PCNs ressaltam o papel do desenvolvimento da visualização espacial e da interpretação de formas e relações presentes no espaço físico, enfatizando a necessidade de superar práticas baseadas apenas na memorização de fórmulas (Brasil, 1998).

Ao valorizar situações contextualizadas e a construção de significados, os PCNs enfatiza a aproximação entre Matemática escolar e realidade, aspecto que dialoga diretamente com a perspectiva da Modelagem Matemática. Dessa forma, tanto a LDB quanto os PCNs constituem fundamentos legais e pedagógicos que antecedem e sustentam as propostas atuais, reforçando a pertinência de metodologias investigativas no ensino de Geometria.

Já a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe uma mudança nesse paradigma ao enfatizar o ensino de Geometria articulado à resolução de problemas, à investigação e à contextualização. De acordo com o documento, espera-se que o estudante desenvolva competências relacionadas à visualização, à argumentação e à modelagem de situações reais, superando a mera aplicação de fórmulas.

Essas mudanças pedagógicas acompanham transformações na própria Matemática. Conforme D'Ambrosio (2009, p. 58), “os meios de observação, de coleta de dados e de processamento desses dados, que são essenciais na criação matemática, mudaram profundamente”, indicando que, embora o rigor científico permaneça, ele assume novas formas. Esse cenário demanda práticas de ensino que valorizem a investigação e a contextualização, fundamentos da Modelagem Matemática.

No texto da BNCC afirma em uma de suas competências gerais para a educação básica que:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (Brasil, 2018)

Essa competência 2 evidencia a centralidade de uma postura investigativa no processo educativo, ao valorizar a curiosidade intelectual e práticas como a formulação de hipóteses, a análise crítica e a resolução de problemas. Essa perspectiva reforça a necessidade de propostas pedagógicas que promovam a autonomia intelectual dos estudantes e a articulação entre diferentes áreas do conhecimento, favorecendo a construção de soluções fundamentadas e contextualizadas.

Torna-se relevante analisar habilidades da BNCC alinhadas ao objetivo deste trabalho, fundamentado na Modelagem Matemática. Nesse sentido, a habilidade EM13MAT301 destaca que é necessário “resolver e elaborar problemas em contextos diversos, que envolvam a modelagem de situações do cotidiano, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, avaliando a razoabilidade e a validade dos resultados obtidos” (Brasil, 2018). Essa orientação curricular evidencia a centralidade da modelagem no ensino de Matemática no Ensino Médio, ao valorizar a resolução e a elaboração de problemas em contextos significativos, favorecendo o desenvolvimento do pensamento crítico dos estudantes.

Nesse contexto, mostra-se a necessidade de metodologias que promovam uma aprendizagem significativa da Geometria Espacial, integrando conceitos matemáticos a situações do cotidiano. A Modelagem Matemática surge, assim, como uma perspectiva capaz de responder a esses desafios, ao aproximar a Matemática escolar da realidade vivenciada pelos estudantes.

2.2 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática, no âmbito educacional, pode ser compreendida como um processo investigativo que parte de situações da realidade para a construção, análise e validação de modelos matemáticos. Trata-se de uma abordagem que rompe com o ensino tradicional transmissivo, favorecendo a participação ativa dos estudantes na construção do conhecimento.

A abordagem da Modelagem Matemática é especialmente relevante para o ensino de Geometria Espacial, pois, segundo Bassanezi,

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. (...) Consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (Bassanesi, 2002, p.24)

Com isso a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos, resolvê-los e interpretar suas soluções à luz do contexto original. No ambiente escolar, esse processo possibilita ao aluno compreender o significado dos conceitos matemáticos e perceber a Matemática como uma ferramenta para interpretar e intervir na realidade.

Burak (1992, p. 62) afirma que “a capacidade humana de pensar, questionar e criar, aliada ao espírito de investigação e à ferramenta matemática já desenvolvida, permitiu ao homem explorar seu meio ambiente, modelando-o para melhor conhecê-lo”. O autor ainda define a Modelagem Matemática como “um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões” (Burak, 1992, p. 62).

Diante disso a Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino que deve partir do interesse dos alunos e de problemas socialmente relevantes. Nessa perspectiva, o foco não está apenas no modelo final, mas no percurso investigativo, no diálogo e na reflexão crítica, aspectos fundamentais para a formação de sujeitos autônomos.

Sabemos que há um consenso educacional no que diz respeito ao ensino de matemática em precisar voltar-se para a promoção do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades essenciais, ou seja, ir além de soluções matemáticas, sempre buscando uma aprendizagem significativa para o aluno. Dessa forma,

a modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico. (Biembengut e Hein, 2018, p.18)

Os autores ainda reforçam a Modelagem Matemática como, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias.

No ensino da Modelagem Matemática o ambiente de aprendizagem é importante que o professor atue como mediador e o estudante assume papel protagonista. Ainda para (Biembengut; Hein, 2018, p. 29), a condição necessária para o professor implementar modelagem no ensino – modelação – é ter audácia, grande desejo de modificar sua prática e disposição de conhecer e aprender, uma vez que essa proposta abre caminho para descobertas significativas.

Nessa perspectiva, a Modelagem Matemática favorece a criação de ambientes de aprendizagem nos quais os estudantes investigam situações relacionadas ao seu contexto, utilizando conhecimentos matemáticos para compreender e propor soluções para problemas da realidade (Barbosa, 2004).

Ao verificar um problema de matemática imagina-se o modelo a ser desenvolvido diante de tal situação. A expressão “modelo” tenha sua origem do latim *modellum*, diminutivo de *modus*, que significa “medida em geral”, para nossos estudos o mais adequado considerarmos a versão apresentada para o termo no dicionário etimológico de Cunha (1989) sendo a “representação de alguma coisa”.

Trazendo para o âmbito da matemática isso também funciona, usamos os modelos matemáticos para representar alguma coisa, analisar e explicar. Segundo Almeida, sobre a definição de um modelo matemático como:

um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema. Um modelo matemático é, portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema. (Almeida; Silva; Vertuan, 2016, p. 12-13)

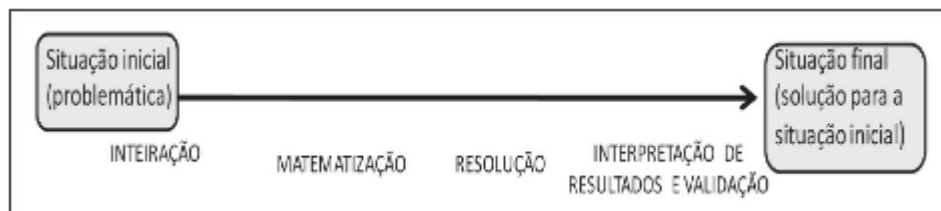
Em nossos estudos isso deverá funcionar com a análise de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Essa concepção reforça o potencial da Modelagem Matemática no contexto escolar, ao possibilitar que os alunos utilizem a Matemática para interpretar e analisar situações da realidade. Ao construir modelos, os estudantes participam ativamente do processo de investigação, atribuindo significado aos conceitos matemáticos e desenvolvendo autonomia na resolução de problemas.

Nesse contexto, uma atividade de Modelagem Matemática compreende diferentes fases, correspondentes aos procedimentos necessários para a configuração, a organização e a resolução de uma situação-problema, as quais podem ser descritas como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

Para os fins deste estudo, ao analisar situações-problema de Geometria Espacial a partir de questões do ENEM, a compreensão do processo de Modelagem Matemática torna-se mais

clara a partir do esquema apresentado na Figura 1, conforme proposto por Almeida; Silva; Vertuan (2016).

Figura 1– Fases da Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 15).

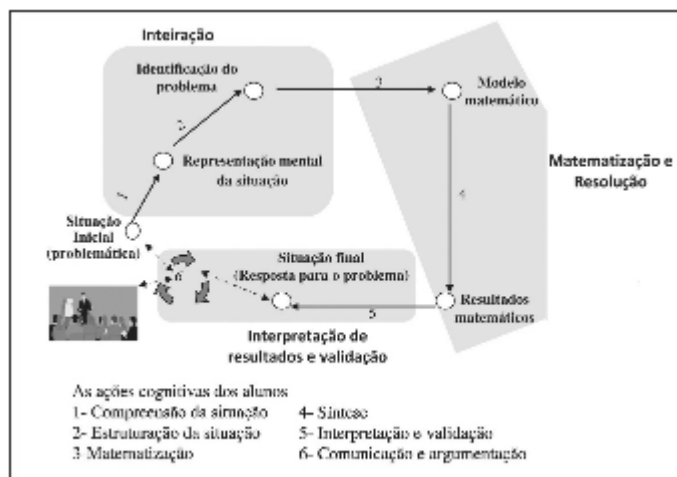
Este esquema apresenta a Modelagem Matemática como um caminho que parte de uma situação inicial, oriunda de um problema da realidade, e conduz à construção de uma solução para essa mesma situação. Esse percurso não ocorre de forma automática, mas por meio de etapas que se articulam e se retroalimentam ao longo do processo.

Inicialmente, na fase de inteiração, o estudante entra em contato com o problema, buscando compreendê-lo, identificar informações relevantes e levantar possíveis estratégias de abordagem. Em seguida, na matematização, a situação é representada por meio da linguagem matemática, etapa em que se estabelecem relações, hipóteses e modelos capazes de traduzir o fenômeno observado. A fase de resolução envolve o tratamento matemático dessas representações, utilizando procedimentos e conceitos adequados ao problema em questão.

Após a obtenção dos resultados, estes são interpretados à luz da situação inicial, permitindo analisar seus significados e verificar se respondem de forma satisfatória ao problema proposto. Por fim, a etapa de avaliação possibilita refletir sobre a validade do modelo construído, reconhecendo seus limites e a necessidade de possíveis ajustes. Dessa forma, a figura evidencia a Modelagem Matemática como um processo reflexivo e significativo, no qual a Matemática se apresenta como instrumento para compreender e explicar situações do mundo real, aspecto especialmente relevante no ensino de Geometria Espacial.

A Modelagem Matemática, conforme discutido, desenvolve-se a partir de uma situação-problema e envolve fases interligadas que orientam a construção e a análise de modelos. A Figura abaixo sintetiza esse processo, evidenciando a articulação entre as etapas da modelagem e as ações cognitivas mobilizadas pelos estudantes, ainda segundo Almeida; Silva; Vertuan, (2016).

Figura 2 – Fases da Modelagem Matemática e ações cognitivas dos alunos



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 19).

A figura 2 reforça o caráter dinâmico da Modelagem Matemática, marcada por movimentos de retomada, interpretação e validação dos resultados, nos quais o aluno assume o papel de modelador, atuando de forma ativa na compreensão da situação-problema, na construção do modelo e na análise das soluções. Essa compreensão fundamenta as análises desenvolvidas neste trabalho e possibilita a compreensão dos próximos capítulos, nos quais são apresentados os encaminhamentos metodológicos e as discussões dos resultados da pesquisa.

Essas concepções convergem ao reconhecer a Modelagem Matemática como uma estratégia pedagógica potente para tornar o ensino de Matemática mais significativo, contextualizado e alinhado às demandas contemporâneas da educação.

2.2.1 Concepções Teóricas de Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática, no campo da Educação Matemática, tem sido compreendida por diferentes teóricos como uma abordagem pedagógica que articula situações da realidade, investigação e construção de conhecimentos matemáticos. Embora apresentem especificidades conceituais, essas concepções convergem ao reconhecer a Modelagem como um processo dinâmico, investigativo e formativo, no qual estudantes e professores assumem papéis ativos na produção do conhecimento.

Biembengut e Hein (2018) caracteriza a Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino-aprendizagem que se inicia a partir de uma situação ou tema da

realidade, sobre o qual são formuladas questões a serem investigadas por meio de ferramentas matemáticas e da pesquisa. Segundo os autores,

a modelagem matemática, originalmente, como metodologia de ensino-aprendizagem parte de uma situação/tema e sobre ela desenvolve questões, que tentarão ser respondidas mediante o uso de ferramentas matemáticas e da pesquisa sobre o tema. (Biembengut; Hein, 2018, p. 28)

Essa perspectiva evidencia que o processo de modelagem não se restringe à aplicação de conteúdos previamente ensinados, mas envolve a problematização e a investigação como elementos centrais.

Os autores ainda destacam a flexibilidade do processo, ressaltando o papel do professor na escolha, adaptação e condução dos modelos trabalhados em sala de aula. Para Biembengut e Hein (2018), “é imperativo que se tenham vários modelos à disposição para que se possa optar ‘entre os modelos’ e não ‘pelo modelo’”, sendo que o uso, a adaptação e o aprimoramento desses modelos dependem do contexto educacional e do bom senso docente (Biembengut; Hein, 2018, p. 28). Tal compreensão reforça a ideia de que a Modelagem Matemática se constitui como um ambiente de aprendizagem aberto, no qual decisões pedagógicas são continuamente revistas.

No que se refere à implementação da Modelagem Matemática, Biembengut e Hein (2018) enfatiza a importância de um planejamento fundamentado no conhecimento da realidade dos estudantes. Segundo os autores, “para implementar a modelação matemática sugerimos que o professor faça, inicialmente, um levantamento sobre os alunos”, considerando aspectos como a realidade socioeconômica, o tempo disponível e os conhecimentos matemáticos prévios (Biembengut; Hein, 2018, p. 19). Essa orientação evidencia o caráter contextualizado da modelagem e sua vinculação às condições concretas do processo educativo.

A concepção de Burak amplia essa discussão ao destacar o interesse dos estudantes e o contexto social como elementos estruturantes da Modelagem Matemática. Para o autor, o desenvolvimento de atividades de modelagem envolve cinco etapas — escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos problemas e análise crítica das soluções — que devem ser conduzidas a partir de dois princípios fundamentais: “o interesse do grupo” e “a obtenção de informações e dados do ambiente onde se encontra o interesse do grupo” (Burak, apud Klüber, 2016, p. 42). Nessa perspectiva, a Matemática emerge como uma ferramenta para compreender fenômenos relevantes à vivência dos estudantes.

Burak (apud Klüber, 2016) também ressalta o papel mediador do professor ao longo de todo o processo de modelagem, destacando que sua atuação como orientador e problematizador é essencial para o desenvolvimento das atividades. A escolha do tema, segundo o autor, pode

partir de propostas do professor ou dos próprios alunos, abrangendo contextos diversos, como atividades produtivas, esportes, política ou temas em evidência na mídia, “podendo não ter nenhuma ligação imediata com a Matemática” (Burak, apud Klüber, 2016, p. 43).

A concepção de Almeida, Silva e Vertuan (2016) contribui ao enfatizar os encaminhamentos e procedimentos que articulam a situação inicial à situação final no processo de modelagem. Para os autores, ainda que a Modelagem Matemática seja caracterizada por partir de uma situação problemática e culminar em uma solução, “o foco está nos encaminhamentos e procedimentos que medeiam a transição da situação inicial para a situação final” (Almeida; Silva; Vertuan, 2016, p. 20). Essa abordagem evidencia que o valor pedagógico da modelagem reside no percurso investigativo, e não apenas no resultado final.

Almeida, Silva e Vertuan (2016) destaca ainda que ensino e aprendizagem não são processos independentes em atividades de modelagem, uma vez que “o que e como o professor faz nas aulas com modelagem tem repercussão direta sobre o que o aluno faz e como ele faz para aprender” (Almeida; Silva; Vertuan, 2016, p. 20). Tal concepção reforça a interdependência entre a atuação docente e o protagonismo discente no processo educativo.

No que diz respeito ao papel do professor, Almeida, Silva e Vertuan (2016) é enfática ao afirmar que, em aulas mediadas por atividades de Modelagem Matemática, o professor deve assumir o papel de orientador. Segundo os autores, “orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, é sugerir procedimentos”, não se confundindo com fornecer respostas prontas ou abdicar da autoridade docente (Almeida; Silva; Vertuan, 2016, p. 24). Essa postura favorece a autonomia dos estudantes e o desenvolvimento de atitudes investigativas.

Bassanezi (2002), por sua vez, compreende a Modelagem Matemática como um caminho para tornar o ensino mais significativo e conectado à realidade. O autor afirma que “uma modelagem eficiente permite fazer previsão, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças” (Bassanezi, 2002, p. 177). Nessa perspectiva, a modelagem possibilita ao estudante compreender os argumentos matemáticos e incorporar conceitos de forma mais significativa.

O autor ainda destaca que a modelagem envolve subjetividades próprias de cada modelador, ao afirmar que “a modelagem é o processo de criação de modelos onde estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador” (Bassanezi, 2002, p. 207). Essa concepção reforça o caráter não neutro e interpretativo do processo de modelagem.

Contribuições mais recentes, como as de Schrenk e Vertuan (2022), reforçam a Modelagem Matemática como uma prática pedagógica fundamentada, capaz de promover a relação entre o conteúdo matemático e a vivência dos estudantes. Segundo o autor,

O desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática permite ao estudante relacionar o conteúdo matemático com situações da sua vivência e potencializar esse sentido de práxis. Para isso, a atividade de Modelagem Matemática, dirigida por objetivos, finalidades e conhecimentos, necessita de uma ação consciente e participativa. (Schrenk; Vertuan, 2022, p. 212)

Tal perspectiva amplia o alcance da Modelagem Matemática ao evidenciar que a aprendizagem não se restringe à apropriação de conteúdos formais, mas envolve a participação ativa do estudante em processos reflexivos e socialmente situados, fortalecendo o vínculo entre a escola, a comunidade e a realidade vivenciada pelos alunos.

Em síntese, as diferentes concepções teóricas apresentadas convergem ao reconhecer a Modelagem Matemática como uma abordagem pedagógica que integra realidade, investigação e Matemática, valorizando o protagonismo discente e a mediação docente. Essas concepções fundamentam a proposta deste trabalho, que compreende a Modelagem Matemática como uma estratégia potente para o ensino de Geometria Espacial, especialmente no contexto de resolução de problemas alinhados às demandas do ENEM.

2.2.2 A Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino para o ENEM

A Modelagem Matemática, ao articular situações do cotidiano, investigação e formalização matemática, apresenta-se como uma estratégia de ensino alinhada às exigências avaliativas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Tal aproximação é coerente com a concepção de Modelagem defendida por Bassanezi (2002), para quem “a modelagem eficiente permite fazer previsão, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças” (Bassanezi, 2002, p. 177).

O ENEM prioriza a mobilização de competências e habilidades em contextos significativos, demandando do estudante não apenas a aplicação de procedimentos matemáticos, mas a interpretação de situações-problema e a argumentação. Nesse sentido, Burak (1992, apud Pontes; Burak, 2016) afirma que a Modelagem Matemática favorece um ensino no qual “o interesse do grupo e a obtenção de informações do ambiente onde se encontra esse interesse constituem princípios fundamentais para o desenvolvimento da atividade” (Burak, 1992, apud Pontes; Burak, 2016, p. 187) aproximando a aprendizagem das situações avaliadas no exame.

Tortola e Silva (2022) defendem que questões do Enem podem ultrapassar sua função avaliativa e servir como ponto de partida para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática orientadas pelos pressupostos da Educação Matemática Crítica.

Almeida, Silva e Vertuan (2016) reforça que o valor pedagógico da Modelagem está no percurso investigativo, ao destacar que “o foco está nos encaminhamentos e procedimentos que medeiam a transição da situação inicial para a situação final” (Almeida; Silva; Vertuan, 2016, p. 20). Essa característica dialoga diretamente com a lógica do ENEM, cujas questões valorizam processos de análise, interpretação e validação de resultados.

A valorização de metodologias que priorizem a ação e a visualização é especialmente pertinente no contexto do ENEM. Franca (2023, p. 38) afirma que “a prática do fazer para aprender, a visualização das situações é o que torna a formação do aluno mais eficiente”, destacando a necessidade de superar abordagens restritas ao livro didático. Essa concepção converge com a Modelagem Matemática ao favorecer a aplicação da teoria em situações contextualizadas.

Dessa forma, a Modelagem Matemática contribui para superar práticas centradas na memorização, favorecendo uma aprendizagem significativa e contextualizada. Ao trabalhar com problemas abertos e reais, essa abordagem potencializa o desenvolvimento de competências cognitivas superiores, fundamentais para o desempenho no ENEM e para a formação crítica dos estudantes.

2.3 O ENEM E A MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) constitui-se como uma das principais políticas públicas de avaliação da Educação Básica no Brasil, assumindo, ao longo dos anos, o papel de instrumento de acesso ao ensino superior e de indução curricular. Sua estrutura avaliativa baseia-se em competências e habilidades, organizadas em matrizes de referência que orientam a elaboração das questões e refletem concepções contemporâneas de ensino e aprendizagem.

Na área de Matemática e suas Tecnologias, a matriz de referência do ENEM está fundamentada na resolução de situações-problema contextualizadas, que exigem do estudante a mobilização integrada de conhecimentos matemáticos, capacidades de leitura, interpretação e argumentação. Essa perspectiva desloca o foco do simples domínio técnico para a compreensão conceitual e a aplicação dos conhecimentos em contextos variados.

A Matriz de Referência de Matemática organiza-se em competências de área que abrangem conhecimentos numéricos, geométricos, algébricos, estatísticos e probabilísticos. Cada competência articula um conjunto de habilidades que orientam a avaliação do desempenho dos estudantes, priorizando a leitura da realidade, a análise de informações e a tomada de decisões fundamentadas.

Nesse cenário, o ENEM valoriza práticas pedagógicas que favorecem a contextualização, a interdisciplinaridade e a resolução de problemas, aspectos diretamente relacionados às propostas da Modelagem Matemática. Assim, compreender a estrutura e os pressupostos da matriz de referência torna-se essencial para o planejamento de ações didáticas alinhadas às demandas do exame e aos objetivos formativos da Educação Básica.

2.3.1 Competências do ENEM e Habilidades Relacionadas à Geometria Espacial

No âmbito da Matemática e suas Tecnologias, a Geometria Espacial ocupa lugar de destaque por possibilitar a leitura, a representação e a interpretação do espaço físico e de situações do cotidiano. As habilidades associadas a esse campo do conhecimento estão majoritariamente vinculadas à Competência de Área 2 do ENEM, que trata do uso do conhecimento geométrico para compreender e agir sobre a realidade, bem como dialogam com a Competência de Área 3, relacionada a grandezas e medidas.

Essas competências exigem do estudante a capacidade de visualizar objetos tridimensionais, reconhecer propriedades geométricas, interpretar representações bidimensionais e resolver problemas que envolvam áreas, volumes, escalas e relações espaciais. Tais demandas reforçam a pertinência de abordagens como a Modelagem Matemática, que favorecem a exploração concreta, a visualização e a contextualização dos conceitos geométricos.

A seguir, apresenta-se uma síntese das principais habilidades do ENEM relacionadas à Geometria Espacial, conforme a Matriz de Referência de Matemática:

Quadro 1 – Habilidades da Matriz de Referência do ENEM relacionadas à Geometria Espacial

Competência	Habilidade	Descrição
Competência 2	H6	Interpretar a localização e a movimentação de pessoas ou objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
Competência 2	H7	Identificar características de figuras planas ou espaciais.

Competência 2	H8	Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
Competência 2	H9	Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
Competência 3	H10	Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
Competência 3	H12	Resolver situações-problema que envolvam medidas de grandezas.
Competência 3	H13	Avaliar resultados de medições e cálculos de grandezas, considerando o contexto da situação.
Competência 3	H14	Utilizar escalas, razões e proporções na resolução de problemas geométricos e de representação espacial.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

A articulação dessas habilidades evidencia que o ensino de Geometria Espacial, quando desenvolvido por meio de situações-problema contextualizadas e investigativas, contribui diretamente para o desenvolvimento das competências exigidas pelo ENEM. Dessa forma, a proposta deste trabalho fundamenta-se na utilização da Modelagem Matemática como estratégia para potencializar a aprendizagem em Geometria Espacial, promovendo uma formação que atenda simultaneamente às demandas curriculares e avaliativas.

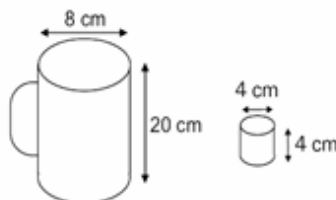
2.3.2 Análise de Itens de Geometria em Edições Anteriores do ENEM

Para ilustrar essas características, apresenta-se a seguir um exemplo de item do ENEM que envolve conteúdos de Geometria Espacial, evidenciando a necessidade de interpretação contextualizada e de construção de um modelo matemático para a resolução do problema.

Figura 3 – Exemplo de item do ENEM envolvendo Geometria Espacial

Questão 151

Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

- Ⓐ encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- Ⓑ encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- Ⓒ encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- Ⓓ encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- Ⓔ encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

Fonte: INEP, 2010.

A análise de itens de Geometria presentes em edições anteriores do ENEM evidencia uma mudança significativa no perfil das questões ao longo do tempo, com ênfase crescente em situações-problema contextualizadas, interpretação de informações e articulação entre diferentes conceitos matemáticos. Em particular, os itens de Geometria Espacial têm exigido do estudante habilidades que vão além da aplicação direta de fórmulas, demandando a compreensão de relações espaciais, a leitura de representações gráficas e a tomada de decisões fundamentadas.

Esse perfil avaliativo está diretamente relacionado à adoção da Teoria de Resposta ao Item (TRI) como metodologia de correção do exame. O ENEM utiliza a TRI para estimar a proficiência dos participantes considerando não apenas o número de acertos, mas também a coerência das respostas, o nível de dificuldade dos itens e seu poder de discriminação. De acordo com o INEP (2012), a TRI utilizada no ENEM não se baseia exclusivamente na contagem de acertos, mas na análise do padrão de respostas do participante, o que possibilita uma estimativa mais refinada da proficiência.

Dessa forma, itens que envolvem Geometria Espacial passam a exigir do estudante uma postura investigativa e reflexiva, uma vez que respostas corretas isoladas, obtidas por tentativa ou memorização, tendem a não contribuir de maneira significativa para a estimativa da proficiência. Ao contrário, a resolução consistente de itens que mobilizam conceitos geométricos em diferentes contextos revela maior domínio conceitual e compreensão das situações propostas.

A análise de provas anteriores do ENEM mostra que os itens de Geometria Espacial frequentemente estão associados a contextos do cotidiano, como embalagens, construções, maquetes, recipientes, deslocamentos no espaço e leitura de plantas e esquemas. Nesses casos, o estudante precisa interpretar o problema, identificar as grandezas envolvidas, estabelecer relações entre dimensões e selecionar estratégias adequadas de resolução, mobilizando conhecimentos de áreas, volumes, escalas e proporcionalidade.

Esse cenário reforça a necessidade de práticas pedagógicas que privilegiem a compreensão conceitual e a aplicação dos conhecimentos matemáticos em situações contextualizadas. A Modelagem Matemática, ao propor a investigação de problemas reais e a construção de modelos para interpretá-los, apresenta-se como uma abordagem coerente com as exigências dos itens do ENEM, especialmente no que se refere à Geometria Espacial.

Assim, a análise dos itens de Geometria em edições anteriores do ENEM sustenta a proposta deste trabalho, ao indicar que o desenvolvimento de atividades baseadas em Modelagem Matemática pode contribuir para que os estudantes enfrentem esse tipo de questão de forma mais consistente, articulando interpretação, raciocínio espacial e validação de resultados, aspectos valorizados tanto pela matriz de referência quanto pela metodologia avaliativa do exame.

De modo geral, observa-se a recorrência de problemas envolvendo sólidos geométricos como cilindros, cones, prismas e esferas, frequentemente associados a contextos reais, como embalagens, recipientes e situações de uso cotidiano. Essas questões demandam do estudante a articulação entre conceitos geométricos, interpretação textual e raciocínio proporcional, evidenciando que o desempenho satisfatório no exame depende da compreensão conceitual e da capacidade de aplicar conhecimentos em situações contextualizadas.

Nesse contexto, reforça-se a pertinência de abordagens didáticas que integrem Geometria Espacial e Modelagem Matemática, possibilitando que os estudantes desenvolvam competências alinhadas às exigências do ENEM e compreendam a Matemática como uma ferramenta para interpretar e resolver problemas do cotidiano. Em síntese, o referencial teórico apresentado fundamenta a proposta de ensino de Geometria Espacial mediado pela Modelagem

Matemática, articulada às demandas do exame e às orientações curriculares nacionais, servindo de base para o percurso metodológico e para a análise dos resultados desta pesquisa.

Com base nas discussões apresentadas neste capítulo, que evidenciam os desafios do ensino de Geometria Espacial, as contribuições da Modelagem Matemática como abordagem pedagógica e sua relação com as demandas do ENEM, torna-se necessária a apresentação de como esses pressupostos teóricos se materializam na prática docente. Nesse sentido, o capítulo seguinte apresenta o percurso metodológico desta pesquisa, descrevendo o contexto escolar, os sujeitos envolvidos, os instrumentos de coleta de dados e a organização da sequência didática desenvolvida, buscando mostrar a articulação entre teoria e prática no processo de ensino e aprendizagem analisado.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Este capítulo apresenta o percurso metodológico adotado na pesquisa, descrevendo a natureza do estudo, o contexto de aplicação, os sujeitos envolvidos e a organização da intervenção pedagógica baseada na Modelagem Matemática. As etapas da sequência didática, os instrumentos de coleta de dados e os procedimentos de análise são detalhados nas seções subsequentes.

3.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA (NATUREZA APLICADA/QUALI-QUANTITATIVA)

Esta pesquisa caracterizou-se como exploratória e aplicada, tendo sido desenvolvida em sala de aula e no laboratório de matemática, com abordagem qualitativa e quantitativa, configurando-se, portanto, como uma pesquisa de natureza mista. O estudo teve como objetivo compreender, intervir e avaliar os efeitos da Modelagem Matemática como recurso pedagógico no ensino de Geometria Espacial.

Do ponto de vista pedagógico, a pesquisa foi orientada pelos pressupostos da Modelagem Matemática, que fundamentaram o planejamento e o desenvolvimento da intervenção pedagógica realizada com os estudantes. Essa perspectiva orientou a elaboração da sequência didática, a organização das atividades e os procedimentos adotados durante a intervenção.

Tal compreensão dialogou com as contribuições de D'Ambrosio (1996), ao defender uma Educação Matemática que valorizou a contextualização, a problematização da realidade e o uso social do conhecimento matemático, favorecendo a atribuição de sentido aos conteúdos escolares.

Ademais, a opção por atividades investigativas e colaborativas encontrou respaldo na abordagem socioconstrutivista de Vygotsky (1978), que compreende o aprendizado como um processo social mediado pela interação entre os sujeitos. Nesse contexto, as atividades de Modelagem Matemática favoreceram a troca de ideias, a argumentação e a construção coletiva do conhecimento, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades cognitivas e sociais dos estudantes.

Esses pressupostos teóricos sustentaram a escolha metodológica adotada nesta pesquisa, orientando a elaboração e a aplicação da sequência didática, bem como os procedimentos de análise dos dados obtidos ao longo da intervenção pedagógica.

Quanto aos procedimentos, tratou-se de uma pesquisa de campo com caráter intervencionista, fundamentada na aplicação e na avaliação de uma sequência didática contextualizada, elaborada com base em questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Ademais, foi realizada uma pesquisa bibliográfica e documental, com vistas à fundamentação teórica do estudo e à análise de documentos oficiais, tais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as matrizes de referência do ENEM.

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública da cidade de Ipaporanga-CE, envolvendo uma turma da 3ª série do Ensino Médio. A escolha desse contexto justificou-se por representar, de forma legítima, a realidade da Educação Básica brasileira, especialmente no que se refere aos desafios enfrentados no ensino de Matemática. Ademais, o plano de ensino da referida série contempla o estudo da Geometria Espacial, conteúdo que historicamente apresenta elevadas dificuldades de aprendizagem entre os estudantes. Junta-se a isso a necessidade de preparação dos alunos para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), avaliação que exige competências relacionadas à interpretação, visualização espacial e modelagem de situações-problema, tornando esse ambiente particularmente pertinente para a aplicação e análise da sequência didática proposta.

3.2 A CONSTRUÇÃO DO ESTADO DA ARTE

Com o objetivo de identificar e analisar pesquisas que articulam o ensino de Geometria Espacial e a Modelagem Matemática, realizou-se um estudo do tipo Revisão Integrativa da Literatura (RIL). Essa abordagem possibilita reunir, sistematizar e analisar produções acadêmicas sobre um determinado tema, contribuindo para a compreensão do estado do conhecimento e para a identificação de lacunas que podem subsidiar novas investigações.

A revisão foi desenvolvida por meio de etapas sistematizadas, compreendendo: definição do tema e dos descritores de busca, estabelecimento dos critérios de inclusão e exclusão, levantamento e seleção dos estudos, organização dos dados, análise das produções e síntese dos resultados.

O levantamento bibliográfico foi realizado na base de dados OASISBr (Portal Brasileiro de Publicações Científicas em Acesso Aberto), utilizando os descritores “Ensino”, “Geometria Espacial” e “Modelagem Matemática”, combinados entre si. A busca inicial resultou em 54

trabalhos, distribuídos em 32 dissertações, 9 trabalhos de conclusão de curso, 6 artigos científicos e 7 teses.

Para a constituição do corpus de análise, foram adotados os seguintes critérios de inclusão: (i) ser artigo científico; (ii) estar publicado no período de 2016 até a data da realização da busca; e (iii) abordar o ensino de Geometria Espacial articulado à Modelagem Matemática. Foram excluídos os estudos que não atendiam a esses critérios, bem como trabalhos duplicados ou sem relação direta com o objeto de investigação.

Após a seleção dos artigos, realizou-se a leitura exploratória, analítica e interpretativa das produções, possibilitando sua organização e sistematização. Para a análise dos dados, os estudos foram categorizados de acordo com os seguintes aspectos: objetivos da pesquisa, conteúdos abordados, procedimentos metodológicos adotados e principais resultados apresentados.

A análise ocorreu de forma qualitativa, buscando identificar tendências teóricas e metodológicas, contribuições para o ensino de Geometria Espacial e possibilidades de utilização da Modelagem Matemática como estratégia para a construção do conhecimento matemático. Os resultados obtidos forneceram subsídios para a compreensão do panorama das pesquisas na área e para a fundamentação da proposta desenvolvida neste estudo.

3.3 LOCUS DA PESQUISA E OS SUJEITOS (PERFIL DA TURMA DE 3ª SÉRIE)

Os participantes da pesquisa foram 25 estudantes do 3º ano do Ensino Médio, devidamente autorizados por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Os critérios de inclusão consideraram a matrícula ativa na turma selecionada e a participação regular nas aulas de Matemática, além da concordância expressa dos estudantes por meio do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE). Não foram incluídos no estudo os estudantes que apresentaram elevada taxa de ausência ou que não autorizaram sua participação mediante o TCLE.

O professor responsável pela disciplina também participou da pesquisa, colaborando na aplicação da sequência didática e fornecendo feedback sobre o desenvolvimento das atividades e o processo didático adotado.

Quadro 2 - Distribuição etária dos estudantes participantes.

Idade (anos)	Número de alunos
--------------	------------------

17	17
18	7
20	1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Observou-se a predominância de alunos com 17 anos de idade, correspondendo à maioria da turma, o que indica uma faixa etária compatível com a etapa final da Educação Básica. Em menor proporção, identificaram-se estudantes com 18 anos, que também se encontram dentro da faixa etária esperada para essa etapa de escolarização. Registrou-se, ainda, a presença pontual de um estudante com 20 anos, refletindo uma possível trajetória escolar diferenciada, como reprovação ou ingresso tardio. Essa diversidade de idades foi considerada relevante para a análise dos resultados, uma vez que pode influenciar as experiências escolares, a maturidade cognitiva e a relação dos estudantes com o conteúdo de Geometria Espacial.

3.4 INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

Foram utilizados os seguintes instrumentos de coleta de dados: questionários diagnósticos e avaliativos, compostos por questões fechadas e abertas;

- entrevistas semiestruturadas realizadas com alunos e com o professor participante;
- testes de desempenho elaborados a partir de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM);
- observações sistemáticas em sala de aula, registradas em diário de campo;
- avaliação do produto educacional (caderno contendo a sequência didática), realizada por meio de fichas avaliativas e da condução de grupos focais.

3.5 DESCRIÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL: SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O produto educacional desenvolvido nesta pesquisa consistiu em uma sequência didática organizada em formato de caderno pedagógico, intitulada *Modelagem Matemática no Ensino de Geometria Espacial: uma sequência didática com base em questões do ENEM*. O material foi idealizado com a finalidade de apoiar o trabalho do professor de Matemática do Ensino Médio, oferecendo uma proposta metodológica estruturada para o ensino de Geometria Espacial mediado pela Modelagem Matemática, em consonância com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e com as competências e habilidades avaliadas pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

A sequência didática foi planejada, desenvolvida e aplicada no contexto desta pesquisa, assumindo caráter intervencionista e integrando o percurso metodológico do estudo. Sua elaboração fundamentou-se nos pressupostos teóricos da Modelagem Matemática discutidos no referencial teórico, especialmente nas contribuições de autores como Almeida, Silva e Vertuan (2016), Bassanezi (2002), Burak (1992), Biembengut e Hein (2018), entre outros, compreendendo a modelagem como um processo dinâmico que articula situações da realidade, construção de modelos matemáticos, resolução, validação e interpretação dos resultados.

O material foi estruturado em unidades didáticas sequenciais, organizadas a partir de situações-problema contextualizadas, extraídas ou adaptadas de questões do ENEM que abordam conteúdos de Geometria Espacial, tais como volume de sólidos geométricos, proporcionalidade, relações métricas, otimização de espaços e variações dimensionais. Cada unidade contemplou objetivos de aprendizagem, conteúdos matemáticos envolvidos, competências e habilidades mobilizadas, bem como orientações didáticas para o professor.

A proposta metodológica priorizou o trabalho colaborativo, a investigação e a experimentação, conduzindo os estudantes pelas etapas do processo de modelagem, desde a compreensão do problema até a validação experimental dos modelos construídos, incluindo a utilização de modelos físicos tridimensionais confeccionados com materiais de baixo custo. A socialização das soluções e a discussão coletiva constituíram etapas fundamentais do processo, favorecendo a argumentação matemática e a reflexão crítica.

O caderno pedagógico também incluiu orientações gerais sobre a condução das aulas, sugestões de materiais, tempo estimado para o desenvolvimento das atividades e possibilidades de adaptação da sequência a outros contextos escolares, de modo a favorecer sua replicabilidade e flexibilização.

Ressalta-se que, nesta seção, a sequência didática é apresentada em seus aspectos estruturais, organizacionais e metodológicos, sem a análise de seus efeitos diante a aprendizagem dos estudantes, os quais são discutidos no Capítulo 4 desta dissertação.

3.6 PROCEDIMENTO DE ANÁLISE DE DADOS

Os dados coletados nesta pesquisa foram analisados a partir de uma abordagem metodológica mista, articulando procedimentos quantitativos e qualitativos, com o objetivo de ampliar a compreensão do fenômeno investigado e conferir maior rigor à análise dos resultados. Essa opção metodológica justifica-se pela natureza do estudo, que envolve tanto aspectos mensuráveis do desempenho dos estudantes quanto elementos interpretativos relacionados às

suas percepções, estratégias e dificuldades conceituais no contexto do ensino de Geometria Espacial mediado pela Modelagem Matemática.

A análise quantitativa foi realizada a partir dos dados obtidos nos testes de desempenho aplicados antes e após a intervenção pedagógica (pré-teste e pós-teste). Esses dados foram submetidos à estatística descritiva, por meio do cálculo de frequências, médias e desvios padrão, possibilitando a organização e a síntese das informações coletadas. Além disso, foi empregado o teste *t* para amostras pareadas, com a finalidade de comparar os resultados obtidos nos dois momentos avaliativos e identificar possíveis variações no desempenho dos estudantes após a aplicação da sequência didática. Esse procedimento permitiu verificar indícios de evolução na aprendizagem dos conteúdos de Geometria Espacial, tomando como referência questões contextualizadas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Os dados qualitativos, provenientes das questões abertas dos questionários, das entrevistas semiestruturadas, das observações em sala de aula e dos registros no diário de campo, foram analisados por meio da Análise de Conteúdo, conforme proposta por Bardin (2016). Segundo a autora, a análise de conteúdo consiste em

um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens. (Bardin, 2016, p. 48)

De acordo com Bardin (2016), esse procedimento organiza-se em três etapas fundamentais: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados, inferência e interpretação, permitindo a construção de categorias temáticas que auxiliaram na compreensão dos significados presentes nos discursos dos sujeitos investigados.

Com o intuito de ampliar a confiabilidade e a validade da análise, os dados quantitativos e qualitativos foram integrados por meio da triangulação metodológica. Conforme discutido por Denzin e Lincoln (2006), a triangulação consiste na utilização de múltiplas fontes, métodos e perspectivas analíticas, não apenas como estratégia de validação, mas como um recurso que possibilita uma compreensão mais aprofundada e complexa do fenômeno investigado. Ainda segundo Denzin e Lincoln (2006), a pesquisa qualitativa caracteriza-se pelo uso de diferentes práticas interpretativas e materiais empíricos, permitindo compreender os fenômenos em seus contextos naturais, a partir dos significados atribuídos pelos sujeitos. Nesse sentido, a triangulação adotada neste estudo favoreceu o confronto e a complementaridade entre os resultados estatísticos e as análises qualitativas, fortalecendo a consistência das conclusões apresentadas.

Os registros produzidos durante a aplicação da sequência didática, envolvendo a construção, a experimentação e a validação de modelos matemáticos e físicos, também foram considerados na análise, tendo como objetivo a compreender o processo de aprendizagem desenvolvido pelos estudantes. Os dados experimentais obtidos foram comparados aos resultados dos modelos matemáticos teóricos, possibilitando identificar aproximações e discrepâncias entre teoria e prática, à luz das hipóteses assumidas e das limitações inerentes ao processo de modelagem. Essas informações, articuladas aos demais instrumentos de coleta, integraram a triangulação dos dados adotada na pesquisa, contribuindo para ampliar a confiabilidade da análise. Os resultados são apresentados e discutidos no Capítulo 4 desta dissertação.

3.7 ORGANIZAÇÃO DAS ETAPAS DE EXECUÇÃO DA INTERVENÇÃO

A etapa de sondagem inicial, realizada por meio do questionário “Pré-Teste Diagnóstico”, teve como objetivo mapear três eixos fundamentais para a pesquisa: (i) o perfil e os conhecimentos prévios dos alunos em relação a Modelagem Matemática; (ii) as principais dificuldades técnicas e cognitivas em Geometria Espacial; e (iii) a relação socioemocional e estratégica dos estudantes com as questões de Matemática do ENEM.

Antes do desenvolvimento da sequência didática, foi aplicado um pré-teste diagnóstico com o objetivo de identificar o nível de conhecimentos prévios dos estudantes em Geometria Espacial. A Figura abaixo apresenta um registro do momento de aplicação desse instrumento.

Figura 4 – Aplicação do pré-teste diagnóstico em Geometria Espacial



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

O instrumento foi elaborado de modo a avaliar não apenas o domínio de fórmulas, mas também a capacidade de transição entre o objeto tridimensional, sua representação bidimensional (planificação) e a abstração mental necessária para operar cortes e secções

A intervenção pedagógica foi desenvolvida ao longo de seis semanas, totalizando dezesseis aulas de 50 minutos cada (800 minutos), conforme planejamento e execução efetiva descritos no relatório de aplicação. As atividades foram organizadas em etapas sequenciais, contemplando diagnóstico inicial, desenvolvimento da sequência didática, validação experimental, socialização dos resultados e avaliação final.

As etapas de execução estão sintetizadas no Quadro 3, que apresenta o cronograma real de desenvolvimento da intervenção pedagógica.

Quadro 3 – Cronograma de execução da intervenção pedagógica

Semana	Número de aulas	Atividades realizadas
1ª semana	2 aulas	Aplicação do pré-teste diagnóstico, envolvendo questionário inicial com cinco exercícios e teste escrito com cinco questões contextualizadas do ENEM e Instrumento de Pesquisa sobre dificuldades de aprendizagem em Geometria Espacial.
2ª semana	3 aulas	Introdução à Modelagem Matemática por meio de discussão orientada, análise do pré-teste, análise coletiva da situação-problema e organização dos grupos de trabalho.
3ª semana	3 aulas	Construção dos modelos físicos tridimensionais (cilindro, cone e sólidos compostos), com utilização de materiais de baixo custo, medições e ajustes estruturais.
4ª semana	4 aulas	Continuidade da construção e validação dos modelos: realização de cálculos matemáticos, medições experimentais de volume, massa e capacidade; discussão orientada sobre discrepâncias entre resultados teóricos e experimentais; preparação das apresentações dos grupos.
5ª semana	2 aulas	Socialização dos resultados por meio de apresentações orais dos grupos e exposição dos modelos, com mediação docente.
6ª semana	2 aulas	Aplicação do pós-teste avaliativo, composto por cinco questões do ENEM de complexidade semelhante às do pré-teste e com habilidades comuns, bem como de um questionário de percepção dos estudantes acerca da metodologia de Modelagem Matemática vivenciada ao longo da sequência didática.

Fonte: Elaboração do autor, 2026.

A organização das atividades em etapas bem definidas possibilitou o acompanhamento sistemático da intervenção pedagógica e a coleta de dados consistentes para análise. O cronograma de execução evidencia o caráter aplicado da pesquisa e a coerência entre o planejamento metodológico e a prática desenvolvida em sala de aula.

No decorrer da aplicação da sequência didática, os estudantes foram organizados em quatro grupos de trabalho, com o objetivo de favorecer e fortalecer a participação ativa e a investigação coletiva. Cada grupo analisou uma situação-problema relacionada à Geometria Espacial, selecionada a partir de uma lista de questões do ENEM previamente disponibilizada, escolhendo aquela considerada mais adequada ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

A definição das situações atribuídas a cada grupo teve caráter exclusivamente organizacional, visando à diversificação dos contextos explorados durante a intervenção pedagógica, sem implicar diferenciação metodológica no desenvolvimento das atividades. Em todos os grupos, os procedimentos adotados seguiram as mesmas etapas previstas na sequência didática, conforme descrito nas seções anteriores deste capítulo. Ressalta-se que todos os estudantes participaram das atividades propostas, cabendo a cada grupo a escolha de seus representantes para a exposição das atividades desenvolvidas.

Com a finalidade de explicitar a organização dos grupos de trabalho, apresenta-se o quadro a seguir.

Quadro 4 – Organização dos Grupos de Trabalho na Sequência Didática

Grupo	Número de estudantes	Situação-problema atribuída
Grupo 1	7	Armazenamento em silo
Grupo 2	6	Empacotamento de objetos
Grupo 3	6	Redução de volume em cone
Grupo 4	6	Comparação de volumes de cilindros

Fonte: Elaboração do autor, 2026.

Assim, o presente capítulo concentrou-se na descrição dos aspectos metodológicos e organizacionais da intervenção pedagógica, enquanto a análise das produções dos grupos, das estratégias matemáticas mobilizadas e dos resultados obtidos a partir da aplicação da sequência didática é desenvolvida no capítulo seguinte.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

4.1 COMPREENDENDO O ESTADO DA ARTE DA INVESTIGAÇÃO

A análise dos resultados inicia-se com a apresentação do Quadro 5, que sintetiza a categorização dos artigos selecionados na revisão integrativa. Os estudos foram organizados de acordo com autores e ano de publicação, objetivo geral, conteúdos de Geometria Espacial abordados e metodologia empregada. Essa sistematização possibilita uma visão panorâmica das produções analisadas, permitindo identificar tendências teóricas, metodológicas e conceituais presentes nas pesquisas voltadas ao ensino de Geometria Espacial.

Quadro 5 – Categorização dos artigos selecionados na revisão integrativa

Autores / Ano	Objetivo Geral	Conteúdos de Geometria Espacial abordados	Metodologia Utilizada
Sousa; Alves; Fontenele (2020)	Analisar como a Teoria das Situações Didáticas, com apoio do software GeoGebra, contribui para o ensino de Geometria Espacial a partir de questões do ENEM.	Volume de sólidos geométricos; prismas; cilindros; representação espacial; escala; visualização 2D e 3D.	Pesquisa qualitativa de caráter didático-pedagógico, fundamentada na Teoria das Situações Didáticas, com uso do GeoGebra para resolução de problemas contextualizados do ENEM.
Oliveira; Silva; Bissaco (2021)	Investigar a aplicação da Geometria Plana e Espacial no Ensino Médio Integrado ao curso técnico em Agropecuária, destacando a modelagem matemática como estratégia pedagógica.	Geometria plana e espacial; áreas; volumes; prismas; cilindros; aplicação em contextos agropecuários.	Pesquisa exploratória e qualitativa, com desenvolvimento de atividades de modelagem matemática articuladas à realidade do curso técnico, culminando na produção de material didático.
Rossim (2021)	Evidenciar a importância de uma abordagem integradora entre Geometria Plana e Espacial, por meio da modelagem matemática, no Ensino Médio Integrado.	Figuras planas e espaciais; áreas; volumes; sólidos geométricos aplicados à agropecuária.	Pesquisa qualitativa, bibliográfica e aplicada, com elaboração e aplicação de um guia didático fundamentado na modelagem matemática.
Lentz et al. (2017)	Desenvolver e aplicar uma proposta de ensino de Geometria Espacial fundamentada na Modelagem Matemática, com foco na Relação de Euler.	Poliedros; Relação de Euler; vértices, faces e arestas; planificação de sólidos; volume.	Pesquisa qualitativa com aplicação de sequência didática baseada na Modelagem Matemática, envolvendo atividades práticas e colaborativas no contexto do PIBID.
Reges et al. (2017)	Analisar as contribuições do ensino de Geometria Espacial com enfoque na etnomodelagem, articulando matemática e cotidiano dos estudantes.	Geometria espacial; sólidos geométricos; áreas; volumes; aplicações industriais.	Pesquisa qualitativa, com observação participante, questionários, visitas técnicas e oficinas de construção de maquetes, fundamentada na etnomatemática e na modelagem matemática.

Fonte: Dados da Pesquisa, 2026

Os estudos analisados convergem ao indicar que a Geometria Espacial constitui um dos campos mais desafiadores do currículo de Matemática, seja em decorrência de lacunas formativas acumuladas ao longo da escolarização, seja pelas dificuldades inerentes aos processos de visualização e à transição entre representações bidimensionais e tridimensionais. De modo geral, as pesquisas sugerem que tais dificuldades não se restringem aos conteúdos em si, mas estão fortemente relacionadas às abordagens metodológicas adotadas. Quando o ensino se limita à aplicação mecânica de fórmulas e exercícios repetitivos, tende a reforçar o caráter abstrato dos conceitos e a reduzir o engajamento dos estudantes. Em contrapartida, os estudos apontam para a necessidade de estratégias que promovam a Geometria Espacial como uma experiência investigativa, exploratória e significativa, fundamentada na visualização, na manipulação e na resolução de problemas (Queiros et al., 2022; Rodrigues et al., 2024; Santiago; Santana, 2024).

No que se refere aos objetivos das pesquisas analisadas, observa-se uma predominância de estudos voltados à proposição, implementação e avaliação de intervenções didáticas destinadas a favorecer a aprendizagem em Geometria Espacial por meio de diferentes recursos pedagógicos, como tecnologias digitais, materiais manipuláveis e metodologias ativas, incluindo investigação, Modelagem Matemática e resolução de problemas. Nesse conjunto, destacam-se dois grupos principais: o primeiro reúne pesquisas desenvolvidas diretamente com estudantes, direcionadas à aprendizagem de conteúdos específicos da Geometria Espacial; o segundo concentra-se na formação de professores, abordando a elaboração de tarefas didáticas e o desenvolvimento de conhecimentos profissionais necessários ao ensino da Geometria com suporte tecnológico. Essa distinção evidencia que os desafios relacionados ao ensino da Geometria Espacial não se restringem aos estudantes, mas também envolvem a formação docente e a qualidade das tarefas propostas em sala de aula (Lecrer; Pazuch, 2021; Santiago; Santana, 2024; Silva; Faria, 2023).

Em relação aos conteúdos abordados, verifica-se uma concentração em temas tradicionalmente presentes no currículo escolar, como áreas e volumes de sólidos geométricos — prismas, pirâmides, cilindros e cones —, além de poliedros e conteúdos relacionados à visualização espacial, como vistas, planificações e manipulação de sólidos. Nos estudos que incorporam tecnologias digitais, observa-se maior ênfase na construção e exploração de sólidos em ambientes dinâmicos, especialmente por meio do *GeoGebra 3D* e de dispositivos móveis, bem como na abordagem de conteúdos menos frequentes nas práticas escolares, tais como rotações, projeções, vistas e sólidos de revolução. Já as pesquisas fundamentadas na Modelagem Matemática tendem a selecionar conteúdos vinculados a situações-problema

contextualizadas e a demandas específicas de cursos técnicos, evidenciando uma preocupação com a aplicação dos conceitos matemáticos em contextos reais (Queiros et al., 2022; Amorim; Reis; Ferreira, 2024; Silva; Faria, 2023; Oliveira; Silva; Bissaco, 2021; Rossim, 2021).

Apesar dos avanços identificados, o panorama analisado revela uma lacuna relevante no tratamento de conteúdos de maior complexidade da Geometria Espacial, como seções planas, interseções entre sólidos, Geometria Analítica Espacial, vetores no espaço e processos de argumentação e demonstração em ambientes tridimensionais. Mesmo quando conteúdos relacionados às transformações espaciais são abordados, geralmente recebem enfoque voltado à visualização e à interação, com menor aprofundamento teórico. Tal cenário sugere a necessidade de investigações que ampliem o repertório temático explorado e promovam trajetórias de aprendizagem mais abrangentes, articulando visualização, argumentação e formalização matemática (Queiros et al., 2022; Santiago; Santana, 2024; Lentz et al., 2017).

Quanto às metodologias empregadas, predomina a abordagem qualitativa, frequentemente materializada em relatos de experiência, propostas didáticas, pesquisas exploratórias e estudos aplicados. Parte das investigações fundamenta-se em referenciais da Didática da Matemática e do ensino investigativo, como a Engenharia Didática e a Sequência Fedathi. Outros estudos adotam a Modelagem Matemática e a Etnomodelagem como referenciais para a escolha dos contextos, a formulação de problemas e o desenvolvimento dos processos de matematização. Entre os trabalhos que utilizam tecnologias digitais, destaca-se a valorização da exploração, da manipulação e do debate como elementos centrais da atividade matemática. Embora os resultados sejam promissores, observa-se que muitas pesquisas ainda se apoiam em delineamentos metodológicos específicos e pouco comparáveis entre si, o que limita a generalização de seus resultados (Santiago; Santana, 2024; Lecrer; Pazuch, 2021; Silva; Faria, 2023; Reges et al., 2020).

Outro aspecto recorrente nas produções analisadas refere-se à centralidade das tarefas didáticas como elemento estruturador dos processos de ensino e aprendizagem. Em propostas que envolvem oficinas, sequências didáticas, atividades investigativas, jogos digitais ou Modelagem Matemática, o envolvimento dos estudantes está fortemente relacionado à natureza das tarefas propostas, ao grau de orientação oferecido, às representações mobilizadas e às intervenções realizadas pelo professor durante o desenvolvimento das atividades. Nos estudos voltados à formação docente, destaca-se que a elaboração de tarefas investigativas, especialmente com apoio de tecnologias digitais, demanda conhecimentos específicos e processos colaborativos entre professores. Tais evidências reforçam a necessidade de aprofundar as pesquisas sobre o planejamento de tarefas e a mediação docente como fatores

determinantes para a aprendizagem matemática (Lecrer; Pazuch, 2021; Silva; Faria, 2023; Santiago; Santana, 2024).

A análise dos estudos também evidencia limitações na articulação entre Modelagem Matemática e tecnologias digitais. Embora as pesquisas enfatizem a contextualização e a investigação como elementos centrais do processo de aprendizagem, nem sempre ocorre uma integração efetiva entre a modelagem e os ambientes digitais tridimensionais. Em muitos casos, as tecnologias são utilizadas predominantemente como recursos de visualização e manipulação, enquanto a Modelagem Matemática permanece associada à interpretação e matematização de situações reais. Dessa forma, observa-se um espaço promissor para investigações que integrem, de maneira mais consistente, processos de modelagem, construção de modelos geométricos em ambientes digitais, comparação de estratégias e validação de resultados (Oliveira; Silva; Bissaco, 2021; Rossim, 2021; Amorim; Reis; Ferreira, 2024; Silva; Faria, 2023).

Outro aspecto amplamente valorizado nas pesquisas refere-se ao desenvolvimento da visualização espacial. Recursos como materiais manipuláveis, *GeoGebra 3D*, realidade aumentada e jogos digitais são frequentemente apresentados como alternativas para aproximar os estudantes dos objetos tridimensionais e de suas representações. Entretanto, embora haja consenso sobre a importância da visualização, ainda são limitadas as discussões acerca de como essa habilidade se converte em compreensão conceitual, argumentação matemática e formalização de conceitos. Nesse sentido, torna-se relevante ampliar as investigações que examinem as relações entre percepção visual, descrição matemática, argumentação e generalização no contexto da Geometria Espacial (Rodrigues et al., 2024; Amorim; Reis; Ferreira, 2024; Queiros et al., 2022; Silva; Faria, 2023).

Por fim, as produções analisadas apontam algumas direções relevantes para futuras pesquisas. Entre elas, destacam-se a ampliação do repertório de conteúdos explorados na Geometria Espacial, a diversificação dos delineamentos metodológicos, o aprofundamento dos estudos sobre mediação docente e elaboração de tarefas, bem como a investigação de aspectos relacionados à implementação dessas propostas em contextos escolares reais. Tais perspectivas reforçam a necessidade de pesquisas que contribuam para consolidar práticas pedagógicas sustentáveis e transferíveis para diferentes realidades educacionais, fortalecendo o ensino de Geometria Espacial por meio de abordagens investigativas e contextualizadas (Lecrer; Pazuch, 2021; Santiago; Santana, 2024; Queiros et al., 2022; Reges et al., 2020; Lentz et al., 2017).

4.2 DIAGNÓSTICO INICIAL: ANÁLISE DO PRÉ-TESTE

A análise do pré-teste diagnóstico teve como foco a compreensão das dificuldades iniciais apresentadas pelos estudantes em Geometria Espacial, considerando tanto aspectos conceituais quanto interpretativos. Os dados obtidos permitiram identificar padrões de desempenho relacionados à leitura de enunciados, à visualização espacial e à articulação entre diferentes representações geométricas.

Os resultados foram organizados de acordo com os eixos investigados no instrumento, possibilitando uma análise integrada do domínio conceitual, das estratégias utilizadas na resolução das questões e das percepções dos estudantes sobre sua própria aprendizagem.

4.2.1 Análise do Questionário Diagnóstico de Geometria Espacial

Nesta etapa inicial, observou-se uma base conceitual aparentemente consistente, uma vez que a maioria dos discentes identificou corretamente poliedros e corpos redondos, como cubos, cilindros e esferas. Entretanto, a análise qualitativa revelou fragilidades relevantes: três alunos não conseguiram descrever características básicas dos sólidos, e foram registrados casos de confusão entre figuras planas e espaciais, como a utilização do termo “quadrado” em lugar de “cubo”.

Com base na Modelagem Matemática, conforme discutida por Burak (2016), dificuldades na definição terminológica podem indicar práticas de ensino excessivamente mecanizadas, pouco articuladas com situações significativas, nas quais a compreensão do significado e da função dos objetos matemáticos não é priorizada.

Ao solicitar a representação das planificações de cilindros, cones e paralelepípedos, a maioria dos alunos obteve êxito. Ainda assim, erros recorrentes na contagem de faces e na posição relativa das bases evidenciaram que a visualização espacial de parte dos estudantes permanece fragmentada. Tal dificuldade relaciona-se diretamente à Competência 2 da Matriz de Referência do ENEM, que demanda a identificação de características de figuras tridimensionais a partir de representações bidimensionais.

Os itens (c) e (d) configuraram-se como os mais desafiadores da primeira seção. Ao serem instigados a analisar seções planas de um cubo, apenas 28% dos alunos (7 estudantes) identificaram corretamente o paralelepípedo resultante no item (c). No item (d), o índice de acerto elevou-se para 56% (14 alunos), quando reconheceram a formação de uma pirâmide ou de um prisma triangular.

Esses resultados indicam que as dificuldades observadas não se restringem à memorização de fórmulas, mas estão associadas à capacidade de visualização e interpretação

espacial. Conforme destaca Bassanezi (2002), a Modelagem Matemática pressupõe uma postura ativa do estudante, na qual a compreensão da situação-problema antecede a formalização matemática.

Encerrando o exercício, o item (e) abordou uma aplicação do Teorema de Euler ($V - A + F = 2$), apresentando desempenho satisfatório, com 72% de acertos (18 alunos). Embora positivo, esse resultado evidencia um contraste relevante: os alunos demonstram maior segurança na aplicação de algoritmos previamente conhecidos do que na resolução de situações que exigem abstração geométrica e construção de modelos.

Para fins de síntese, a Tabela 1 apresenta as habilidades avaliadas no exercício, os percentuais de acerto e observações relacionadas à aprendizagem dos estudantes.

Tabela 1 – Desempenho dos alunos no Exercício 01 do Pré-Teste

Item do Exercício 01	Habilidade Avaliada	Desempenho (Acertos)	Observação Principal
(a) Identificação	Reconhecimento de Sólidos	88%	Confusão entre figuras planas e espaciais.
(b) Planificação	Representação Bidimensional	92%	Dificuldade pontual na estrutura das faces.
(c) Secção I	Visualização Espacial (Corte)	28%	Ponto crítico: dificuldade em imaginar o corte.
(d) Secção II	Visualização Espacial (Diagonal)	56%	Melhor desempenho que o item anterior.
(e) Euler	Aplicação de Relações Métricas	72%	Domínio técnico da fórmula $V - A + F = 2$.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

O diagnóstico do Exercício 01 indica que práticas de ensino tradicionais têm privilegiado procedimentos algorítmicos em detrimento do desenvolvimento da percepção e da visualização espacial. A proposta de Modelagem Matemática apresentada na sequência busca justamente minimizar essa lacuna, ao explorar situações do cotidiano que possibilitem compreender a Geometria Espacial não apenas como um conjunto de figuras abstratas, mas como uma forma de interpretar estruturas presentes no mundo físico.

Dando continuidade ao diagnóstico, a segunda seção do pré-teste avançou para a análise da competência métrica e da capacidade de transposição entre diferentes registros de representação. Enquanto o primeiro exercício esteve centrado na identificação de sólidos, os exercícios subsequentes exigiram que os alunos mobilizassem relações entre áreas e volumes em níveis crescentes de complexidade. Os resultados evidenciam um padrão recorrente: embora os estudantes demonstrem segurança na aplicação de algoritmos isolados, apresentam dificuldades quando a situação-problema requer uma visão integrada ou a construção de um modelo próprio.

No Exercício 02, que utilizou a representação da forma de um bolo em formato de paralelepípedo, observou-se desempenho desigual entre os itens. Os cálculos da área da base e do volume apresentaram índices de acerto de 92% (23 alunos) e 88% (22 alunos), respectivamente. Entretanto, ao serem solicitados a determinar a área total do sólido, o índice de acerto reduziu-se para 56%. Esse resultado sugere uma compreensão fragmentada do objeto geométrico, na qual o domínio da fórmula do volume não se traduz na capacidade de analisar sua superfície total, indicando fragilidade na fase de idealização do modelo matemático.

Essa dificuldade tornou-se ainda mais evidente no Exercício 03, que abordou uma embalagem cilíndrica. Embora 64% dos alunos (16 estudantes) tenham calculado corretamente o volume, apenas 36% (9 alunos) obtiveram êxito no cálculo da área da base, e somente 16% (4 alunos) determinaram corretamente a área total do cilindro. Esses dados reforçam a importância de estratégias que promovam a participação ativa dos estudantes na construção do conhecimento, conforme defende Burak (1992). Nesse contexto, a dificuldade em compreender a planificação da face lateral do cilindro evidencia as limitações de abordagens centradas apenas na memorização de fórmulas.

O maior nível de defasagem foi observado no Exercício 04, que explorou a razão entre o volume de uma pirâmide e o de um cubo. Com apenas 28% de acertos (7 alunos), esse exercício evidenciou dificuldades relacionadas à comparação de grandezas e às relações métricas entre sólidos inscritos, habilidades que ainda não se mostram consolidadas ao final da educação básica.

Por fim, o Exercício 05 apresentou uma situação contextualizada nos moldes do ENEM, envolvendo um silo composto por um cilindro e uma semiesfera. Embora a complexidade geométrica fosse maior, o índice de acerto alcançou 44% (11 alunos), superando o exercício anterior. Esse resultado sugere que a contextualização favorece o engajamento interpretativo dos estudantes, ainda que persistam dificuldades na integração de diferentes fórmulas e na conversão de unidades.

Em síntese, os resultados indicam que os alunos dispõem de conhecimentos procedimentais básicos, mas apresentam limitações na capacidade de modelar situações-problema, o que reforça a necessidade de intervenções pedagógicas pautadas na Modelagem Matemática, capazes de promover a articulação entre conceitos e a construção de significados em Geometria Espacial. A Tabela 2 apresenta o desempenho dos estudantes nos Exercícios 02 a 05 do pré-teste

Tabela 2 – Desempenho Estatístico Consolidado (Exercícios 02 ao 05)

Exercício	Objeto de Estudo	Habilidade Principal	Nível de Acerto (%)
-----------	------------------	----------------------	---------------------

02	Paralelepípedo	Área Total e Volume	56% - 88%
03	Cilindro	Superfície Total e Capacidade	16% - 64%
04	Pirâmide no Cubo	Relação de Volumes (Razão)	28%
05	Silo Composto	Modelagem de Sólidos	44%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Ao analisar esses quatro exercícios, percebe-se que os estudantes enfrentam o que podemos chamar de "Matemática de Compartimentos". Ele guarda a fórmula do volume em uma gaveta e a conversão de medidas em outra, mas raramente consegue abrir ambas simultaneamente para resolver um problema complexo.

A proposta de intervenção desta dissertação, portanto, não visa ensinar "novas fórmulas", mas sim oferecer a Modelagem Matemática como a ferramenta de integração. Como afirma Burak et al. (2016), a modelagem permite que o aluno "investigue o problema sob sua ótica", tornando o erro de interpretação uma etapa do aprendizado, e não um fracasso final. Essa transição é essencial para que o estudante não apenas enfrente o ENEM com confiança, mas desenvolva o letramento matemático necessário para sua vida cidadã.

A última seção do diagnóstico foi composta exclusivamente por questões adaptadas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), elevando o nível de exigência para a competência de leitura e a capacidade de converter situações do cotidiano em modelos matemáticos. Os resultados obtidos nos exercícios 06 ao 10 evidenciam que, quando a matemática é apresentada de forma contextualizada e exige múltiplas etapas de raciocínio, o desempenho dos alunos tende a sofrer uma oscilação significativa, revelando lacunas na interpretação de enunciados complexos.

No Exercício 06, que abordou a relação entre capacidade e volume de cilindros, registrou-se o maior índice de aproveitamento deste bloco, com 36% de acertos (9 alunos). Diferente de questões puramente contemplativas, este exercício exigiu que o estudante operasse com as variáveis de raio e altura para determinar o volume final. O sucesso da minoria indica que os discentes possuem relativa segurança quando os modelos que envolvem figuras circulares de aplicação direta. No entanto, a falha dos 64% restantes revela, conforme as reflexões de Burak (1992), que a dificuldade surge na etapa de idealização: o aluno conhece a fórmula, mas hesita em como os parâmetros (como a altura ou o raio) influenciam proporcionalmente a capacidade do sólido.

Prosseguindo para o Exercício 07, o foco mudou para o estudo de Troncos de Cone e Sólidos Compostos, onde o desempenho recuou para 32%. Aqui, a complexidade de decompor a figura em partes menores — subtraindo volumes para encontrar a região desejada — atuou como um filtro cognitivo. Sob a ótica de Bassanezi (2002), esse resultado demonstra que o

aluno tem dificuldade em construir um "roteiro de resolução" (algoritmo de modelagem) quando o problema exige mais de um passo lógico.

Os Exercícios 08 e 09 consolidaram grandes lacunas do diagnóstico. No Exercício 08, que tratava da Variação de Volume em Cones, o índice de 40% mostrou que a manipulação de razões e proporções em figuras cônicas ainda é possível determinar. Já o Exercício 09, focado no Volume de Laje e Otimização Lógica, apresentou o rendimento crítico no teste, consolidando 48% de acertos com 12 alunos. Como este problema exige converter o volume geométrico em uma decisão logística (quantidade de caminhões), ele exemplifica a falha na "fase de tradução" da Modelagem Matemática. O aluno perde-se ao tentar conectar a matemática pura à necessidade prática do enunciado.

Finalizando a seção, o Exercício 10 utilizou o conceito de Volume por Deslocamento de Líquido, atingindo 44% de acertos. O fato de menos da metade da turma conseguir relacionar o aumento do nível da água ao volume do objeto submerso confirma que a Geometria Espacial ainda é vista como um conteúdo de fórmulas abstratas, e não como uma ferramenta para compreender fenômenos físicos. Em síntese, os dados dos Exercícios 06 a 10 validam a necessidade de uma intervenção que utilize a Modelagem Matemática para transformar o "saber calcular" em "saber interpretar e decidir".

Na tabela abaixo estipulamos a classificação quanto ao domínio das habilidades do ENEM numa escala para número de acertos da turma com os seguintes níveis de classificação: 0% a 39% (Insuficiente) - O aluno não consegue identificar o modelo matemático necessário. Apresenta dificuldades severas em converter o enunciado em equações. 40% a 59% (Crítico) - Conhece as fórmulas, mas falha na execução de processos intermediários ou no uso de teoremas auxiliares. 60% a 79% (Intermediário) - Domina o conteúdo de figuras isoladas (cilindros, prismas) e resolve problemas de aplicação direta com sucesso. 80% a 100% (Adequado) - Demonstra plena capacidade de modelagem. Consegue decompor sólidos compostos e realizar conversões de unidades com autonomia.

Tabela 3 – Desempenho e Matriz de Competências ENEM (Exercícios 06 a 10)

Exercício	Tópico Real da Questão	Habilidade ENEM (Foco)	Acertos (%)	Classificação
6	Capacidade e Volume de Cilindros	H12: Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.	36%	Insuficiente
7	Tronco de Cone e Sólidos Compostos	H13: Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.	32%	Insuficiente
8	Variação de Volume em Cones	H10: Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.	40%	Crítico
9	Cálculo de Volume e Capacidade de Laje	H12: Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.	48%	Crítico

10	Volume por Deslocamento de Líquido	H12: Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.	44%	Crítico
-----------	------------------------------------	---	-----	----------------

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Como síntese final do pré-teste, fica demonstrado que os alunos apresentam defasagens no conhecimento, principalmente quando se deparam com a complexidade das questões do ENEM. O nível médio de acerto foi de 40% nos exercícios de 6 a 10, indicando que, no contexto da pesquisa, a modelagem matemática está fortemente inserida nas demandas propostas, o que exige dos estudantes a mobilização de diferentes conhecimentos e habilidades.

A Modelagem Matemática, portanto, apresenta-se não apenas como um conteúdo extra, mas como a ferramenta necessária para integrar o raciocínio espacial à resolução de problemas reais, transformando a percepção passiva em uma competência ativa de interpretação da realidade.

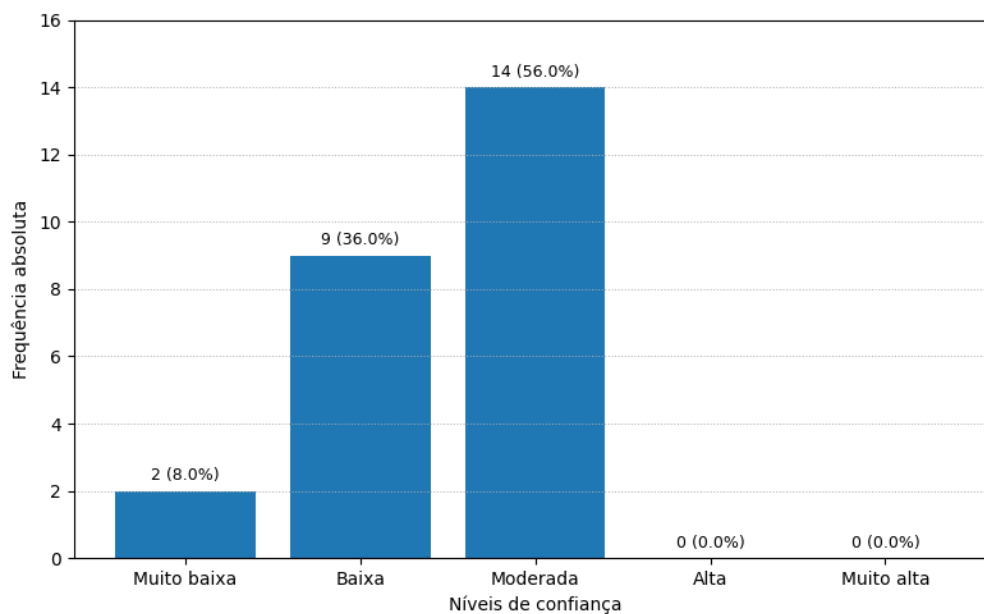
Esta foi uma análise minuciosa da primeira parte do pré-teste, evidenciando, pontos essenciais, quanto as respostas apresentadas pelos estudantes. Na sequência, será realizada a análise da segunda parte do pré-teste, por meio do Instrumento de Pesquisa: Dificuldades de Aprendizagem em Geometria Espacial, com o objetivo de aprofundar a compreensão sobre os principais obstáculos enfrentados pelos alunos nesse conteúdo.

4.2.2 Análise dos Resultados do Pré-teste: Percepções e Dificuldades em Geometria Espacial

A aplicação do pré-teste revelou um cenário diagnóstico crítico em relação ao domínio da Geometria Espacial pelos discentes, evidenciando lacunas que justificam a busca por metodologias alternativas, neste estudo como exemplo a Modelagem Matemática. A análise dos dados é importante para termos noção de como o aluno se sente no momento das relações socioemocionais durante seus estudos.

Um dos pontos centrais é o baixo nível de confiança dos alunos. Nenhum estudante relatou alta ou muito alta confiança para resolver problemas da área. A maioria (14 alunos) possui confiança moderada, enquanto uma parcela significativa (11 alunos) situa-se nos níveis: baixo ou muito baixo.

Gráfico 1 – Distribuição do nível de confiança dos estudantes na resolução de problemas de Geometria Espacial



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Nas justificativas apresentadas, os alunos atribuem essa insegurança à falta de memorização de fórmulas e à ausência de conceitos básicos. Veja abaixo alguns recortes que da Seção 1: Percepção Geral sobre o Conteúdo, onde três discentes explicam seu nível de confiança para resolver problemas de Geometria Espacial e dificuldades neste conteúdo.

Figura 5 – Registros escritos dos estudantes sobre o nível de confiança e as dificuldades iniciais em Geometria Espacial (pré-teste)

Seção 1: Percepção Geral sobre o Conteúdo

Questão 1.1. Qual seu nível de confiança para resolver problemas de Geometria Espacial (cálculo de volumes, áreas de superfície, e identificação de elementos)?

☒ Muito Baixa ☐ Baixa ☐ Moderada ☐ Alta ☐ Muito Alta

A que você atribui ser esse nível de confiança na resolução de problemas de Geometria Espacial?

Porque não tenho prática com esse conteúdo

Questão 1.2. Você apresenta dificuldades no conteúdo de Geometria Espacial (conceitos básicos e classificação de sólidos, visualização espacial, cálculo de medidas)? Justifique sua resposta.

☒ Sim ☐ Não

Porque como não tenho domínio do básico, fica difícil aprender conteúdos mais demandados que não muito complexos.

Seção 1: Percepção Geral sobre o Conteúdo

Questão 1.1. Qual seu nível de confiança para resolver problemas de Geometria Espacial (cálculo de volumes, áreas de superfície, e identificação de elementos)?

☐ Muito Baixa ☒ Baixa ☐ Moderada ☐ Alta ☐ Muito Alta

A que você atribui ser esse nível de confiança na resolução de problemas de Geometria Espacial?

Tenho muita dificuldade para lembrar as fórmulas e aplicá-las.

Questão 1.2. Você apresenta dificuldades no conteúdo de Geometria Espacial (conceitos básicos e classificação de sólidos, visualização espacial, cálculo de medidas)? Justifique sua resposta.

☒ Sim ☐ Não

Tenho dificuldade de classificar os sólidos e calcular usando alguma fórmula.

Seção 1: Percepção Geral sobre o Conteúdo

Questão 1.1. Qual seu nível de confiança para resolver problemas de Geometria Espacial (cálculo de volumes, áreas de superfície, e identificação de elementos)?

☐ Muito Baixa ☐ Baixa ☒ Moderada ☐ Alta ☐ Muito Alta

A que você atribui ser esse nível de confiança na resolução de problemas de Geometria Espacial?

Porque eu consigo resolver esses problemas porém, muitos das vezes não tenho domínio das fórmulas então eu tento utilizar apenas o meu raciocínio e não atiro o sólido do que eu estou fazendo

Questão 1.2. Você apresenta dificuldades no conteúdo de Geometria Espacial (conceitos básicos e classificação de sólidos, visualização espacial, cálculo de medidas)? Justifique sua resposta.

☒ Sim ☐ Não

Dificuldade por conta da falta de domínio nas fórmulas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

As respostas apresentadas nas imagens reforçam as análises anteriores, ao evidenciarem que a insegurança dos estudantes em Geometria Espacial decorre, em grande medida, da fragilidade no domínio de conceitos básicos, como a classificação dos sólidos e a visualização espacial. Conforme observado na primeira imagem, a ausência dessa base conceitual compromete o cálculo de medidas e volumes, que passa a ser realizado de forma excessivamente abstrata, dificultando sua retenção e compreensão. Essa lacuna conceitual tende a limitar o avanço do aluno em conteúdos mais complexos, uma vez que ele não consegue estabelecer relações entre as propriedades das figuras planas e as estruturas espaciais.

Ademais, a análise da segunda e da terceira imagens indica que a resolução de problemas é frequentemente percebida pelos estudantes como um processo mecânico de substituição de valores em fórmulas previamente estabelecidas. Ainda que o aluno tente mobilizar seu próprio raciocínio, a ausência de uma fórmula explícita pode gerar insegurança quanto à validade de sua resposta. Esse cenário sugere que a ênfase na memorização tende a fragilizar a confiança no pensamento lógico, resultando em um aprendizado predominantemente procedimental e dependente de regras decoradas.

Esse resultado é corroborado pela Questão 2.4, na qual a memorização de fórmulas de volume e área aparece como a principal dificuldade técnica apontada pelos estudantes, assim como a incerteza quanto à escolha da fórmula adequada para cada situação-problema. Tais evidências indicam que práticas de ensino centradas na repetição algorítmica têm se mostrado insuficientes para promover uma compreensão conceitual mais profunda, tornando o desempenho dos alunos fortemente dependente da memória de curto prazo.

O instrumento aplicado revelou ainda que as dificuldades relacionadas ao cálculo de medidas estão associadas, sobretudo, à transição entre o abstrato e o concreto. A visualização espacial destaca-se como um dos principais obstáculos, especialmente no que se refere à antecipação de seções transversais e à aplicação contextualizada dos conceitos geométricos. Observa-se que o desafio não reside apenas na memorização das fórmulas, mas, principalmente, em seu uso adequado em situações práticas, como no discernimento entre área lateral e área total de um sólido.

Esses resultados indicam que, embora os alunos consigam, em alguns casos, identificar corretamente os sólidos geométricos, apresentam dificuldades em traduzir a situação real para a linguagem matemática, processo fundamental no contexto da Modelagem Matemática.

Observa-se ainda que, apesar da ampliação e modernização dos recursos tecnológicos disponíveis, a maioria dos alunos ainda considera as aulas expositivas e a resolução de exercícios no quadro como os recursos didáticos mais eficazes para a aprendizagem. A Tabela 4 apresenta os recursos didáticos indicados pelos estudantes.

Tabela 4 – Recursos didáticos considerados mais úteis em Geometria Espacial

Recurso didático	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
Aulas expositivas e resolução de exercícios no quadro	17	68,0%
Uso de materiais concretos (modelos de sólidos, massinha, etc.)	5	20,0%
Softwares de geometria dinâmica (exemplo.: GeoGebra 3D)	2	8,0%
Vídeos e animações (rotação e planificação dos sólidos)	1	4,0%

Apostilas e livros didáticos com boas imagens	0	0,0%
Total	25	100%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Os dados indicam que a predominância das aulas expositivas reflete uma dependência de práticas pedagógicas tradicionais, nas quais o aluno tende a buscar no quadro a validação de suas dificuldades e respostas. Por outro lado, parte dos estudantes aponta a relevância da diversificação dos recursos didáticos, reconhecendo que o uso de materiais concretos e de *softwares* educacionais pode contribuir para a superação de obstáculos relacionados à aprendizagem e à visualização dos conceitos geométricos.

No contexto específico do ENEM, a percepção de dificuldade mostra-se elevada. A maioria dos alunos reconhece que a Geometria Espacial demanda maior tempo de estudo, em função de sua complexidade conceitual e da necessidade de articular diferentes representações. A Figura X apresenta a percepção dos estudantes acerca dos principais desafios enfrentados na resolução de questões de Geometria Espacial no exame.

Tabela 5 – Principais desafios enfrentados pelos alunos na resolução de questões de Geometria Espacial do ENEM

Desafio identificado	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
Pressão do tempo para realizar cálculos complexos	7	28,0
Dificuldade em visualizar a situação descrita no enunciado	4	16,0
Necessidade de recorrer a teoremas auxiliares antes de aplicar a fórmula principal	10	40,0
Presença de muitas informações desnecessárias que confundem a interpretação	4	16,0
Total	25	100,0

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Os dados coletados indicam que a interdisciplinaridade constitui o principal desafio enfrentado pelos estudantes em questões de Geometria Espacial no ENEM. A dificuldade concentra-se, sobretudo, na articulação desses conteúdos com outros tópicos matemáticos, como razão, proporção e escala, o que frequentemente exige a mobilização de conceitos e teoremas auxiliares antes da aplicação das fórmulas específicas. Além disso, a pressão do tempo para a realização de cálculos considerados complexos emerge como um fator relevante, demandando não apenas domínio conceitual, mas também agilidade cognitiva.

As dificuldades relacionadas à interpretação dos enunciados e à tradução das situações-problema para a linguagem matemática evidenciam a existência de uma lacuna entre o conhecimento teórico e sua aplicação em contextos avaliativos. Nesse sentido, a Modelagem Matemática apresenta-se como uma estratégia pedagógica pertinente, ao favorecer a construção de significados e a compreensão da Matemática como uma ferramenta de análise e interpretação da realidade.

4.3 VIVÊNCIA DA MODELAGEM: RELATO DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Esta seção analisa a aplicação da sequência didática fundamentada na Modelagem Matemática, desenvolvida com uma turma da 3ª série do Ensino Médio, conforme descrito no Capítulo 3. A análise concentra-se no processo de construção e validação de modelos matemáticos e físicos, bem como nas estratégias adotadas e nos principais avanços observados ao longo da intervenção pedagógica.

Com o objetivo de contextualizar a análise, apresenta-se inicialmente um quadro-síntese das produções desenvolvidas pelos grupos, contemplando as situações-problema investigadas, os modelos matemáticos mobilizados e os modelos físicos construídos. Esse panorama geral subsidia a análise detalhada apresentada nos subtópicos subsequentes.

Quadro 6 – Síntese das Produções dos Grupos na Sequência Didática

Grupo	Situação-problema (ENEM)	Modelo matemático explorado	Modelo físico construído	Estratégias e aspectos relevantes para análise
Grupo 1	Armazenamento em silo	Cálculo de volume de sólido composto (cilindro + cone)	Silo tridimensional confeccionado em escala reduzida com materiais de baixo custo	Decomposição correta do sólido; boa articulação entre fórmulas; validação experimental com pequena discrepância atribuída a erros de medição.
Grupo 2	Empacotamento de objetos	Estimativa de volume e razão de ocupação	Recipiente com bolinhas representando empacotamento	Discussão sobre espaços vazios e eficiência do empacotamento; discrepâncias entre modelo teórico e experimental analisadas criticamente.
Grupo 3	Redução de volume em cone	Proporcionalidade e variação dimensional	Cones com dimensões diferentes	Dificuldades iniciais na relação entre dimensões lineares e volume; superação a partir da visualização e do uso do modelo físico.
Grupo 4	Comparação de volumes de cilindros	Razão entre volumes e escalonamento	Conjunto de cilindros de diferentes dimensões	Boa compreensão das relações métricas; destaque para a análise comparativa e argumentação matemática durante a socialização.

Fonte: Elaboração do autor, 2026.

A partir dessa visão geral das produções desenvolvidas pelos grupos, a análise passa a focalizar a etapa inicial da intervenção, na qual foram definidos os encaminhamentos didáticos que orientaram o desenvolvimento do processo de modelagem. Essa etapa mostrou-se determinante tanto para a mobilização dos conhecimentos prévios dos estudantes quanto para a compreensão da proposta metodológica adotada.

Desse modo, a seção seguinte analisa as discussões iniciais realizadas em sala de aula e a organização dos procedimentos didáticos que fundamentaram as etapas subsequentes da sequência didática.

4.3.1 Discussões iniciais para Procedimentos Didáticos

A sequência didática teve início com uma etapa de sensibilização, cujo objetivo foi desconstruir a visão da Matemática como uma disciplina puramente abstrata e mecânica. Para tal, foi apresentado aos alunos o vídeo intitulado "O que é Modelagem Matemática?".

A exibição do vídeo serviu como um gatilho para uma discussão coletiva mediada pelo pesquisador. Durante este debate, os estudantes foram instigados a refletir sobre como problemas do cotidiano podem ser traduzidos em equações e modelos. Os alunos puderam expressar suas concepções prévias, percebendo que modelar não é apenas aplicar fórmulas, mas sim um processo de investigação que envolve escolha de variáveis, simplificações e, sobretudo, a validação dos resultados em relação ao mundo real.

A percepção dos estudantes sobre o papel da modelagem foi evidenciada no relato de um dos participantes:

A modelagem matemática é uma forma de usar a matemática para representar situações da vida real, o que ajuda a entender melhor os conteúdos e a resolver problemas do dia a dia, mostrando que a matemática está presente em várias situações fora da sala de aula. (Estudante A, 2025).

Ainda na discussão coletiva gerada pelo vídeo introdutório revelou que os estudantes compreenderam a modelagem não como uma ferramenta meramente operacional, mas como um processo cognitivo de observação e interpretação da realidade. O Estudante B sintetizou essa visão ao destacar a transição entre a matemática escolar e a aplicada:

O vídeo mostra que a matemática não é só fazer contas, mas também uma forma de entender melhor as coisas que acontecem à nossa volta. O vídeo sobre a modelagem ajuda a observar uma situação, às vezes usar a matemática para explicar e chegar em uma certa conclusão. (Estudante B, 2025).

Essa fala corrobora a compreensão de que a Modelagem Matemática atua como um “filtro” analítico no processo de aprendizagem. A partir do relato, é possível identificar três etapas essenciais do ciclo de modelagem: a observação, correspondente à percepção do fenômeno no cotidiano; a explicação, associada ao uso da linguagem matemática para traduzir a situação por meio da abstração; e a conclusão, caracterizada pelo retorno à realidade com uma resposta ou solução matematicamente fundamentada.

A convergência entre os depoimentos dos estudantes A e B indica que a etapa de sensibilização foi bem-sucedida em estabelecer o "contrato didático" necessário para as atividades práticas que se seguiram com as questões do ENEM.

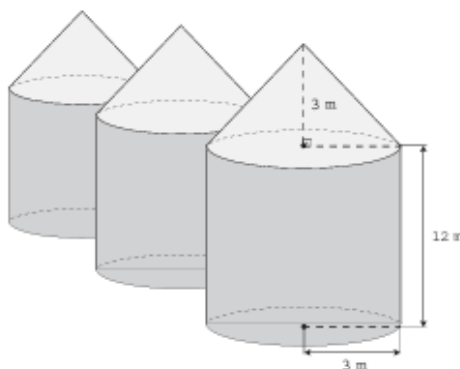
Após a discussão teórica inicial, com os quatro grupos de trabalho foi garantido o engajamento e a autonomia. Cada grupo responsável por uma questão distinta do ENEM, fizeram, a abstração matemática (resolução analítica da questão); em seguida a construção do modelo físico (maquetes e protótipos) para validação prática dos resultados. Cada grupo recebeu o kit de materiais (papel cartão, isopor, balança de precisão, grãos, etc.) e a missão de preparar uma apresentação final para compartilhar suas descobertas com a turma.

4.3.2 Grupo 1 – Modelo Matemático: O Problema do Silo de Grãos

Figura 6 - Questão 136 (ENEM 2016 – Caderno Azul)

QUESTÃO 136

Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

- A** 6.
- B** 16.
- C** 17.
- D** 18.
- E** 21.

Fonte: INEP, 2016.

Para a análise do primeiro grupo de modelagem, a transposição da realidade agrícola para o modelo matemático exigiu a compreensão de que o silo não é um sólido único elementar,

mas uma composição de dois corpos de revolução. A construção do modelo seguiu as etapas de identificação de variáveis, modelagem geométrica e cálculo de fluxo (transporte).

Com base nos dados extraídos da situação-problema (Figura 6), foram definidos os seguintes parâmetros:

- Raio da base comum (r): 3 metros.
- Altura da parte do cilindro (h_1): 12 metros.
- Altura da parte cone (h_2): 3 metros.
- Capacidade do caminhão (K): 20 m³ por viagem.
- π : aproximada como 3.

O volume total do silo (V_{total}) é a soma do volume do cilindro (V_1) e do volume do cone (V_2). O modelo matemático é expresso pela seguinte soma de funções:

$$V_{total} = V_1 + V_2$$

Aplicando as fórmulas de geometria espacial para cada sólido:

(i) Volume do Cilindro: $V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h_1$

(ii) Volume do Cone: $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_2$

Substituindo os valores para encontrar a capacidade máxima de armazenamento:

$$\begin{aligned} V_{total} &= V_1 + V_2 \Rightarrow \\ V_{total} &= (3 \cdot 3^2 \cdot 12) + \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3\right) \Rightarrow \\ V_{total} &= (3 \cdot 9 \cdot 12) + (9 \cdot 3) \Rightarrow \\ V_{total} &= 324 + 27 \Rightarrow \\ V_{total} &= 351 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Após a determinação do volume ocupado pelos grãos, o grupo precisou modelar a logística de transporte. O número de viagens (N) é definido pela razão entre o volume total e a capacidade de carga do caminhão, onde N deve ser necessariamente um número:

$$N = \frac{V_{total}}{K}$$

Ao aplicar os dados ao modelo de transporte:

$$N = \frac{351}{20} = 17,55$$

Como o valor de 17,55 indica que 17 viagens não seriam suficientes para esvaziar o silo completamente (restaria um volume residual), o modelo valida que o número mínimo necessário de viagens é 18.

4.3.2.1 Experimentação e Validação: O Modelo Físico e a Proporcionalidade

Após a formalização teórica, o primeiro grupo procedeu à construção de um protótipo físico (modelo reduzido), etapa essencial para visualizar as propriedades geométricas e validar as previsões do modelo matemático por meio da experimentação direta.

Figura 7 – Construção do modelo físico do silo de grãos construído em escala reduzida



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Para a transposição das dimensões reais para o modelo físico, os alunos utilizaram a razão de semelhança linear baseada na escala 1:50. Os modelos físicos foram confeccionados com o uso de materiais manipuláveis de baixo custo, tais como papel cartão, papel A4, isopor, tinta, régua, compasso, tesoura e cola, escolhidos por sua acessibilidade e adequação à materialização dos sólidos de revolução (cilindro e cone). Conforme destacam Santos et al. (2024), a utilização de recursos acessíveis contribui para a contextualização dos conteúdos e para a construção de experiências de aprendizagem mais significativas.

A escolha da escala 1:50 implica que cada unidade de comprimento no modelo físico corresponde a 50 unidades no real. Matematicamente, para as dimensões lineares L , temos:

$$L_{modelo} = \frac{L_{real}}{50}$$

Foram definidas as seguintes medidas após a aplicação da escala:

- Raio da base comum (r): 6 centímetros.
- Altura da parte do cilindro (h_1): 24 centímetros.

- Altura da parte cone (h_2): 6 centímetros.
- Dimensões definidas para o caminhão: 12,5 cm, 6,4 cm e 2 cm.
- Capacidade do caminhão (K): 160 cm³ por viagem.
- Constante π : Adotada como 3.

Da mesma forma foi aplicado como no modelo anterior com valores obtidos com aplicação da escala, encontrando um volume total de 2808 cm³, logo o número de viagens é dado por $N = \frac{2808}{160} = 17,55$, ou seja, no mínimo 18 viagens. Verificando o poder da escala que mesmo com a aplicação o resultado da questão seria o mesmo.

Uma inovação metodológica do grupo foi a validação por pesagem utilizando uma balança de precisão e arroz como material de preenchimento para simular o volume de grãos. Essa estratégia permitiu substituir a medição direta de volume (em cm³) pela medição de massa (em gramas), fundamentada na propriedade física da densidade (d), assumindo que o arroz possui distribuição homogênea, sendo o volume proporcional à massa.

Figura 8 – Validação experimental do modelo do silo por meio da pesagem do arroz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Os dados coletados experimentalmente foram:

- Massa total do arroz no silo (M_s): 2388 g
- Massa de carga do caminhão (M_c): 133 g

Para validar o número de viagens calculado anteriormente no modelo abstrato ($N = 18$), os alunos realizaram a divisão da massa total pela capacidade unitária do caminhão físico:

$$\frac{M_s}{M_c} = \frac{2388}{133} \approx 17,95g$$

A experimentação prática revelou que seriam necessários 17 caminhões completamente cheios (totalizando 2261 g) e um 18º caminhão para transportar a carga remanescente. O grupo constatou uma massa residual (M_r), que este último transporte levaria exatamente:

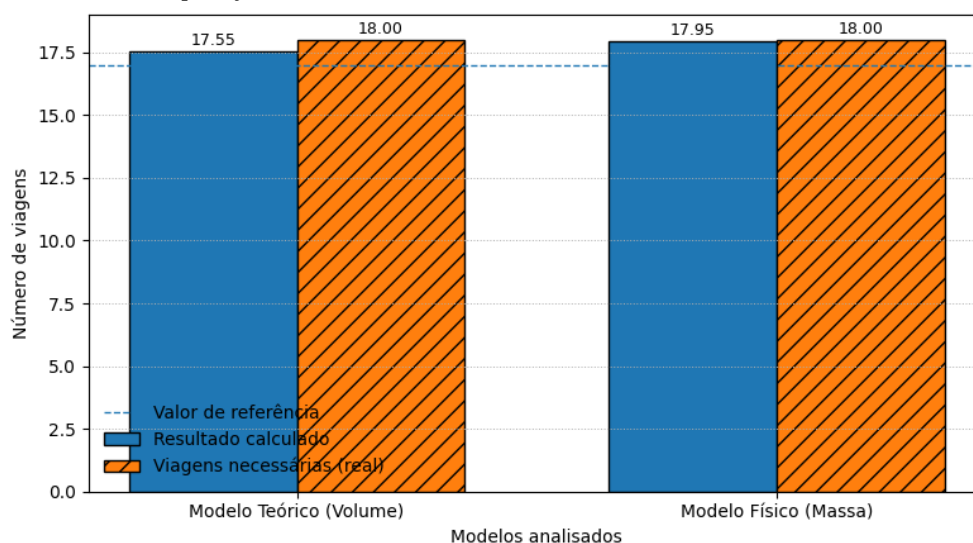
$$M_r = 2388 - (17 \cdot 133) = 119g$$

Em uma análise final o grupo verificou que a massa verificada com a balança (M_v), resultaria em $M_v = 17 \cdot 133 + 119 = 2380g$, ou seja, um valor bem próximo da constatação inicial que era de 2388 g.

Este resultado experimental validou o modelo matemático em vigência. Embora o cálculo puramente matemático tenha resultado em 17,55 viagens (baseado em volume e $\pi = 3$), a prática com a balança de precisão e a densidade real do arroz resultou em um quociente de 17,95. Essa aproximação entre os valores indica a adequação do modelo à situação investigada e aponta para o potencial do uso de materiais concretos no ensino de Geometria, conforme destaca Alcântara et al. (2025, p. 5) afirmam: “Ao propor a utilização de materiais concretos — como papel e arroz para simular o volume — e o trabalho em equipe, a oficina visa transformar a abstração do livro didático (bem como do ensino) em uma experiência visual e tátil.”

Para consolidar a análise da oficina, o gráfico a seguir apresenta a comparação entre os resultados obtidos por meio do modelo teórico-geométrico e do modelo experimental-físico. Verifica-se que, embora as grandezas analisadas possuam naturezas distintas — uma associada ao volume espacial (m^3), com aproximação de π , e a outra à massa gravitacional (g) —, a razão de proporcionalidade manteve-se consistente.

Gráfico 2 – Comparação entre os resultados do modelo matemático e do modelo físico do silo de grãos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Do ponto de vista didático, a atividade possibilitou aos estudantes compreender que a resolução de um problema geométrico contextualizado envolve não apenas a aplicação de fórmulas, mas a construção de um modelo que articula diferentes conceitos matemáticos. A decomposição do silo em sólidos elementares favoreceu a compreensão do volume como grandeza composta, enquanto a necessidade de arredondamento do número de viagens evidenciou a importância da interpretação do resultado matemático à luz do contexto real. A validação experimental, por meio do uso de grãos de arroz e da pesagem em balança de precisão, contribuiu para que os alunos reconhecessem os limites das aproximações adotadas (como o uso de $\pi = 3$) e compreendessem o caráter aproximativo dos modelos matemáticos, conforme destaca Almeida, Silva e Vertuan (2016). Dessa forma, a atividade promoveu uma aprendizagem significativa ao integrar abstração geométrica, tomada de decisão e análise crítica dos resultados.

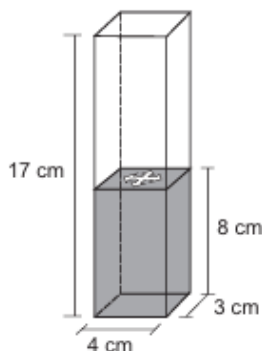
4.3.3 Grupo 2 - O Modelo de Imersão e o Problema do Empacotamento

Figura 9 - Questão 164 (ENEM 2020 – Caderno cinza)

Questão 164

Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água.

Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a 6 cm^3 cada, que ficarão totalmente submersas.



O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de

- A** 14.
- B** 16.
- C** 18.
- D** 30.
- E** 34.

Fonte: INEP, 2020.

O segundo grupo de modelagem trabalhou com o fenômeno de deslocamento de volume por imersão. A situação-problema exigia que o nível da água de um recipiente subisse o suficiente para que um objeto pudesse ser retirado sem o contato direto das mãos com o fluido. A atividade propõe a análise de um recipiente em formato de paralelepípedo reto-retângulo contendo água, no qual a introdução de objetos sólidos totalmente submersos provoca a elevação do nível do líquido.

O grupo iniciou a modelagem definindo as dimensões do sistema, buscando a transposição dos dados para a linguagem algébrica.

- Geometria do Recipiente (Paralelepípedo): Base de 4 cm x 3 cm.
- Altura total do recipiente (h_t): 17 cm
- Altura inicial da água (h_i): 8 cm
- Altura mínima necessária da água para retirar o objeto (h_f): 15 cm
- Volume de cada bolinha (V_b): 6 cm^3

Como todas as esferas devem ficar totalmente submersas, logo deslocam integralmente seu volume de água. A variação de altura da coluna de água é:

$$\Delta_h = 15 - 8 = 7\text{ cm}$$

O aumento do nível da água corresponde a um volume:

$$V_n = A_b \cdot \Delta_h$$

Substituindo:

$$V_n = 12 \cdot 7 = 84\text{ cm}^3$$

Esse volume será fornecido pelo deslocamento causado pelas bolinhas.

Seja n o número de bolinhas. Como cada uma desloca 6 cm^3 , temos:

$$n = \frac{84}{6} = 14$$

A aplicação do modelo matemático permitiu concluir que são necessárias 14 bolinhas (alternativa A) para elevar o nível da água à altura mínima requerida. A atividade evidenciou que a resolução do problema não depende apenas da aplicação direta de fórmulas de volume, mas da articulação entre conceitos geométricos e algébricos, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio espacial dos estudantes.

Matematicamente, os cálculos mostram-se coerentes com a proposta do enunciado, aproximando-se do volume necessário para atingir a marca de 15 cm. No papel, o modelo é perfeitamente funcional.

4.3.3.1 Experimentação e Validação: O Modelo Físico e a Divergência Experimental

Para a validação, o grupo construiu os modelos físicos com as mesmas dimensões apresentadas na questão e para isso utilizou os seguintes materiais alternativos para a construção dos modelos: Garrafa PET (recortada e moldada como paralelepípedo), bola de gude, papel alumínio, pincel, cola adesiva, isopor, tinta, tesoura e régua.

Figura 10 – Construção do modelo físico do recipiente com esferas utilizado na validação experimental



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

As bolas de gude foram cuidadosamente revestidas com papel alumínio para atingir o diâmetro especificado. As esferas ficaram com um diâmetro $d = 2,25 \text{ cm}$ (raio $r = 1,125 \text{ cm}$), valor obtido com a utilização do micrômetro.

A intensão da dimensão da esfera era para que o volume se aproximasse do volume especificas da bolinha (6 cm^3). Considerando a aproximação de $\pi = 3$, o volume de uma esfera é:

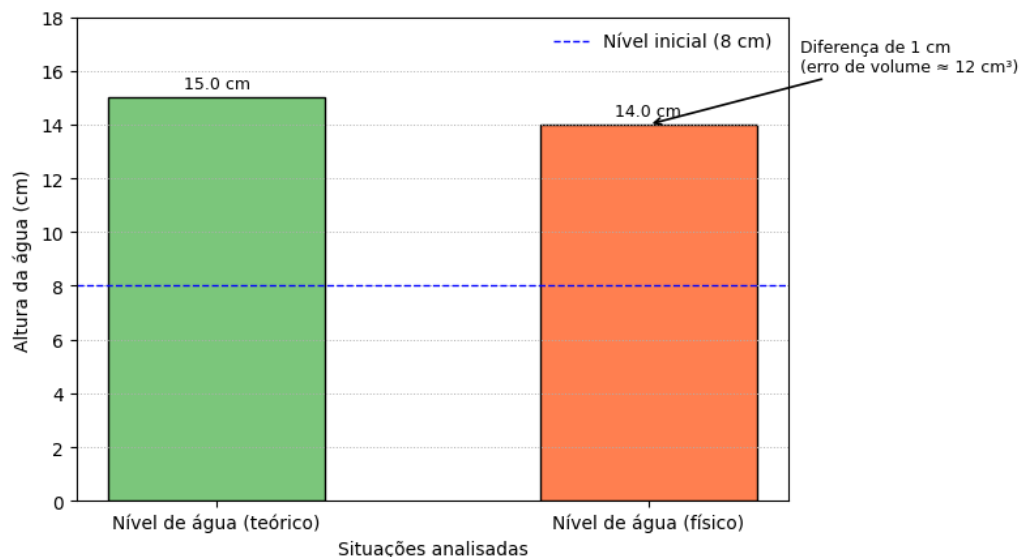
$$V_e = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot (1,125)^3 \approx 5,7 \text{ cm}^3$$

Esse valor é muito próximo de 6 cm^3 ; portanto, por análise, o erro pode ser considerado pequeno e, isoladamente, não invalida o modelo construído. Diante disso, com o objetivo de obter maior precisão, os alunos utilizaram o próprio recipiente para ajustar o volume das esferas para 6 cm^3 . Para isso, cada esfera foi colocada no recipiente contendo água; quando o nível do líquido se elevava até $0,5 \text{ cm}$, considerava-se que a esfera apresentava o volume esperado. Assim, algumas esferas precisaram ser ajustadas por meio da adição de mais revestimento de papel-alumínio, até que o volume ideal fosse alcançado.

Ao realizar a prática, o grupo observou que, após a inserção das 14 esferas, o nível da água atingiu 14 cm , não alcançando o valor esperado de 15 cm . Essa diferença de 1 cm na coluna de água, correspondente a uma perda de 12 cm^3 no volume previsto, pode ser atribuída a fatores físicos não contemplados no modelo matemático idealizado. Conforme destaca

Bassanezi (2002, p. 26), “mesmo que o modelo matemático da situação estudada possa ser construído dentro de uma teoria matemática conhecida, ainda assim pode acontecer que as técnicas e métodos matemáticos existentes nesta teoria sejam insuficientes para a obtenção dos resultados desejados”.

Gráfico 3 – Comparação entre o nível de água previsto pelo modelo matemático e o observado no modelo físico



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Um dos problemas possíveis é o empacotamento e espaços vazios entre as esferas. fisicamente elas ocupam espaço de forma rígida. No entanto, o erro aqui foi o inverso do comum: a água não subiu o suficiente. Esse resultado indica que, embora o modelo matemático considere apenas o volume total das esferas, o modelo físico foi influenciado pelo empacotamento e pelos espaços vazios entre os sólidos rígidos, o que interfere na elevação efetiva do nível da água. Entretanto, segundo o Princípio de Arquimedes, o empuxo exercido sobre um corpo imerso em um fluido corresponde ao peso do fluido deslocado. Dessa forma, apenas a parcela do volume efetivamente submersa e ocupada pelo sólido contribui para o deslocamento da água, uma vez que a força de empuxo está diretamente relacionada ao volume de fluido deslocado (Bonjorno et al., 2016).

Outra observação feita pelo grupo, mas não sendo preponderante e suficiente para a comprovação do experimento é que o recipiente artesanal de garrafa PET pode ter sofrido deformações durante a sua produção ou sob a pressão da água e do peso das esferas alargou o recipiente, exigindo mais volume para subir cada centímetro de altura. E outra menos relevante para o grupo é o revestimento de papel alumínio nas esferas cria uma superfície rugosa que pode aprisionar pequenas bolhas de ar ou dificultar o preenchimento total dos espaços pela água, além da possibilidade de pequenas variações no diâmetro real das esferas após o revestimento manual.

A experiência do Grupo 2 revelou-se significativa para a discussão da Modelagem Matemática, ao evidenciar que a resolução de uma situação-problema não se encerra no cálculo algébrico, mas exige a análise das variáveis de contorno envolvidas. A discrepância observada entre o resultado previsto pelo modelo matemático e o valor obtido experimentalmente não invalida o conhecimento matemático mobilizado, mas evidencia a complexidade de transpor a teoria para a realidade física, na qual fatores como empacotamento das esferas, rigidez do recipiente e interação com o fluido influenciam o resultado final.

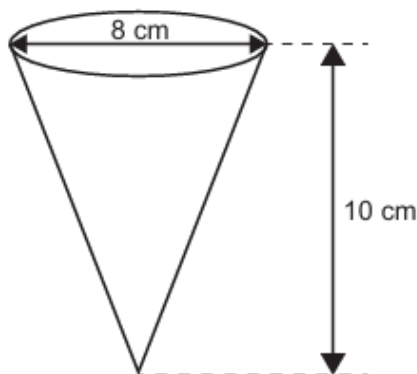
Sob a perspectiva didática, o erro experimental assumiu papel central no processo de aprendizagem, ao ser tratado como oportunidade para problematizar as hipóteses simplificadoras do modelo matemático. Essa abordagem favoreceu a compreensão de que a Matemática, ao modelar fenômenos físicos, opera sob condições idealizadas que nem sempre se reproduzem fielmente na realidade. Conforme argumenta Bassanezi (2002), modelos matemáticos não expressam verdades definitivas, mas representações convenientes da realidade analisada, cuja validação depende da adequação ao fenômeno estudado. Assim, a atividade contribuiu para o desenvolvimento do pensamento crítico dos estudantes, ao evidenciar que o conhecimento matemático vai além do acerto do resultado, envolvendo a reflexão sobre os limites e as condições de validade do modelo construído.

4.3.4 Grupo 3 – Modelagem da Redução de Volume em Cones

Figura 11 - Questão 148 (ENEM 2022 – Caderno Amarelo)

QUESTÃO 148

Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.



Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm.

Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

- A** 1,52.
- B** 3,24.
- C** 3,60.
- D** 6,48.
- E** 7,20.

Fonte: INEP, 2022.

Inicialmente a modelagem matemática desenvolvida pelo Grupo 3, a partir de uma situação-problema envolvendo a produção de chocolates em formato de cone circular reto foi fazer solução em cálculos matemáticos. De acordo com o enunciado ficou entendido que diante do aumento no custo dos ingredientes, a empresa decidiu reduzir o volume do produto em 19%, mantendo o mesmo formato geométrico e a mesma altura do cone original. O desafio proposto consistiu em determinar a nova medida do raio da base do cone, em centímetros.

O chocolate original apresenta:

- Diâmetro da base igual a 8 cm
- Raio do cone original: $r_1 = 4 \text{ cm}$.
- Altura: $h = 10 \text{ cm}$.

O volume de um cone circular reto é expresso por:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Volume do cone original:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = \frac{160}{3} \pi \quad (i)$$

Como o novo chocolate deve possuir volume 19% menor, o volume do novo cone corresponde a:

$$V_2 = 0,81 \cdot V_1$$

Considerando que a altura do cone permanece constante ($h = 10$ cm), seja r_2 o raio da base do novo cone. Seu volume é dado por:

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot 10 \quad (ii)$$

Igualando as expressões para os volumes (i) e (ii), obtém-se:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot 10 = 0,81 \cdot \frac{160}{3} \pi$$

Cancelando os fatores comuns, resulta:

$$10r_2^2 = 129,6 \Rightarrow$$

$$r_2^2 = 12,96 \Rightarrow$$

$$r_2 = \sqrt{12,96} \Rightarrow$$

$$r_2 = 3,6 \text{ cm}$$

O grupo concluiu que, mantendo-se a altura constante, o volume do cone é proporcional ao quadrado do raio da base, conforme a relação:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Tal relação evidencia a aplicação do conceito de proporcionalidade entre grandezas geométricas na resolução do problema.

Portanto, o raio da base do novo chocolate deve ser igual a 3,60 cm, resultado que corresponde à alternativa C. Com o modelo houve a possibilidade de os estudantes articularem conceitos de geometria espacial, proporcionalidade, porcentagem e interpretação de situações-problema contextualizadas, alinhadas às competências exigidas no ENEM.

4.3.4.1 Experimentação e Validação: O Modelo Físico e a Validação Experimental

A investigação teve como foco uma situação-problema relacionada à redução do raio de um cone de chocolate maciço e ao impacto dessa alteração no volume do produto. Buscou-se compreender como uma variação linear de apenas 0,4 cm no raio pode ocasionar uma redução volumétrica significativa, fenômeno semelhante ao observado na redução, estratégia

caracterizada pela diminuição da quantidade ou volume de produtos sem redução proporcional do preço (Perin; Campos, 2023).

Para a construção dos protótipos reais, foram utilizados os seguintes materiais: papel cartão, régua, lápis, borracha, compasso, transferidor, cola e tesoura.

Durante o processo de confecção, o grupo decidiu que, para fins de experimentação através de verificação das massas, seria mais viável a utilização de sorvete em substituição ao chocolate, por se tratar de uma substância de menor custo e de manuseio mais prático. Dessa forma, o interior do cone foi isolado com papel alumínio, a fim de permitir a inserção do sorvete sem comprometer a estrutura do protótipo. Além disso, o grupo confeccionou um paralelepípedo como suporte para o posicionamento dos cones e utilizou isopor como base de apoio. Para a quantificação da massa de sorvete efetivamente comportada em cada casquinha, foi empregada uma balança de precisão, desprezando-se a massa das embalagens e dos materiais de revestimento.

Figura 12 – Construção dos protótipos dos cones utilizados na validação experimental com sorvete



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

A etapa inicial consistiu na confecção do cone de papel com as dimensões especificadas no problema. Para isso, foi necessário recortar setores circulares, os quais, ao serem unidos pelas extremidades do arco, originam a superfície lateral do cone. Em ambos os casos, o raio do setor circular corresponde à geratriz do cone, que, conforme o problema, é igual a 10 cm. No entanto, os ângulos centrais desses setores são distintos, uma vez que dependem do comprimento da circunferência da base de cada cone.

O comprimento da circunferência da base do cone original é dado por:

$$C_1 = 2\pi r_1 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \text{ cm}$$

Sabendo que o comprimento do arco do setor circular corresponde à circunferência da base do cone, e que o comprimento total da circunferência de um círculo de raio 10 cm é:

$$C = 2\pi \cdot 10 = 20\pi \text{ cm}$$

O ângulo central θ_1 do setor circular utilizado na construção do cone original pode ser obtido por proporcionalidade:

$$\frac{\theta_1}{360^\circ} = \frac{8\pi}{20\pi}$$

Simplificando:

$$\frac{\theta_1}{360^\circ} = \frac{2}{5},$$

Logo, concluímos que: $\theta_1 = 144^\circ$

Para o segundo cone, cujo raio da base é $r_2 = 3,6 \text{ cm}$, o comprimento da circunferência da base é:

$$C_2 = 2\pi \cdot 3,6 = 7,2\pi \text{ cm}$$

Aplicando o mesmo raciocínio:

$$\frac{\theta_2}{360^\circ} = \frac{7,2\pi}{20\pi}$$

Organizando:

$$\frac{\theta_2}{360^\circ} = 0,36,$$

Assim, $\theta_2 = 129,6^\circ$

Com os valores dos ângulos centrais determinados, o grupo utilizou o transferidor para medir e marcar, no papel cartão, os setores circulares com raio de 10 cm e ângulos centrais de 144° e $129,6^\circ$, respectivamente. Após o recorte desses setores, as extremidades do arco foram unidas com cola, resultando na confecção dos cones de papel correspondentes aos dois modelos analisados.

Essa etapa possibilitou aos estudantes trabalhar, de forma integrada, conceitos de geometria plana e espacial, como setor circular, comprimento de arco, geratriz e circunferência da base do cone, reforçando a articulação entre o modelo matemático teórico e sua materialização concreta.

Para validação do modelo, o grupo utilizou a massa de sorvete para verificar a capacidade de preenchimento, medindo os resultados em uma balança de precisão:

- Massa no Cone A (M_A): 124 g
- Massa no Cone B (M_B): 101 g

A validação do modelo ocorre ao comparar a razão entre as massas medidas com a razão entre os volumes calculados:

$$\text{Razão Experimental} = \frac{M_A}{M_B} = \frac{101}{124} \approx 0,8145$$

Figura 13 – Validação experimental do modelo matemático do cone



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

O resultado experimental de aproximadamente 81,45% apresentou elevada concordância com o valor teórico de 81%, correspondente a uma redução de 19% do cone original. A diferença observada, de 0,45 ponto percentual, pode ser considerada desprezível em experimentos de modelagem realizados com materiais artesanais, indicando que a massa utilizada seguiu, com boa aproximação, a proporção geométrica calculada. Nesse sentido, conforme discute Bassanezi (2002, p. 30), “o grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para sua validação”, o que permite considerar o modelo matemático validado para o contexto da atividade proposta.

A prática obteve sucesso na validação experimental. Isso se deve ao fato de o sorvete, embora pastoso, comportar-se como um fluido que preenche os espaços vazios do cone de forma eficiente.

Quadro 7 – Comparativo entre o Modelo Matemático (Teórico) e o Modelo Físico (Experimental)

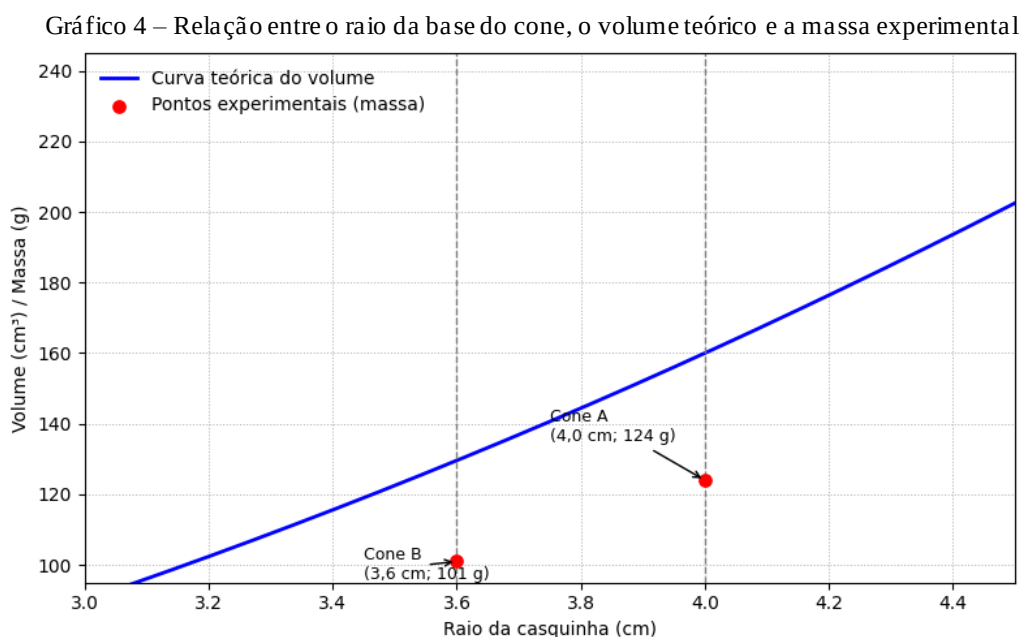
Componente de Análise	Modelo Matemático (Teórico)	Modelo Físico (Experimental)
Raio da base (r)	Cone A: 4,0 cm	Cone B: 3,6 cm (escala real)
Volume total (V) ($\pi = 3$)	$V_A = 160,00 \text{ cm}^3$	$V_B = 129,60 \text{ cm}^3$
Massa total (M)	$M_A = 124 \text{ g}$	$M_B = 101 \text{ g g}$
Razão de proporcionalidade do volume	$\frac{V_B}{V_A} = 0,81$	—
Razão de proporcionalidade da massa	—	$\frac{M_B}{M_A} = 0,8145$
Redução do volume	19 %	18,55%
Precisão do modelo	99,44%	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

O quadro 6 sintetiza o confronto entre a abstração geométrica com a evidência baseado na experiência. A análise revela uma convergência notável: enquanto o modelo matemático (baseado em um cone de altura 10 cm e $\pi = 3$) previu uma razão de volume de 0,8100, o experimento prático com sorvete resultou em uma razão de massa de 0,8145.

Esta proximidade (erro inferior a 1%) é altamente significativa para uma oficina de modelagem. O sorvete, por sua consistência, ocupou o volume interno do cone de papel de forma homogênea, permitindo que a massa se comportasse como um substituto direto e fiel do volume. Com essas informações torna-se explícito o "fenômeno da economia de escala" invertida.

O gráfico 4 apresenta a comparação entre os valores de volume obtidos pelo modelo matemático teórico, com $\pi = 3$ e as massas medidas experimentalmente, em função do raio da base do cone.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

O Gráfico acima ilustra a função de comportamento do volume em relação à variação do raio para uma altura constante de 10 cm. A curva azul representa o modelo matemático abstrato, enquanto os pontos vermelhos indicam os dados obtidos experimentalmente pelo Grupo 3 através da pesagem do sorvete.

É perceptível a aderência quase perfeita dos pontos experimentais à curva teórica. Esta visualização torna evidente o fenômeno da 'não-linearidade': embora a redução no raio entre o Cone A e o Cone B tenha sido de apenas 10%, observou-se uma diminuição da grandeza representada no eixo vertical (massa/volume) de aproximadamente 19%.

Do ponto de vista didático, a atividade possibilitou aos estudantes compreender, de maneira concreta, a relação não linear entre as dimensões de um sólido geométrico e seu volume. A manutenção da altura do cone, associada à redução do raio da base, evidenciou que pequenas variações lineares podem resultar em alterações volumétricas proporcionalmente maiores, consolidando a compreensão da dependência quadrática do volume em relação ao raio.

A validação experimental, realizada por meio da pesagem do sorvete, reforçou essa relação ao aproximar os valores empíricos dos resultados teóricos.

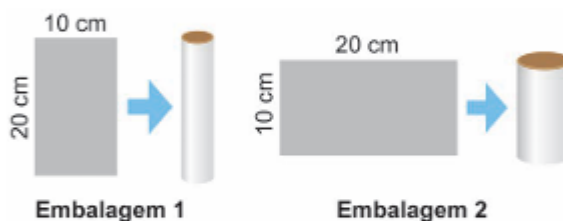
Essa vivência contribuiu para a superação de concepções intuitivas equivocadas — como a ideia de que reduções proporcionais nas dimensões implicam reduções equivalentes no volume —, fortalecendo a articulação entre Geometria Espacial, proporcionalidade e a interpretação crítica de situações de consumo.

4.3.5 Grupo 4 - A Razão de Proporcionalidade em Cilindros de Mesma Área Lateral

Figura 14 - Questão 175 (ENEM 2024 – Caderno Azul)

QUESTÃO 175

Uma indústria faz uma parceria com uma distribuidora de sucos para lançar no mercado dois tipos de embalagens. Para a fabricação dessas embalagens, a indústria dispõe de folhas de alumínio retangulares, de dimensões 10 cm por 20 cm. Cada uma dessas folhas é utilizada para formar a superfície lateral da embalagem, em formato de cilindro circular reto, que posteriormente recebe fundo e tampa circulares. A figura ilustra, dependendo de qual das duas extensões será utilizada como altura, as duas opções para formar a possível embalagem.



Dentre essas duas embalagens, a de maior capacidade apresentará volume, em centímetro cúbico, igual a

- A 4000π
- B 2000π
- C $\frac{4000}{\pi}$
- D $\frac{1000}{\pi}$
- E $\frac{500}{\pi}$

Fonte: INEP, 2024.

O quarto grupo investigou um problema de otimização e geometria espacial centrado na construção de cilindros a partir de superfícies retangulares idênticas. A questão proposta (baseada no ENEM) desafia a percepção intuitiva de que áreas laterais iguais resultariam em

volumes iguais, exigindo uma investigação profunda sobre como o raio da base influencia a capacidade volumétrica.

O grupo modelou dois cenários distintos para a construção dos cilindros algebricamente e fez a comparação entre as duas embalagens.

A indústria dispõe de folhas retangulares de alumínio com dimensões: 10 cm × 20 cm

Cada folha é utilizada para formar a superfície lateral de um cilindro circular reto, que posteriormente recebe duas tampas circulares (fundo e tampa). Assim, o retângulo corresponde ao desenvolvimento lateral do cilindro.

O volume de um cilindro é dado por: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Na Embalagem 1, a dimensão 20 cm é utilizada como altura do cilindro, e a dimensão 10 cm corresponde ao comprimento da circunferência da base. Calculando o raio:

$$2\pi r_1 = 10 \Rightarrow$$

$$r_1 = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$$

Assim o volume 1 (V_1):

$$V_1 = \pi r_1^2 h_1$$

$$V_1 = \pi \cdot \left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \cdot 20 \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{500}{\pi}$$

Na Embalagem 2, a dimensão 10 cm é utilizada como altura, e a dimensão 20 cm corresponde ao comprimento da circunferência da base. Logo, calculando o raio da base:

$$2\pi r_2 = 20 \Rightarrow$$

$$r_2 = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}$$

Obtendo o volume 2 (V_2):

$$V_2 = \pi r_2^2 h_2$$

$$V_2 = \pi \cdot \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 10 \Rightarrow$$

$$V_2 = \frac{1000}{\pi}$$

Os estudantes comparam os volumes obtidos:

$$V_1 = \frac{500}{\pi} \quad e \quad V_2 = \frac{1000}{\pi}$$

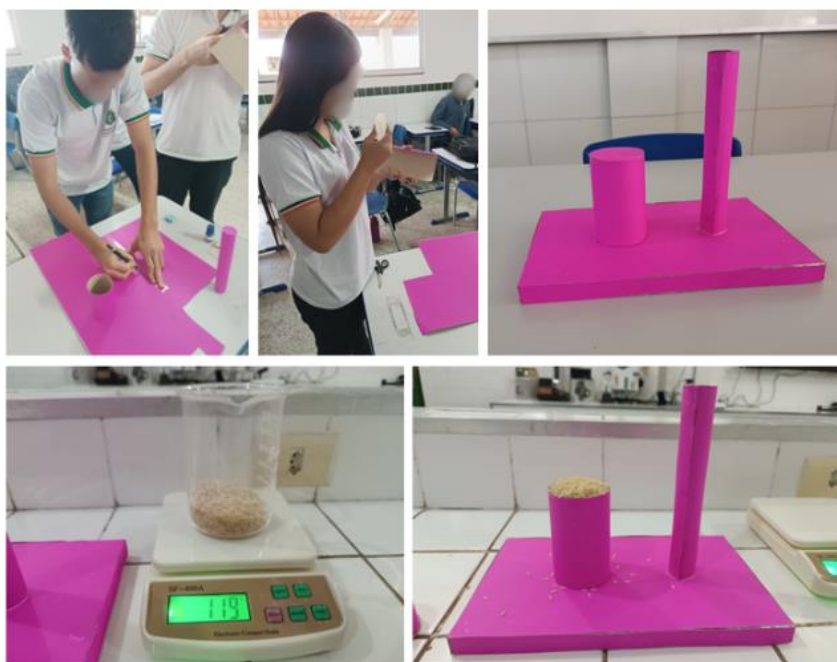
Razão entre os volumes: $\frac{V_2}{V_1} = 2,00$

Observaram que a Embalagem 2 apresenta o dobro do volume da Embalagem 1, embora ambas sejam construídas a partir da mesma folha retangular. Essa análise permitiu discutir que o volume do cilindro depende do quadrado do raio da base, tornando a circunferência um fator determinante na capacidade da embalagem.

4.3.5.1 Construção do Modelo Físico e Validação Experimental

A transposição para o modelo físico foi realizada com papel cartão, régua, compasso e cola, simulando as folhas de alumínio. Os alunos construíram os dois cilindros com as mesmas dimensões mencionadas na questão e utilizaram isopor como base de sustentação.

Figura 15 – Construção dos modelos físicos dos cilindros a partir de superfícies laterais idênticas



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Para validar o modelo matemático que previa que o Cilindro II (mais largo) teria o dobro da capacidade do Cilindro I (mais alto). O grupo inicialmente encheu o Cilindro I duas vezes e verificou que o seu volume preencheu totalmente o cilindro II, em seguida realizou um teste de pesagem utilizando grãos de arroz. Esta escolha metodológica permitiu uma medição mais precisa do que a contagem de unidades discretas, visto que o arroz preenche quase a totalidade do volume interno dos sólidos.

Os resultados obtidos na balança de precisão apresentaram elevada concordância com os valores previstos pelo modelo matemático: o cilindro com altura de 20 cm (Cilindro I)

comportou uma massa de 119 g, enquanto o cilindro com altura de 10 cm (Cilindro II) comportou 239 g.

Quadro 8 - Modelo Teórico vs. Experimento Físico (Grupo 4)

Componente de Análise	Cilindro I (Mais Alto)	Cilindro II (Mais Largo)	Razão (II / I)
Dimensões da Folha	10 cm (base) x 20 cm (alt.)	20 cm (base) x 10 cm (alt.)	-
Volume Teórico (aproximado)	159,1 cm ³	318,3 cm ³	2,0
Massa de Arroz (Experimental)	119 g	239 g	2,01

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Matematicamente, considerando que o dobro de 119 g corresponde a 238 g, o valor experimental obtido de 239 g indica que o procedimento foi realizado com elevado grau de precisão. A diferença de 1 g pode ser atribuída a fatores físicos, como uma leve compactação adicional dos grãos no cilindro de maior raio ou às limitações da precisão da balança, o que confere veracidade ao experimento. Sob essa perspectiva, a Modelagem Matemática envolve escolhas, aproximações e interpretações da realidade, não se restringindo à aplicação mecânica de fórmulas. Conforme destaca Biembengut; Hein (2018, p. 14), “Para concluir o modelo, torna-se necessária uma avaliação para verificar em que nível ele se aproxima da situação-problema representada e, a partir daí, verificar também o grau de confiabilidade na sua utilização”.

Essa discrepância aparente, em que um sólido de menor altura armazena aproximadamente o dobro do conteúdo de outro mais alto, explica-se pela influência quadrática do raio na fórmula do volume ($V = \pi \cdot r^2 \cdot h$). Ao utilizar o lado de 20 cm da folha para formar a circunferência da base, o raio do cilindro foi duplicado em relação ao obtido com o lado de 10 cm. Embora a altura tenha sido reduzida à metade, o aumento do raio, elevado ao quadrado, compensou e superou essa redução, resultando em um volume maior.

A experimentação demonstrou que sólidos com áreas laterais idênticas podem apresentar volumes distintos, em função da configuração do raio da base. Nos corpos de revolução, o volume cresce quadraticamente em relação ao raio e apenas linearmente em relação à altura, o que contraria interpretações intuitivas recorrentes. No contexto do ensino de Geometria Espacial voltado às questões do ENEM, essa constatação é relevante para a análise crítica da eficiência volumétrica e do uso de materiais em situações reais.

Sob o enfoque didático, a construção e a validação dos modelos físicos possibilitaram a confrontação entre expectativas intuitivas e evidências empíricas, favorecendo a compreensão das condições de validade do modelo matemático. A concordância entre os resultados teóricos e experimentais contribuiu para o fortalecimento da confiança dos estudantes no modelo

construído e para a consolidação dos conceitos de proporcionalidade e otimização geométrica, promovendo uma aprendizagem conceitual alinhada aos pressupostos da Modelagem Matemática e às competências mobilizadas em avaliações como o ENEM.

4.3.6 Análise integrada dos resultados da sequência didática

A análise dos quatro grupos de modelagem matemática indica que a sala de aula, quando concebida como um espaço de investigação, possibilita aos estudantes vivenciar o ciclo completo da produção do conhecimento. A transposição didática de questões do ENEM para modelos físicos não apenas contribuiu para a validação das fórmulas geométricas, mas, sobretudo, evidenciou a distância crítica entre a matemática idealizada e a matemática aplicada. O quadro 9 apresenta a síntese da validação dos modelos.

Quadro 9 - Síntese da Validação dos Modelos Físicos e Matemáticos

Grupo	Fenômeno Geométrico	Material de Validação	Resultado do Modelo Físico	Observação Técnica
1 (Silo)	Volume do Cilindro + cone	Grãos de arroz	Aderência Alta	Evidenciou a representação de armazenamento de carga.
2 (Recipiente e Esferas)	Princípio de Arquimedes	Água e Esferas	Discrepância de 1 cm	Ocorrida devido à maleabilidade da PET e espaços vazios.
3 (Cone)	Redução do Raio (V proporcional a r^2)	Sorvete	Erro de apenas 0,55%	O sorvete (fluido) preencheu evidentemente a geometria do cone.
4 (Cilindros)	Otimização de Área Lateral	Grãos de Arroz	Razão exata de 2:1	Evidenciou que a massa dobra quando o raio dobra (239g vs 119g).

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

O cruzamento dos resultados obtidos revelou uma análise coerente da realidade investigada. Enquanto o Grupo 2 (esferas em recipiente PET) enfrentou limitações decorrentes da maleabilidade do material e do empacotamento das esferas rígidas, os Grupos 1 e 3 (sorvete e arroz) alcançaram níveis de precisão superiores a 99%.

No experimento desenvolvido pelo Grupo 4, a atividade constituiu um momento significativo de revisão de concepções intuitivas dos estudantes acerca da relação entre área lateral e volume. A constatação de que a massa de arroz aproximadamente dobrou ao se alterar a orientação da folha evidenciou, de forma empírica, a influência quadrática do raio no volume de cilindros, mesmo quando a área lateral permanece constante.

4.3.7 Socialização e Compartilhamento de Resultados

Após a conclusão das etapas de experimentação e coleta de dados, a sequência didática culminou em um seminário de apresentações integradas. Cada grupo selecionou representantes para expor os resultados aos demais participantes, sob a mediação do professor. Esse momento foi planejado de modo a permitir que os grupos apresentassem não apenas o produto final — os protótipos construídos —, mas, sobretudo, o processo de investigação desenvolvido e as dificuldades enfrentadas na validação dos modelos.

Figura 16 – Socialização dos resultados da sequência didática pelos representantes de cada grupo de alunos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

A socialização dos resultados permitiu que os alunos confrontassem diferentes metodologias de validação. As apresentações, organizadas na forma de relatórios, explicitaram os procedimentos adotados na construção das maquetes, nos cálculos e nos experimentos realizados, favorecendo discussões coletivas, questionamentos e a construção da aprendizagem em Geometria Espacial.

Nesse contexto, o Grupo 4 destacou-se ao demonstrar visualmente que o cilindro de menor altura comportava o dobro de arroz em relação ao cilindro mais alto, contrariando a percepção inicial de alguns alunos, que supunham volumes equivalentes. Já o Grupo 2 discutiu criticamente as causas da discrepância de 1 cm no nível da água, transformando um aparente erro experimental em uma reflexão sobre as propriedades dos materiais utilizados e a rigidez dos recipientes.

As demais situações-problema foram materializadas por meio de modelos físicos, permitindo reconhecer a aplicação da Geometria Espacial em diferentes contextos, como a logística de armazenamento em silos de grãos (Grupo 1), o consumo analisado no experimento do sorvete e a logística de embalagens no contexto industrial (Grupo 3).

As apresentações promoveram questionamentos acerca dos procedimentos adotados pelos grupos, favorecendo um ambiente de reflexão crítica alinhado ao rigor científico. Essa troca de experiências mostrou-se fundamental para a consolidação da Modelagem Matemática, ao possibilitar que os estudantes deixassem de atuar como meros executores de procedimentos algorítmicos e assumissem protagonismo na exposição e discussão de suas próprias produções.

Em síntese, as apresentações finais mostraram que as oficinas não se restringiram ao caráter estritamente procedimental, consolidando um processo formativo no qual os alunos mobilizaram conceitos, justificaram suas escolhas e analisaram criticamente os resultados obtidos. A Modelagem Matemática, ao estruturar a aprendizagem em torno da investigação e da validação de modelos, contribuiu para a compreensão da Matemática como uma linguagem capaz de interpretar fenômenos do mundo real, especialmente quando desenvolvida em um contexto de interação coletiva.

4.4 AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM: ANÁLISE COMPARATIVA (PRÉ-TESTE VS. PÓS-TESTE)

Esta seção tem como objetivo analisar, de forma comparativa, o desempenho dos estudantes antes e após a aplicação da sequência didática fundamentada na Modelagem Matemática, a partir dos resultados do pré-teste e do pós-teste. A comparação permite avaliar o impacto efetivo da intervenção pedagógica no desenvolvimento das habilidades de Geometria Espacial exigidas pelo ENEM, especialmente aquelas relacionadas à visualização espacial, à modelagem de situações-problema e à integração de diferentes conceitos geométricos.

No pré-teste, observou-se um desempenho global insatisfatório, sobretudo em questões que exigiam visualização espacial, decomposição de sólidos e construção de modelos matemáticos. Em especial, as questões contextualizadas no formato ENEM (Exercícios 06 a 10) apresentaram média de acertos próxima de 40%, classificando-se entre os níveis insuficiente e crítico.

Após a intervenção didática, o pós-teste revelou uma melhora expressiva e consistente. Diferentemente do pré-teste, em que os acertos raramente ultrapassavam a metade da turma, no

pós-teste a maioria das questões apresentou índices superiores a 80% de acerto, indicando um avanço significativo na aprendizagem.

A similaridade reside na exigência de que o aluno vá além do simples conhecimento de fórmulas, sendo capaz de interpretar situações-problema e traduzi-las para a linguagem matemática, etapa essencial no processo de modelagem matemática, conforme discutido por Burak (2016). Enquanto no pré-teste os alunos travaram na necessidade de "teoremas auxiliares", no pós-teste observou-se uma maior fluidez na decomposição dos objetos.

Para a análise comparativa entre o pré-teste e o pós-teste, adotou-se como critério a seleção de questões que, além de apresentarem similaridade conceitual, possuísem níveis de complexidade cognitiva compatíveis ou alinhadas a habilidades da matriz de referência do ENEM.

Entende-se, neste trabalho, por complexidade cognitiva o conjunto de operações mentais exigidas para a resolução de uma questão, considerando o número de etapas envolvidas, a articulação entre conceitos geométricos, o grau de formalização algébrica requerido e o tipo de raciocínio matemático mobilizado.

Observou-se que, em cada par de exercícios utilizados para comparação, as tarefas exigiram operações cognitivas de complexidade equivalente, embora estivessem inseridas em contextos distintos ou envolvessem diferentes sólidos geométricos. Dessa forma, a comparação entre os resultados do pré-teste e do pós-teste possibilitaram avaliar de maneira mais consistente a evolução da aprendizagem dos estudantes em relação às ideias matemáticas trabalhadas, com ênfase nas habilidades do ENEM comuns a cada par de questões. Embora cada exercício mobilize um conjunto mais amplo de habilidades matemáticas, a análise concentrou-se intencionalmente naquelas comuns, por serem diretamente relacionadas aos objetivos da intervenção, o que contribui para minimizar possíveis distorções decorrentes de variações no nível de exigência das atividades propostas.

Quadro 10 – Desempenho Comparativo por Habilidades do ENEM

Exercícios (Similares)	Habilidade ENEM (Foco)	Acertos Pré-Teste (%)	Acertos Pós-Teste (%)	Saldo (Evolução)
Ex.6 (Pré) / Ex.2 (Pós)	H12: Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.	36%	84%	+48%
Ex.7 (Pré) / Ex.5 (Pós)	H13: Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.	32%	68%	+36%
Ex.8 (Pré) / Ex.1 (Pós)	H10: Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.	40%	68%	+28%
Ex.9 (Pré) / Ex.4 (Pós)	H12: Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.	48%	80%	+32%
Ex.10 (Pré) / Ex.3 (Pós)	H12: Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.	44%	80%	+36%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

As questões foram elaboradas de forma intencionalmente semelhante por escolha metodológica. A adoção de itens conceitualmente próximos e com grau de complexidade equivalente possibilitou avaliar a transferência do conhecimento matemático para diferentes contextos, evitando a mera reprodução de procedimentos. Ainda que alguns pares apresentem variações pontuais no nível de formalização algébrica, todos foram selecionados por mobilizarem os mesmos núcleos conceituais, assegurando comparabilidade entre os resultados.

A Tabela 6 apresenta a comparação direta entre os percentuais médios de acerto no pré e no pós-teste, considerando apenas questões de perfil semelhante (contextualizadas, envolvendo sólidos geométricos e múltiplas etapas de resolução).

Tabela 6 -- Comparação do Desempenho Médio no Pré e Pós-Teste

Avaliação	Tipo de Questão	Média de Acertos (%)	Classificação
Pré-teste	Questões ENEM (06–10)	40%	Crítico
Pós-teste	Questões ENEM (01–05)	75%	Intermediário

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Os dados evidenciam um crescimento médio superior a 30 pontos percentuais no desempenho dos alunos, o que sugere que a Modelagem Matemática atuou como elemento integrador entre conceitos, fórmulas e interpretação de problemas.

Ao comparar os resultados por eixo cognitivo, percebe-se que as maiores evoluções ocorreram justamente nas habilidades que apresentaram maior fragilidade no diagnóstico inicial:

No pré-teste, itens envolvendo cortes, seções e planificações apresentaram índices inferiores a 30%. No pós-teste, questões que exigiam imaginar transformações geométricas (como variação de dimensões mantendo volume constante ou decomposição de sólidos) alcançaram índices próximos de 80%.

Problemas que demandavam a tradução de contextos do cotidiano para a linguagem matemática, como cisternas, velas, vasos e piões, apresentaram desempenho significativamente superior no pós-teste. Esse resultado indica que os alunos passaram a estruturar de forma mais consistente as etapas de identificação, modelagem, resolução e validação.

No pré-teste, a combinação de diferentes sólidos ou fórmulas era um fator de erro recorrente. No pós-teste, a maioria dos alunos conseguiu articular corretamente relações entre área, volume, proporção e variação dimensional.

Com o objetivo de analisar de forma qualitativa a evolução das aprendizagens em Geometria Espacial, foram consideradas habilidades relacionadas à visualização, à modelagem, à articulação de conceitos e à tomada de decisão em contextos reais. A avaliação dessas

habilidades foi realizada a partir da comparação entre os desempenhos observados no pré-teste e no pós-teste, permitindo identificar mudanças no nível de domínio conceitual e procedimental dos estudantes.

Tabela 7 – Evolução das Habilidades em Geometria Espacial

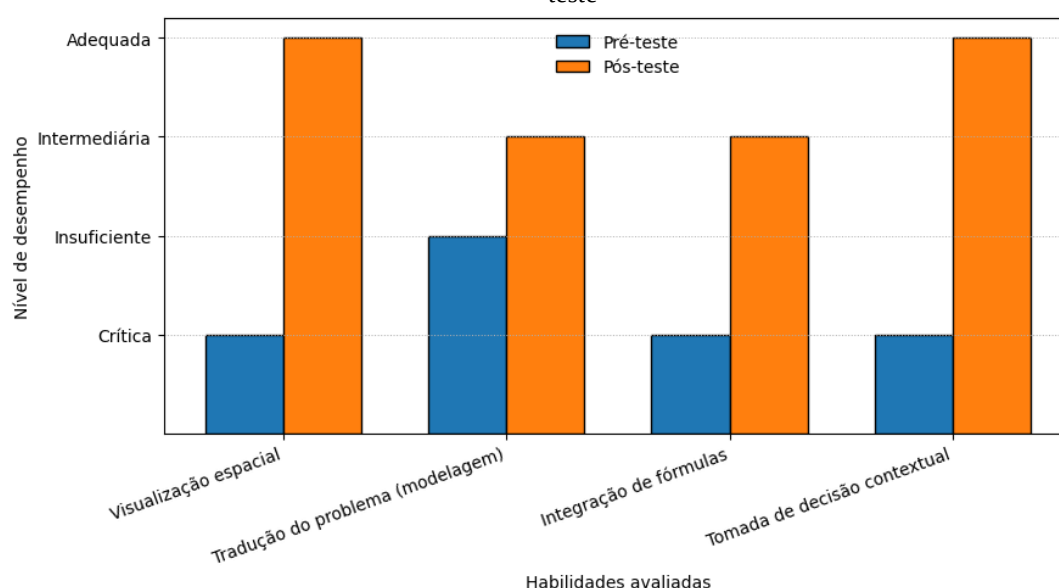
Habilidade Avaliada	Pré-Teste	Pós-Teste	Evidência de Evolução
Visualização espacial	Crítico	Adequada	Redução significativa de erros em sólidos compostos
Tradução do problema (modelagem)	Insuficiente	Intermediária	Maior autonomia na escolha de modelos matemáticos
Integração de fórmulas	Crítico	Intermediária	Uso consciente de relações métricas
Tomada de decisão contextual	Crítico	Adequada	Respostas coerentes com o contexto do enunciado

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Os dados apresentados na Tabela 7 apontam avanços qualitativos em todas as habilidades analisadas. Observa-se que, no pré-teste, predominavam níveis classificados como críticos ou insuficientes, especialmente nas habilidades de visualização espacial, integração de fórmulas e tomada de decisão contextual. No pós-teste, essas habilidades passaram a ser avaliadas como intermediárias ou adequadas, evidenciando uma redução significativa de erros, maior autonomia na tradução dos problemas e uso mais consciente das relações métricas envolvidas.

Para complementar a análise qualitativa apresentada na tabela, elaborou-se um gráfico comparativo que permite visualizar, de forma sintética, a evolução das habilidades avaliadas entre o pré-teste e o pós-teste, facilitando a identificação dos avanços observados em cada dimensão analisada.

Gráfico 5 – Comparação dos níveis de desempenho em habilidades de Geometria Espacial no pré-teste e no pós-teste



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

A análise do gráfico 5 reforça os resultados obtidos anteriormente, apontando uma progressão consistente do pré-teste para o pós-teste em todas as habilidades. Destaca-se o avanço da visualização espacial e da tomada de decisão contextual, que passaram de níveis críticos para adequados. Além disso, observa-se que habilidades relacionadas à tradução do problema e à integração de fórmulas evoluíram para níveis intermediários, sugerindo maior articulação entre conceitos geométricos e o contexto dos problemas propostos.

Esses resultados corroboram as ideias de Bassanezi (2002), segundo as quais a aprendizagem torna-se mais significativa quando o aluno compreende o problema como um todo, e não apenas como um exercício de aplicação mecânica de fórmulas.

A comparação entre pré e pós-teste demonstra que a Modelagem Matemática não apenas elevou o desempenho quantitativo, mas também promoveu uma mudança qualitativa na forma como os alunos abordam problemas de Geometria Espacial. O erro deixou de ser predominantemente conceitual para tornar-se pontual, geralmente associado a cálculos aritméticos, e não à compreensão do problema.

Além disso, observa-se uma aproximação maior entre o desempenho dos alunos e as exigências da Competência 2 da Matriz de Referência do ENEM, que demanda interpretação, visualização e articulação de diferentes representações geométricas.

4.5 PERCEPÇÃO DOS ESTUDANTES SOBRE A METODOLOGIA

Complementarmente à análise quantitativa, esta seção apresenta a percepção dos estudantes acerca da utilização da Modelagem Matemática como metodologia de ensino da Geometria Espacial. Os dados foram coletados por meio de um questionário aplicado após a intervenção didática.

Um dos aspectos mais relevantes observados diz respeito ao aumento da autoconfiança dos alunos. No pré-teste, nenhum estudante declarou possuir alta ou muito alta confiança para resolver problemas de Geometria Espacial. Após a intervenção, esse cenário foi significativamente modificado.

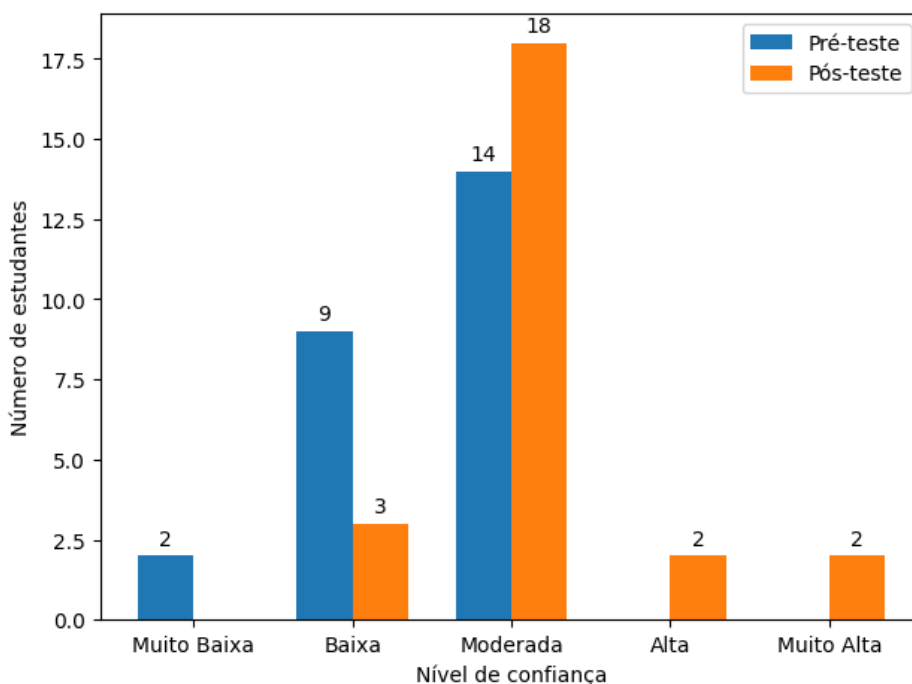
Quadro 11 - Nível de Confiança dos Estudantes Após a Intervenção

Nível de Confiança	Número de Alunos	Percentual (%)
Baixa	3	12%
Moderada	18	72%
Alta	2	8%
Muito Alta	2	8%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Os relatos dos estudantes indicam que a melhoria da confiança está diretamente associada à possibilidade de compreender o problema antes de aplicar fórmulas, além do uso de situações contextualizadas que tornaram os conceitos mais concretos.

Gráfico 6 – Evolução do Nível de Confiança: Pré-teste vs Pós-teste



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Ao comparar os dois momentos, observamos uma evolução positiva significativa no sentimento dos alunos: No pré-teste, 11 alunos (44%) situavam-se nos níveis "Muito Baixa" ou "Baixa". No pós-teste, esse número caiu para apenas 3 alunos (12%). A categoria "Moderada" consolidou-se como a maioria absoluta, saltando de 56% para 72%. Enquanto no início nenhum aluno se sentia "Muito Confiante" ou com confiança "Alta", após a atividade, 16% da turma passou a ocupar esses patamares superiores.

Quando questionados sobre o impacto da Modelagem Matemática em suas dificuldades anteriores, 100% dos alunos afirmaram que a metodologia contribuiu positivamente, sendo que 60% consideraram que ajudou muito.

Abaixo mostraremos o a justificativa de dois estudantes referente a abordagem com modelagem, utilizando problemas contextualizados do ENEM, para superar alguma dificuldade anterior em Geometria Espacial.

Figura 17 – Registros escritos dos estudantes sobre a contribuição da Modelagem Matemática para a superação de dificuldades em Geometria Espacial

Questão 1.2. A abordagem com Modelagem Matemática, utilizando problemas contextualizados do ENEM, ajudou você a superar alguma dificuldade anterior em Geometria Espacial?

☒ Sim, muito. () Sim, um pouco. () Não ajudou. () Não tinha dificuldades.

Justifique: Antes eu tinha certas dificuldades em aplicar meus conhecimentos, agora com esse reforço, me ajudou a resolver o conteúdo

Questão 1.2. A abordagem com Modelagem Matemática, utilizando problemas contextualizados do ENEM, ajudou você a superar alguma dificuldade anterior em Geometria Espacial?

() Sim, muito. ☒ Sim, um pouco. () Não ajudou. () Não tinha dificuldades.

Justifique: Os problemas contextualizados tornaram os conteúdos mais concretos e fáceis de interpretar. Ainda existem partes que precisam de mais treino, mas a abordagem ajudou bastante a reduzir minhas dificuldades iniciais.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

As falas dos discentes na figura 17 confirmam que a Modelagem Matemática promoveu uma transição essencial da aprendizagem mecânica para uma percepção crítica, onde a Geometria Espacial pode se tornar uma ferramenta de interpretação do cotidiano. Ao destacarem que a metodologia na capacidade de interpretar problemas do que de realizar cálculos exaustivos, os alunos demonstram maior confiança e autonomia, reduzindo dificuldades, comprovando que o uso de modelos concretos e situações reais reduz a distância cognitiva e humaniza o ensino da matemática.

Além disso, 88% dos estudantes afirmaram que a modelagem conectou os conceitos geométricos à realidade ou facilitou a visualização espacial dos sólidos, evidenciando a superação de uma das principais lacunas diagnosticadas no pré-teste.

No que se refere à visualização espacial, 100% dos alunos concordaram ou concordaram totalmente que essa habilidade se tornou mais acessível com a abordagem de Modelagem Matemática. Esse dado é particularmente relevante, pois a dificuldade de imaginar sólidos, cortes e planificações foi a principal limitação identificada no diagnóstico inicial.

Quando questionados sobre a etapa mais desafiadora do processo de modelagem, as respostas distribuíram-se entre interpretação, modelagem e resolução, indicando que os alunos passaram a reconhecer o processo matemático como um conjunto de etapas interdependentes, e não apenas como cálculo isolado.

Por fim, a maioria dos estudantes reconheceu que a Geometria Espacial é um dos conteúdos que mais exige interpretação e modelagem no ENEM, e 64% sugerem que a

preparação futura deve ser baseada prioritariamente em problemas contextualizados e Modelagem Matemática, em detrimento da simples repetição de exercícios algorítmicos.

Essa percepção reforça que a metodologia adotada não apenas melhorou o desempenho imediato, mas também contribuiu para uma mudança na concepção dos alunos sobre o que significa aprender Matemática.

De modo geral, as análises apresentadas nas seções 4.3 e 4.4 demonstram que a Modelagem Matemática se consolidou como uma estratégia convincente para o ensino de Geometria Espacial, promovendo ganhos cognitivos, conceituais e atitudinais, alinhados às demandas do ENEM e à formação matemática crítica dos estudantes.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação teve como objetivo investigar as contribuições da Modelagem Matemática como estratégia pedagógica para o ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio, tomando como referência questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), por meio da elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática contextualizada. Tal objetivo emergiu da constatação, apresentada na introdução deste trabalho, de que o ensino de Geometria Espacial permanece marcado por práticas excessivamente formalistas, fragmentadas e pouco articuladas às demandas avaliativas e formativas contemporâneas.

Os pressupostos teóricos discutidos no Capítulo 2 evidenciaram que as dificuldades historicamente associadas ao ensino de Geometria Espacial — como a baixa capacidade de visualização, a aplicação mecânica de fórmulas e a dissociação entre teoria e prática — encontram respaldo tanto na literatura da Educação Matemática quanto nos resultados de avaliações externas, em especial o ENEM. Nesse contexto, a Modelagem Matemática foi compreendida não apenas como uma metodologia alternativa, mas como uma perspectiva didático-pedagógica que ressignifica o papel da Matemática escolar ao aproximá-la de situações reais, investigativas e socialmente contextualizadas.

O percurso metodológico apresentado no Capítulo 3, caracterizado como uma pesquisa aplicada, de natureza quali-quantitativa e com caráter intervencionista, permitiu operacionalizar tais pressupostos teóricos por meio da construção de um produto educacional. A sequência didática desenvolvida, estruturada a partir de problemas contextualizados inspirados em questões do ENEM, constituiu-se como um contexto de experimentação pedagógica, no qual os estudantes vivenciaram, de forma sistemática, as diferentes etapas do processo de modelagem, desde a compreensão do problema até a validação dos modelos matemáticos por meio da experimentação física.

A análise e discussão dos resultados, apresentadas no Capítulo 4, indicaram que o diagnóstico inicial confirmou as hipóteses levantadas no projeto de pesquisa: os estudantes apresentavam dificuldades significativas relacionadas à visualização espacial, à interpretação de enunciados complexos e à articulação entre diferentes conceitos matemáticos. Esses resultados evidenciaram uma aprendizagem compartimentalizada, na qual o conhecimento geométrico se encontrava dissociado de significados mais amplos e de aplicações concretas.

Após a intervenção pedagógica, observou-se uma evolução consistente tanto no desempenho quantitativo quanto nos aspectos qualitativos da aprendizagem. A comparação entre os resultados do pré-teste e do pós-teste revelou avanços significativos na mobilização de

habilidades relacionadas à Geometria Espacial previstas na Matriz de Referência do ENEM, especialmente aquelas associadas à interpretação, à proporcionalidade e à análise de situações-problema. Ademais, os registros escritos, as discussões em grupo e a percepção dos estudantes indicaram uma mudança relevante na forma como a Matemática passou a ser compreendida, superando a concepção de Matemática como um conjunto de fórmulas a serem memorizadas e passando a ser reconhecida como uma ferramenta de análise e tomada de decisão.

Do ponto de vista pedagógico, a utilização de modelos físicos mostrou-se um elemento central para a superação das dificuldades de abstração, ao permitir a validação empírica dos modelos matemáticos construídos. Tal constatação reforça a ideia de que a aprendizagem em Geometria Espacial se beneficia de abordagens que integrem diferentes registros de representação e que valorizem a experimentação, conforme defendido por autores que fundamentaram este estudo.

Nesse sentido, os resultados obtidos confirmam as hipóteses inicialmente formuladas e indicam que a Modelagem Matemática, articulada a questões do ENEM, constitui uma estratégia impulsionadora para aprendizagens mais significativas em Geometria Espacial. Contudo, é importante reconhecer que a metodologia demanda planejamento cuidadoso, maior tempo pedagógico e formação docente específica, o que evidencia desafios concretos para sua implementação em contextos escolares marcados por currículos extensos e restrições institucionais.

Por fim, destaca-se que o produto educacional desenvolvido — um caderno pedagógico contendo a sequência didática — representa uma contribuição prática deste trabalho, alinhada à natureza profissional do PROFMAT. Tal material apresenta potencial de replicabilidade e adaptação a diferentes realidades escolares, configurando-se como um recurso de apoio ao professor de Matemática que busca alinhar sua prática às orientações da BNCC e às exigências do ENEM, sem abrir mão de uma abordagem crítica e contextualizada do conhecimento matemático.

5.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A partir das análises realizadas e das limitações identificadas ao longo do desenvolvimento desta pesquisa, descrevemos algumas possibilidades para investigações futuras que possam ampliar e aprofundar os resultados alcançados.

Recomenda-se, inicialmente, a ampliação da proposta para contextos interdisciplinares, articulando a Geometria Espacial com áreas como Física e Química, especialmente no estudo

de grandezas como densidade, massa e volume. Tal integração pode enriquecer o processo de modelagem, favorecendo a compreensão das variáveis envolvidas e contribuindo para o desenvolvimento de competências interdisciplinares exigidas tanto pela BNCC quanto pelo ENEM.

Sugere-se também a incorporação sistemática de tecnologias digitais, como *softwares* de geometria dinâmica e modelagem tridimensional, a exemplo do *GeoGebra 3D*. A utilização combinada de modelos físicos e simulações digitais pode potencializar a visualização espacial e permitir a exploração de situações mais complexas, ampliando as possibilidades investigativas da sequência didática.

Outra perspectiva relevante consiste na realização de estudos voltados à formação continuada de professores, utilizando o caderno pedagógico produzido nesta pesquisa como base para oficinas e cursos de capacitação. Tais investigações podem contribuir para compreender os desafios enfrentados pelos docentes na implementação da Modelagem Matemática no currículo regular e para discutir estratégias de adaptação da metodologia às diferentes realidades escolares.

Por fim, recomenda-se a adaptação da proposta metodológica para outras etapas da Educação Básica, especialmente o Ensino Fundamental II, com foco na construção progressiva do pensamento geométrico. Investigações nesse sentido podem contribuir para reduzir as dificuldades observadas no Ensino Médio, promovendo uma aprendizagem contínua e mais articulada ao longo da trajetória escolar.

REFERÊNCIAS

- ALCÂNTARA, Davi Willams de Paiva *et al.* Relações de volumes entre cilindro, cone, pirâmide e prisma: uma abordagem de modelagem com materiais concretos no ensino médio. **Revista Aracê**, São José dos Pinhais, v. 7, n. 11, p. 1–21, 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.56238/arev7n11-265>. Acesso em: 15 jan. 2026.
- ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.
- AMAZONAS. Secretaria de Estado de Educação e Desporto. **Sistema de Avaliação do Desempenho Educacional do Amazonas (SADEAM): banco de questões de Matemática – 3ª série do ensino médio**. Manaus: SEDUC-AM, [s.d.]. Apud: SANTOS, Warles Oliveira dos. **Atividades de Matemática da 3ª Série do Ensino Médio estruturadas por descritores: Espaço e Forma**. Blog do Prof. Warles, 2016. Disponível em: <https://profwarles.blogspot.com>. Acesso em: 13 jan. 2026.
- AMORIM, Silvio Luiz Gomes de; REIS, Frederico da Silva; FERREIRA, Neuber Silva. Construindo uma pirâmide utilizando o GeoGebra 3D e a Realidade Aumentada no smartphone: uma proposta de mediação pedagógica para Geometria Espacial no Ensino Médio. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [S. l.], v. 13, n. 3, p. 155–168, 2024. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/67161>. Acesso em: 5 fev. 2026.
- BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática: o que é? por que? como? **Veritati**, Salvador, n. 4, p. 73-80, 2004.
- BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.
- BARROS, R. C. dos P.; OLIVEIRA, C. dos S.; FERREIRA, A. L. A. Tópicos de Geometria no Ensino fundamental: um olhar para coleções de livros didáticos norteados pela Base Nacional Comum Curricular. **Olhar de Professor**, [S. l.], v. 25, p. 1–27, 2022. Disponível em: <https://revistas.uepg.br/index.php/olhardeprofessor/article/view/20423>. Acesso em: 5 fev. 2026.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2002.
- BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018.
- BONJORNO, José Roberto *et al.* **Física: termologia, óptica e ondulatória**. 3. ed. São Paulo: FTD, 2016.
- BRASIL. [Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996]. **Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Brasília, DF: Diário Oficial da União, 1996.
- BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2006: Prova de Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, DF: INEP, 2006. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>. Acesso em: 15 jan. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2010**: prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2010. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>. Acesso em: 15 jan. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)**. Brasília, DF: INEP, 2012. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/enem/matriz-de-referencia>. Acesso em: 13 jan. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Nota Técnica**: Teoria de Resposta ao Item (TRI) no ENEM. Brasília, DF: INEP, 2012.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2014**: Prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2014. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>. Acesso em: 15 jan. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2014**: Segunda Aplicação (Reaplicação) - Prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2014. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>. Acesso em: 15 jan. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2015**: Prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2015. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>. Acesso em: 15 jan. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2016**: prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2016. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>. Acesso em: 15 jan. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2019**: Prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2019. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>. Acesso em: 15 jan. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio PPL (ENEM PPL) 2019**: Prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2019. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>. Acesso em: 15 jan. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2020**: prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>. Acesso em: 15 jan. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2022**: prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2022. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>. Acesso em: 15 jan. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2023**: Prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>. Acesso em: 15 jan. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2024**: prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>. Acesso em: 15 jan. 2026.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 13 jan. 2026.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

BURAK, Dionísio. **Modelagem matemática**: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

BURAK, Dionísio. Modelagem matemática e ensino. In: BRANDT, Célia Finck; BURAK, Dionísio; KLÜBER, Tiago Emanuel (org.). **Modelagem matemática**: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016. p. 41–68.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2009.

DENZIN, Norman K.; LINCOLN, Yvonna S. Introdução: a disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. In: DENZIN, Norman K.; LINCOLN, Yvonna S. (org.). **O planejamento da pesquisa qualitativa**: teorias e abordagens. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 15–41.

FRANCA, Paulo Batista. **Modelagem matemática e geometria espacial**: uma investigação abordando poliedros convexos. 2023. 89 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2023. Disponível em: <https://repositorio.uema.br/handle/123456789/3551>. Acesso em: 13 jan. 2026.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; BONJORN, Roberto; CÂMARA, Paulo. **Matemática: Geometria**: Coleção Prisma. São Paulo: FTD, 2020. Manual do Professor. Disponível em: <https://s3.amazonaws.com/pnld.ftd.com.br/wp-content/uploads/2021/08/06135921/Geometria.pdf>. Acesso em: 4 jun. 2026.

GOMES DE AMORIM, Silvio Luiz; REIS, Frederico da Silva; SILVA FERREIRA, Neuber. A utilização integrada da realidade aumentada no software GeoGebra por meio de dispositivos móveis para a aprendizagem de geometria espacial no ensino médio. **VIDYA**, Santa Maria, v. 44, n. 1, p. 211–230, 2024. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/4771>. Acesso em: 4 fev. 2026.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 3, n. 4, p. 3–13, 1995.

OLIVEIRA, Francisco César de; SILVA, Robson Rodrigues da; BISSACO, Márcia Aparecida Silva. O uso de tecnologias digitais no ensino de geometria espacial: uma revisão da literatura. **Research, Society and Development**, [S. l.], v. 10, n. 15, e235101522743, 2021. Disponível em: <https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/22743>. Acesso em: 6 fev. 2026.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, v. 1, n. 1, p. 7-18, 1993.

PELLI, D.; AMARAL, R. B. Aprendizagem Virtual de Conceitos da Geometria Euclidiana Espacial: Reflexões sobre Ensino Remoto e Mediação Tecnológica. **EaD em Foco**, [S. l.], v. 15, n. 2, p. e2584, 2025. Disponível em: <https://eademfoco.cecierj.edu.br/index.php/Revista/article/view/2584>. Acesso em: 4 fev. 2026.

PEREIRA, Ledina Lentz *et al.* A modelagem matemática para o ensino da geometria – relação de Euler. **Criar Educação**, Criciúma, v. 6, n. 1, p. 1-21, jan./jun. 2017. Disponível em: <https://periodicos.unesc.net/criareduca/article/view/3459>. Acesso em: 6 fev. 2026.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. **Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco (SAEPE): banco de itens de Matemática – 3ª série do Ensino Médio (Descritor D13)**. Recife: SEE/PE, [s.d.]. Apud: SANTOS, Warles Oliveira dos. **Atividades de Matemática da 3ª Série do Ensino Médio estruturadas por descritores: Espaço e Forma**. Blog do Prof. Warles, 2016. Disponível em: <https://profwarles.blogspot.com>. Acesso em: 15 jan. 2026.

PERIN, Andréa Pavan; CAMPOS, Celso Ribeiro. Resolução de problemas: uma experiência com educação financeira no ensino médio. **Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT)**, Florianópolis, v. 18, p. 1–22, 2023. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em: 01 jun. 2026.

QUEIROS, L. M. *et al.* Enigmas de Yucatàn: Recurso Educacional Digital para o Ensino de Geometria Espacial. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, [S. l.], v. 30, p. 108–134, 2022. Disponível em: <https://journals-sol.sbc.org.br/index.php/rbie/article/view/2140>. Acesso em: 05 fev. 2026.

REGES, A. M. M. *et al.* O ensino da geometria com enfoque na etnomodelagem. **Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**, [S. l.], v. 3, n. 7, 2020. Disponível em: <https://periodicos.apps.uern.br/index.php/RECEI/article/view/929>. Acesso em: 4 fev. 2026.

RODRIGUES, G. A. de P. *et al.* Oficina de geometria espacial: estratégias para o ensino eficaz da matemática. **Revista de Gestão e Secretariado**, [S. l.], v. 15, n. 6, p. e3763, 2024. Disponível em: <https://ojs.revistagesec.org.br/secretariado/article/view/3763>. Acesso em: 5 fev. 2026.

ROSSIM, L. C. Aplicação da Geometria Plana e Espacial no Ensino Médio Integrado ao Curso Técnico em Agropecuária. **Brazilian Journal of Development**, [S. l.], v. 7, n. 5, p. 49765–49775, 2021. Disponível em: <https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/29970>. Acesso em: 5 fev. 2026.

SANTIAGO, Paulo Vitor da Silva; SANTANA, José Rogério. Proposta para o ensino de Geometria: sólidos no Geogebra. **Debates em Educação**, [S. l.], v. 16, n. 38, p. e15862, 2024. Disponível em: <https://ufal.emnuvens.com.br/debateseducacao/article/view/15862>. Acesso em: 4 fev. 2026.

SANTOS, Sylvana Karla da Silva de Lemos; MARTINS, Sara Stela dos Santos Telles; ARAÚJO, Paulo Henrique Viana; SANTOS, Karla Vivianne Oliveira. Materiais didáticos de

baixo custo para auxiliar no ensino de Ciências e Matemática. **Revista de Educação, Ciência e Tecnologia (RECeT)**, [S. l.], v. 6, n. 1, 2025. Disponível em: <https://ojs.ifsp.edu.br/recet/article/view/2718>. Acesso em: 2 jun. 2026.

SCHRENK, Maykon Jhonatan; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Modelagem Matemática como prática pedagógica: uma possível caracterização em Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 24, n. 1, p. 194–224, 2022.

SILVA, A. C. da; FARIA, R. W. S. de C. Atividades investigativas de sólidos de revolução com GeoGebra no smartphone. **Cenas Educacionais**, [S. l.], v. 6, p. e16764, 2023. Disponível em: <https://www.revistas.uneb.br/cenaseducacionais/article/view/16764>. Acesso em: 4 fev. 2026.

SIMÃO, Carlos Eduardo. **Discussões acerca do uso da modelagem matemática como recurso didático em sala de aula**. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.55.2024.tde-14052024-090518>. Acesso em: 13 jan. 2026.

SOUSA, Rosalide Carvalho de; ALVES, Francisco Régis Vieira; FONTENELE, Francisca Cláudia Fernandes. Aspectos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) Aplicada ao Ensino de Geometria Espacial Referente às Questões do ENEM com Amparo do Software GeoGebra. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 123-142, nov. 2020. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/1982-5153.2020v13n2p123>. Acesso em: 6 fev. 2026.

SOUZA, Gabriel Willyan Pinheiro de; RENDEIRO, Manoel Fernandes Braz. Realidade aumentada e rotação por estações: proposta para o ensino aprendizagem da geometria espacial na sala de aula. **Revista de Educação Matemática**, [s. l.], v. 20, n. 01, p. e023096, 2023. Disponível em: <https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/391>. Acesso em: 4 fev. 2026.

TORTOLA, Emerson; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da. De questões do Enem a aulas com modelagem matemática: o caminhar para uma educação matemática crítica. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 103, n. 265, p. 589–614, set./dez. 2022. DOI: 10.24109/2176-6681.rbep.103i265.5242. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbeped/a/RdgKytQrKv59WCj5cbSGxzR/>. Acesso em: 02 jun. 2026.

VARELA GARCIA LECRER, Ohanna Peres; PAZUCH, Vinícius. Reflexão sobre o processo de elaboração de tarefas de geometria espacial em um movimento formativo de professores. **REMATEC**, Belém, v. 16, n. 37, p. 97–122, 2021. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/56>. Acesso em: 4 fev. 2026.

VYGOTSKY, Lev Semionovich. **Mind in society: the development of higher psychological processes**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1978.

APÊNDICE 1 – PRÉ-TESTE DIAGNÓSTICO



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUIÇÃO ASSOCIADA: IFPI – CAMPUS FLORIANO**

PRÉ-TESTE DIAGNÓSTICO

INFORMAÇÕES PARA O(A) PARTICIPANTE VOLUNTÁRIO(A):

- I. Você está convidado(a) a responder este pré-teste diagnóstico que faz parte da coleta de dados da pesquisa **“O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL MEDIADO PELA MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM COM BASE EM QUESTÕES DO ENEM”** sob responsabilidade do mestrando Professor Antonio Marcos de Lima Miranda.
- II. Caso você concorde em participar da pesquisa, leia com atenção os seguintes pontos:
 - a) Sua identidade será mantida em sigilo;
 - b) Caso você queira, poderá ser informado(a) de todos os resultados obtidos com a pesquisa;
 - c) Não poderá fazer consulta a nenhum tipo de material durante a realização desse pré-teste, seja ele escrito ou eletrônico, como, por exemplo, calculadora.
 - d) As informações serão unicamente utilizadas para fins desta pesquisa. Desde já, agradecemos sua colaboração.

Nome: _____ Idade: _____

Série: _____ Turma: _____

Questionário Diagnóstico de Geometria Espacial

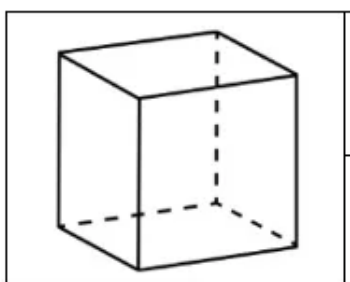
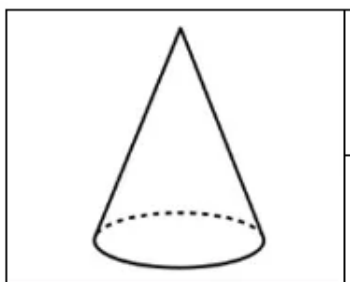
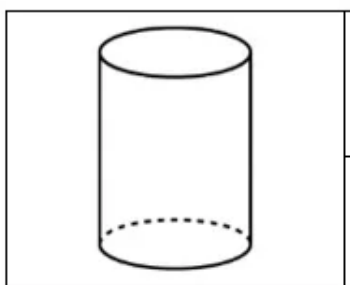
Instruções: Responda as questões abaixo com atenção. Este questionário é uma ferramenta para entendermos seu conhecimento prévio e suas dificuldades em Geometria Espacial.

Observação: Nas questões abaixo anote se possível as fórmulas que calculam áreas e volumes.

EXERCÍCIO 01: Sobre conhecimentos da formação dos sólidos geométricos e visualização geométrica, responda:

a) Cite 5 exemplos de sólidos geométricos que você conhece e descreva brevemente uma característica de cada um o número de faces vértices (se houver), arestas (se houver) e faces.

b) Desenhe as planificações dos sólidos abaixo:



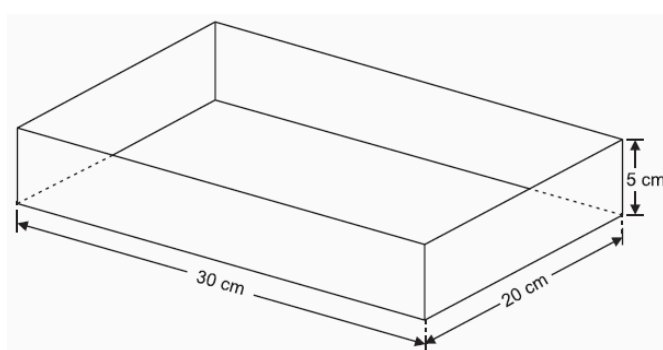
c) Imagine um cubo de 4 cm de aresta. Se você cortasse esse cubo com um plano ao meio, sendo o corte perpendicular a base e nos pontos médios das arestas que sólido geométrico formaria?

d) Imagine o mesmo cubo de 4 cm de aresta. Se você cortasse esse cubo com um plano na diagonal de um vértice oposto ao outro e passando por duas arestas opostas que sólido geométrico formaria?

e) (SADEAM – AM). No dia de seu aniversário Mariana ganhou um cristal com a forma de um poliedro com 5 vértices e 10 arestas. O número de faces desse cristal é:

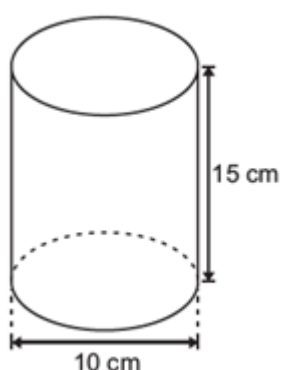
- A) 5
- B) 7
- C) 10
- D) 15
- E) 17

EXERCÍCIO 2: (SAEPE). Amanda comprou uma forma de bolo com formato de bloco retangular, cujas medidas internas estão representadas na figura abaixo.



- a) Determine a área da base da forma de bolo.
- b) Determine a área total da forma.
- c) Calcule a capacidade máxima, em cm^3 , dessa forma.

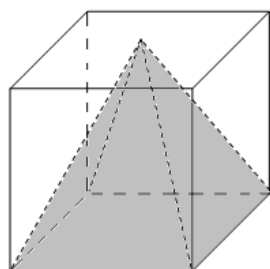
EXERCÍCIO 3: (SAEPE). Um fabricante de sabão em pó decidiu remodelar a embalagem de seu produto, criando um novo padrão com o formato de um cilindro reto. A figura abaixo representa essa nova embalagem com as suas medidas internas indicadas.



Dado: $\pi = 3$

- a) Determine a área da base e a área lateral da embalagem
- b) Determine a quantidade máxima, aproximada, de sabão em pó, em cm^3 , que essa embalagem comporta.

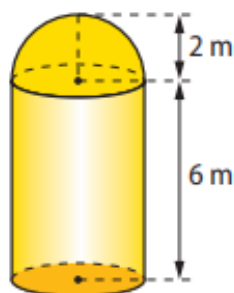
EXERCÍCIO 4: Um empresário produz sólidos pedagógicos de plástico, como por exemplo, pirâmides. Ele quer embalá-las em caixas no formato de um cubo, sabendo que a pirâmide está inscrita, como mostra a figura abaixo.



Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m^3 , então o volume do cubo, em m^3 , é igual a:

- A) 9
- B) 12
- C) 15
- D) 18
- E) 21

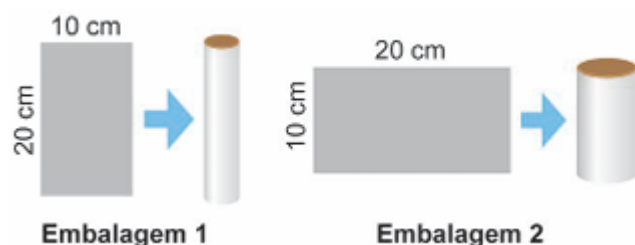
EXERCÍCIO 5: Um silo tem o formato de um cilindro circular reto (com fundo) sob uma semiesfera, como na figura. Qual o volume desse silo, sabendo que o raio do cilindro mede 2 m e que a altura do silo mede 8 m. (use $\pi = 3$.)



- A) 44 m^3
- B) 104 m^3
- C) 76 m^3
- D) 88 m^3
- E) 68 m^3

EXERCÍCIO 6: Questão ENEM 2024.

Uma indústria faz uma parceria com uma distribuidora de sucos para lançar no mercado dois tipos de embalagens. Para a fabricação dessas embalagens, a indústria dispõe de folhas de alumínio retangulares, de dimensões 10 cm por 20 cm. Cada uma dessas folhas é utilizada para formar a superfície lateral da embalagem, em formato de cilindro circular reto, que posteriormente recebe fundo e tampa circulares. A figura ilustra, dependendo de qual das duas extensões será utilizada como altura, as duas opções para formar a possível embalagem.



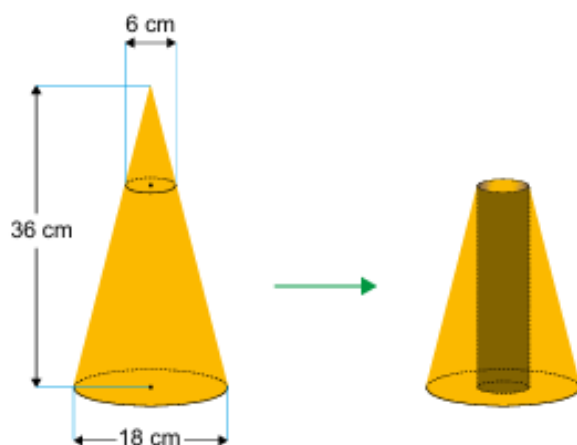
Dentre essas duas embalagens, a de maior capacidade apresentará volume, em centímetro cúbico, igual a

- A) $4\,000\pi$
- B) $2\,000\pi$
- C) $\frac{4000}{\pi}$
- D) $\frac{1000}{\pi}$
- E) $\frac{500}{\pi}$

EXERCÍCIO 7: Questão ENEM 2023.

Um artista plástico esculpe uma escultura a partir de um bloco de madeira de lei, em etapas. Inicialmente, esculpe um cone reto com 36 cm de altura e diâmetro da base medindo 18 cm.

Em seguida, remove desse cone um cone menor, cujo diâmetro da base mede 6 cm, obtendo, assim, um tronco de cone, conforme ilustrado na figura.

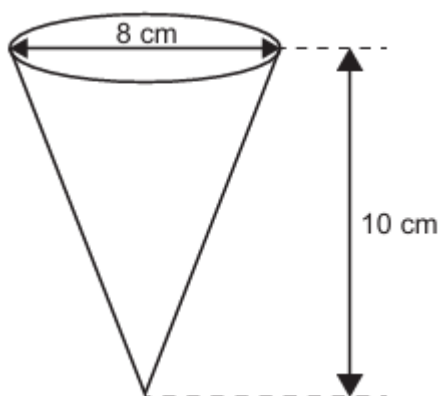


Em seguida, perfura esse tronco de cone, removendo um cilindro reto, de diâmetro 6 cm, cujo eixo de simetria é o mesmo do cone original. Dessa forma, ao final, a escultura tem a forma de um tronco de cone com uma perfuração cilíndrica de base a base. O tipo de madeira utilizada para produzir essa escultura tem massa igual a 0,6 g por centímetro cúbico de volume. Utilize 3 como aproximação para π . Qual é a massa, em grama, dessa escultura?

- A) 1 198,8
- B) 1 296,0
- C) 1 360,8
- D) 4 665,6
- E) 4 860,0

EXERCÍCIO 8: Questão ENEM 2022.

Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.

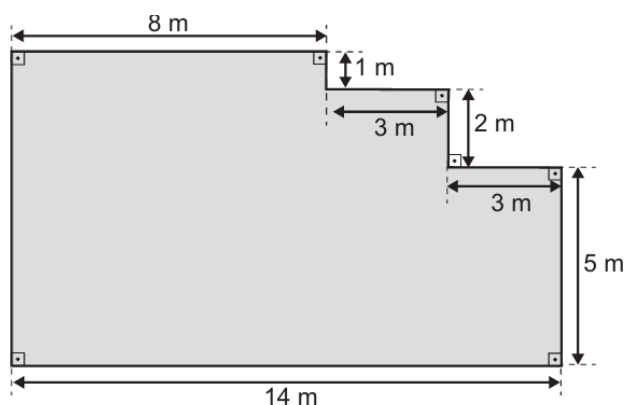


Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm. Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

- A) 1,52.
- B) 3,24.
- C) 3,60.
- D) 6,48.
- E) 7,20.

EXERCÍCIO 9: Questão ENEM 2019.

Um mestre de obras deseja fazer uma laje com espessura de 5 cm utilizando concreto usinado, conforme as dimensões do projeto dadas na figura. O concreto para fazer a laje será fornecido por uma usina que utiliza caminhões com capacidades máximas de 2 m³, 5 m³ e 10 m³ de concreto.

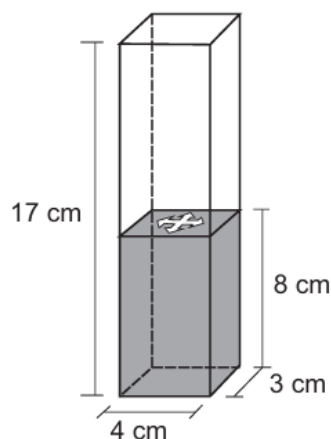


Qual a menor quantidade de caminhões, utilizando suas capacidades máximas, que o mestre de obras deverá pedir à usina de concreto para fazer a laje?

- A) Dez caminhões com capacidade máxima de 10 m³.
- B) Cinco caminhões com capacidade máxima de 10 m³.
- C) Um caminhão com capacidade máxima de 5 m³.
- D) Dez caminhões com capacidade máxima de 2 m³.
- E) Um caminhão com capacidade máxima de 2 m³.

EXERCÍCIO 10: Questão ENEM 2020.

Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água. Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a 6 cm^3 cada, que ficarão totalmente submersas.



O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de

- A) 14.
- B) 16.
- C) 18.
- D) 30.
- E) 34.

Instrumento de Pesquisa: Dificuldades de Aprendizagem em Geometria Espacial

Instruções: Por favor, leia atentamente cada questão e marque a(s) opção(ões) que melhor representa(m) sua realidade ou opinião. Você pode marcar mais de uma opção quando indicado.

Seção 1: Percepção Geral sobre o Conteúdo

Questão 1.1. Qual seu nível de confiança para resolver problemas de Geometria Espacial (cálculo de volumes, áreas de superfície, e identificação de elementos)?

() Muito Baixa () Baixa () Moderada () Alta () Muito Alta

A que você atribui ser esse nível de confiança na resolução de problemas de Geometria Espacial?

Questão 1.2. Você apresenta dificuldades no conteúdo de Geometria Espacial (conceitos básicos e classificação de sólidos, visualização espacial, cálculo de medidas)? Justifique sua resposta.

☐ Sim ☐ Não

Seção 2: Identificação de Dificuldades Específicas (Se respondeu "Sim" na Questão 1.2)

Se você respondeu "Não" na Questão 1.2, pule para a Seção 3.

Questão 2.1. Se sim, em qual(is) aspecto(s) principal(is) você sente maior dificuldade na Geometria Espacial? (Marque uma ou mais opções)

- ☐ Conceitos e Definições Básicas (e.g., identificação de sólidos, elementos, classificação)
- ☐ Visualização Espacial (e.g., imaginar a figura, planificação, cortes, vistas)
- ☐ Representação e Desenho (e.g., desenhar sólidos de forma tridimensional)
- ☐ Cálculo de Medidas (e.g., aplicação de fórmulas de volume, área da superfície)
- ☐ Resolução de Problemas Contextualizados (e.g., problemas práticos que exigem modelagem)

Questão 2.2. Se você marcou 'Conceitos e Definições Básicas' (2.1), qual seria essa dificuldade? (Marque uma ou mais opções)

- ☐ Compreender a diferença entre figuras planas e sólidos geométricos.
- ☐ Dificuldade em diferenciar e classificar os poliedros (prismas, pirâmides) e os corpos redondos (cilindro, cone, esfera).
- ☐ Dificuldade em identificar os elementos de um sólido (arestas, faces, vértices, altura, geratriz).
- ☐ Compreender e aplicar o Teorema de Euler em poliedros convexos.

Questão 2.3. Se você marcou 'Visualização Espacial' (2.1), qual seria essa dificuldade? (Marque uma ou mais opções)

- ☐ Imaginar o sólido a partir da planificação (desdobramento).
- ☐ Imaginar a planificação a partir do sólido.
- ☐ Dificuldade em antecipar o resultado de um "corte" (seção transversal) feito em um sólido.
- ☐ Dificuldade em correlacionar diferentes vistas (frontal, superior, lateral) de um mesmo objeto tridimensional.

Questão 2.4. Se você marcou 'Cálculo de Medidas' (2.1), qual seria essa dificuldade? (Marque uma ou mais opções)

- ☐ Memorização das fórmulas de Volume e/ou Área da Superfície.
- ☐ Saber qual fórmula aplicar em um determinado problema.
- ☐ Dificuldade em calcular as medidas necessárias (e.g., a altura, o apótema, o raio) antes de aplicar a fórmula principal (uso do Teorema de Pitágoras ou trigonometria em 3D).
- ☐ Dificuldade em lidar com as unidades de medida (conversão de unidades de volume e área).

Questão 2.5. Se você marcou 'Resolução de Problemas Contextualizados' (2.1), qual seria essa dificuldade? (Marque uma ou mais opções)

- ☐ Interpretar o enunciado do problema e identificar qual sólido geométrico e quais medidas estão envolvidas.
- ☐ Modelar a situação prática (ou seja, traduzir o problema em termos matemáticos).
- ☐ Aplicar a fórmula correta no contexto do problema (e.g., calcular apenas a área lateral, e não a total, em certos problemas).
- ☐ Analisar criticamente a solução encontrada (verificar se a resposta faz sentido no contexto prático do problema).

Seção 3: Recursos e Apoio

Questão 3.1. Qual recurso didático você considera mais útil para superar as dificuldades em Geometria Espacial? (Marque uma opção)

- ☐ Aulas expositivas e resolução de exercícios no quadro.
- ☐ Uso de materiais concretos (modelos de sólidos, massinha, etc.).
- ☐ Softwares de geometria dinâmica (e.g., GeoGebra 3D).
- ☐ Vídeos e animações que mostram a rotação e planificação dos sólidos.
- ☐ Apostilas e livros didáticos com boas imagens.

Questão 3.2. Em que momento do estudo de Geometria Espacial você sente que precisaria de mais suporte/reforço? (Marque uma ou mais opções)

- ☐ No início, na introdução dos conceitos e classificação dos sólidos.
- ☐ No desenvolvimento, durante a aplicação das fórmulas e o uso de Pitágoras/trigonometria.
- ☐ Na resolução de problemas mais complexos e contextualizados.
- ☐ Durante as avaliações.

Seção 4: Geometria Espacial no Contexto do ENEM

Questão 4.1. Com que frequência você encontra questões de Geometria Espacial que considera desafiadoras nas provas e simulados do ENEM?

- ☐ Nunca ☐ Raramente ☐ Às vezes ☐ Frequentemente ☐ Sempre

Questão 4.2. Qual tipo de questão de Geometria Espacial do ENEM você considera mais difícil de resolver? (Marque uma opção)

- ☐ Questões que exigem apenas o conhecimento de fórmulas básicas (cálculo direto de volume/área).
- ☐ Questões que pedem a interpretação de gráficos ou diagramas (e.g., planificação, vistas).
- ☐ Questões que exigem a combinação de Geometria Espacial com outras áreas da Matemática (e.g., razão, proporção, escala).
- ☐ Questões com grandes enunciados que exigem a modelagem da situação prática (problemas contextualizados).

Questão 4.3. Em sua preparação para o ENEM, você sente que a Geometria Espacial é um conteúdo que: (Marque uma ou mais opções)

- ☐ Recebe a devida atenção em sala de aula.
- ☐ Precisa de mais tempo de estudo, devido à complexidade.
- ☐ É um "divisor de águas" (se acertar, melhora muito a nota pela coerência pedagógica/TRI).
- ☐ É pouco abordado, e, portanto, é menos priorizado em meus estudos.

Questão 4.4. Qual o maior desafio na hora de resolver uma questão de Geometria Espacial do ENEM? (Marque uma opção)

- ☐ A pressão do tempo para realizar cálculos complexos.
- ☐ A dificuldade em visualizar a situação descrita no enunciado.
- ☐ A necessidade de recorrer a teoremas auxiliares (como Pitágoras) antes de aplicar a fórmula principal.
- ☐ A presença de muitas informações desnecessárias que confundem a interpretação.

APÊNDICE 2 – PÓS-TESTE DE AVALIAÇÃO



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUIÇÃO ASSOCIADA: IFPI – CAMPUS FLORIANO**

PÓS-TESTE DE AVALIAÇÃO

INFORMAÇÕES PARA O(A) PARTICIPANTE VOLUNTÁRIO(A):

I- Você está convidado(a) a responder este pós-teste de avaliação que faz parte da coleta de dados da pesquisa **“O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL MEDIADO PELA MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM COM BASE EM QUESTÕES DO ENEM”** sob responsabilidade do mestrando Professor Antonio Marcos de Lima Miranda.

II- Caso você concorde em participar da pesquisa, leia com atenção os seguintes pontos:

- a) Sua identidade será mantida em sigilo;
- b) Caso você queira, poderá ser informado(a) de todos os resultados obtidos com a pesquisa;
- c) Não poderá fazer consulta a nenhum tipo de material durante a realização desse pós-teste, seja ele escrito ou eletrônico, como, por exemplo, calculadora.
- d) As informações serão unicamente utilizadas para fins desta pesquisa. Desde já, agradecemos sua colaboração.

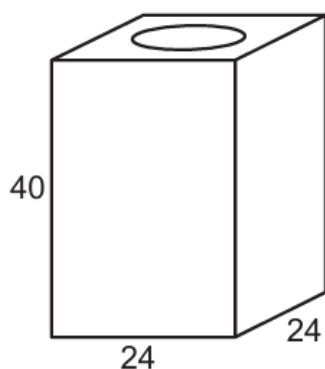
Nome: _____ Idade: _____

Série: _____ Turma: _____

Questionário de Modelagem e Geometria Espacial

EXERCÍCIO 1: (ENEM 2014).

Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.

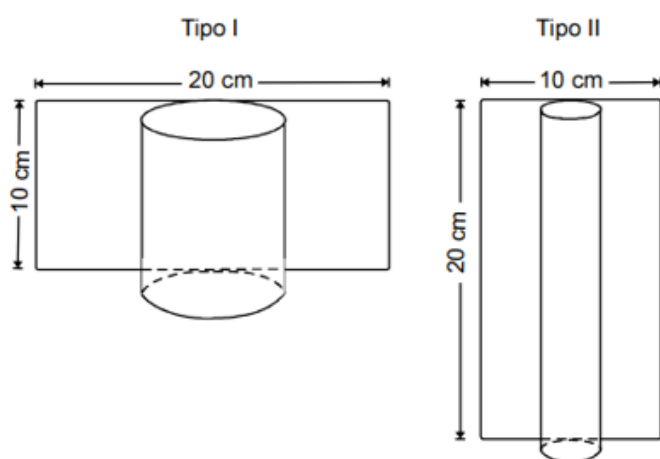


Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual. Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

- A) 14,4%
- B) 20,0%
- C) 32,0%
- D) 36,0%
- E) 64,0%

EXERCÍCIO 2: (ENEM - 2006).

Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm x 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

- A) o triplo.
- B) o dobro.

- C) igual.
- D) a metade.
- E) a terça parte.

EXERCÍCIO 3: (ENEM PPL - 2019).

Para decorar sua casa, uma pessoa comprou um vaso de vidro em forma de um paralelepípedo retangular, cujas medidas internas são: 40 cm de comprimento, 35 cm de largura e 60 cm de altura. Em seguida, foi até uma floricultura e escolheu uma planta aquática para colocar nesse vaso. Segundo uma proposta do gerente do local, essa pessoa avaliou a possibilidade de enfeitar o vaso colocando uma certa quantidade de pedrinhas artificiais brancas, de volume igual a 100 cm^3 cada uma delas, que ficarão totalmente imersas na água que será colocada no vaso. O gerente alertou que seria adequado, em função da planta escolhida, que metade do volume do vaso fosse preenchido com água e que, após as pedrinhas colocadas, a altura da água deveria ficar a 10 cm do topo do vaso, dando um razoável espaço para o crescimento da planta. A pessoa aceitou as sugestões apresentadas, adquirindo, além da planta, uma quantidade mínima de pedrinhas, satisfazendo as indicações do gerente.

Nas condições apresentadas, a quantidade de pedrinhas compradas foi:

- A) 140.
- B) 280.
- C) 350.
- D) 420.
- E) 700.

EXERCÍCIO 4: (ENEM - 2015).

Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π .

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

- A) 0,5
- B) 1,0
- C) 2,0
- D) 3,5
- E) 8,0

EXERCÍCIO 5: (ENEM 2014 - REAPLICAÇÃO).

Para fazer um pião, brinquedo muito apreciado pelas crianças, um artesão utilizará o torno mecânico para trabalhar num pedaço de madeira em formato de cilindro reto, cujas medidas do diâmetro e da altura estão ilustradas na Figura 1. A parte de cima desse pião será uma semiesfera, e a parte de baixo, um cone com altura 4 cm, conforme Figura 2. O vértice do cone deverá coincidir com o centro da base do cilindro.

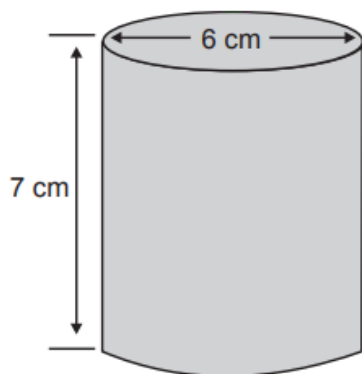


Figura 1

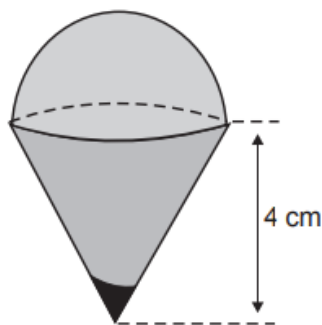


Figura 2

O artesão deseja fazer um pião com a maior altura que esse pedaço de madeira possa proporcionar e de modo a minimizar a quantidade de madeira a ser descartada.

Dados:

O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$;

O volume do cilindro de altura h e área da base S é $S \cdot h$;

O volume do cone de altura h e área da base S é $\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$;

Por simplicidade, aproxime π para 3.

A quantidade de madeira descartada, em centímetros cúbicos, é

- A) 45.
- B) 48.
- C) 72.
- D) 90.
- E) 99.

Instrumento de Pesquisa: Impacto da Modelagem Matemática

Instruções: Por favor, leia atentamente cada questão e marque a(s) opção(ões) que melhor representa(m) sua realidade ou opinião **APÓS APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM DE MODELAGEM MATEMÁTICA**.

Seção 1: Percepção da Metodologia e Confiança

Questão 1.1. Qual seu nível de confiança para resolver problemas de Geometria Espacial (especialmente os do estilo ENEM) após a intervenção didática com Modelagem Matemática?

() Muito Baixa () Baixa () Moderada () Alta () Muito Alta

Justifique: _____

Questão 1.2. A abordagem com Modelagem Matemática, utilizando problemas contextualizados do ENEM, ajudou você a superar alguma dificuldade anterior em Geometria Espacial?

☐ Sim, muito. ☐ Sim, um pouco. ☐ Não ajudou. ☐ Não tinha dificuldades.

Justifique: _____

Questão 1.3. Como a Modelagem Matemática traduzindo um problema real/contextualizado para a linguagem matemática afetou sua compreensão dos Geometria Espacial? (Marque uma opção)

- ☐ Não houve impacto.
- ☐ Tornou os conceitos mais abstratos.
- ☐ Conectou os conceitos à realidade, tornando-os mais claros.
- ☐ Facilitou a visualização espacial dos sólidos.

Seção 2: O Processo de Modelagem na Geometria Espacial

Questão 2.1. Qual das etapas da Modelagem Matemática foi a mais desafiadora para você na resolução dos problemas do ENEM apresentados na sequência didática? (Marque apenas uma opção)

- ☐ Interpretação/Identificação: Compreender o problema, identificar o sólido e as variáveis.
- ☐ Modelagem: Traduzir o problema em fórmulas ou equações (o modelo matemático).
- ☐ Resolução: Aplicar as técnicas de cálculo e matemática básica (as contas).
- ☐ Validação/Análise: Verificar se o resultado faz sentido no contexto original do problema.

Questão 2.2. A visualização espacial (imaginar o sólido, sua planificação, ou um corte) se tornou mais fácil ao utilizar a abordagem de Modelagem Matemática em comparação com o ensino tradicional?

- ☐ Discordo Totalmente
- ☐ Discordo
- ☐ Neutro / Indiferente
- ☐ Concordo

☐ Concordo Totalmente

Questão 2.3. Em sua opinião, a Modelagem Matemática é uma metodologia que impulsiona o estudo da Geometria Espacial visando o ENEM?

☐ Discordo Totalmente

☐ Discordo

☐ Neutro / Indiferente

☐ Concordo

☐ Concordo Totalmente

Seção 3: O Estudo da Geometria Espacial no Contexto do ENEM

Questão 3.1. Você acredita que a Geometria Espacial é um dos conteúdos que mais exige capacidade de interpretação e modelagem nas provas do ENEM?

☐ Concordo totalmente.

☐ Concordo em parte.

☐ Discordo.

Questão 3.2. Qual é o maior desafio na hora de resolver uma questão de Geometria Espacial do ENEM, após a sequência didática? (Marque uma opção)

☐ A pressão do tempo para realizar cálculos complexos.

☐ A dificuldade em visualizar a situação descrita no enunciado.

☐ A necessidade de recorrer a teoremas auxiliares antes de aplicar a fórmula principal.

☐ A presença de muitas informações desnecessárias que confundem a interpretação.

Questão 3.3. Para uma preparação futura para o ENEM, você considera que o estudo de Geometria Espacial deve ser: (Marque uma ou mais opções)

☐ Baseado em repetição de exercícios básicos de fórmula.

☐ Focado na análise de problemas contextualizados e na Modelagem Matemática.

☐ Integrado com o uso de materiais concretos ou softwares de geometria.

☐ Priorizado em relação a outros conteúdos da Matemática.

ANEXO 1 – PRODUTO EDUCACIONAL



INSTITUTO FEDERAL

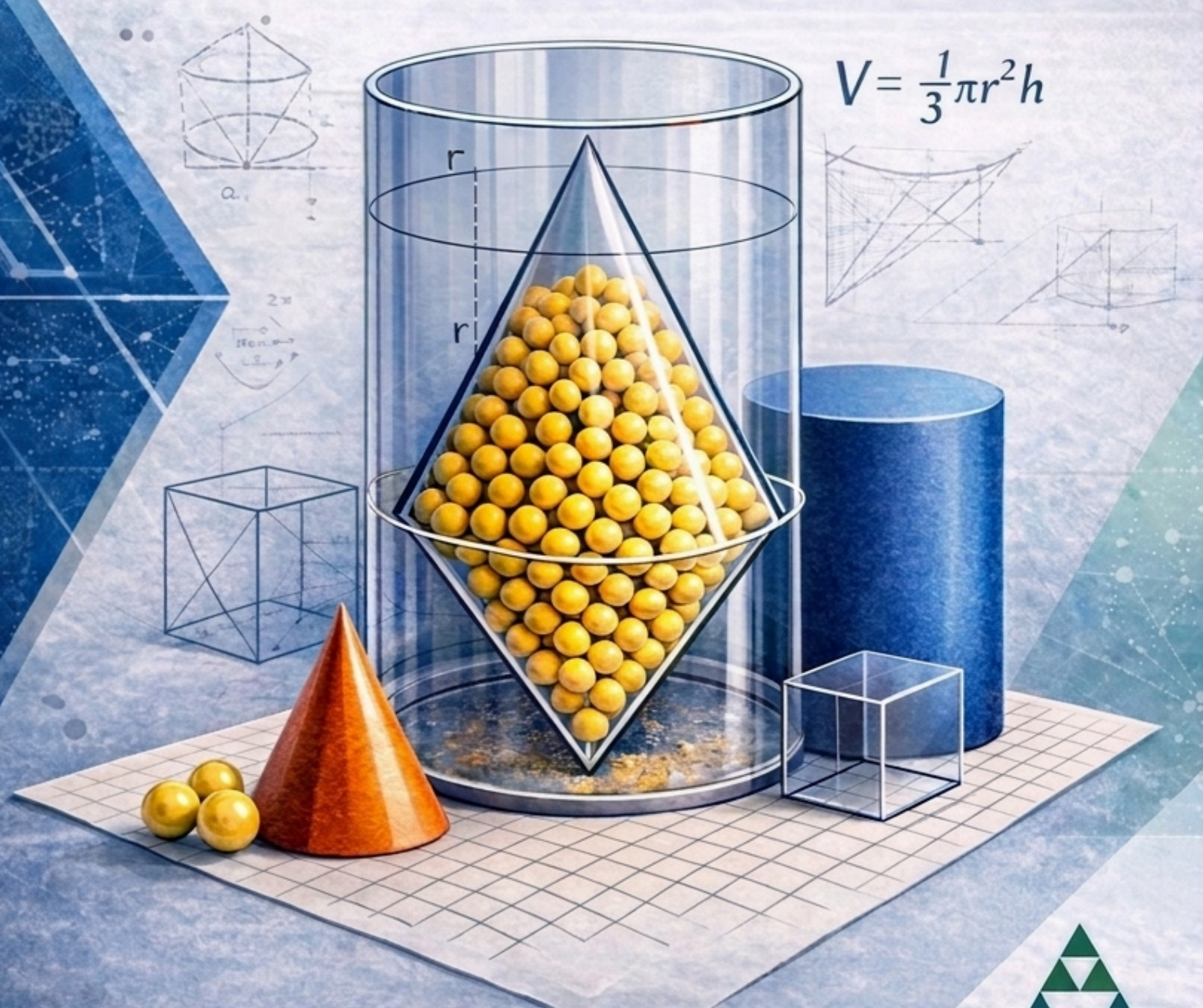
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL

EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL:

Uma sequência didática com base em questões do ENEM

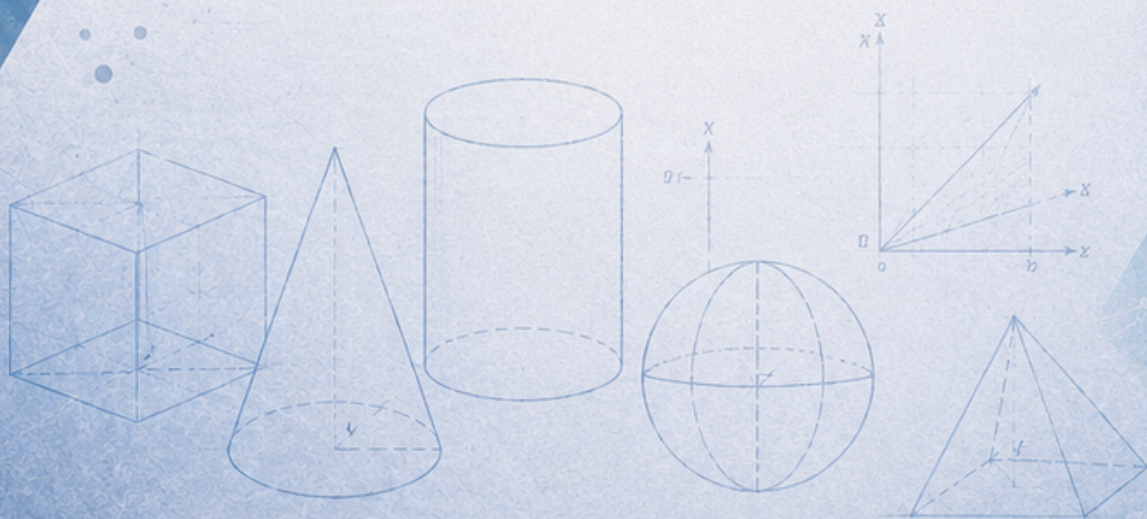


Antonio Marcos de Lima Miranda
André Luiz Ferreira de Carvalho Melo
Ezequias Matos Esteves



MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL:

Uma sequência didática com base em questões do ENEM



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Miranda, Antonio Marcos de Lima

Modelagem matemática no ensino de geometria espacial [livro eletrônico] : uma sequência didática com base em questões do ENEM / Antonio Marcos de Lima Miranda, André Luiz Ferreira de Carvalho Melo, Ezequias Matos Esteves. -- Florianópolis, PI : Ed. dos Autores, 2026.

PDF

Bibliografia.

ISBN 978-65-02-19117-0

1. BNCC - Base Nacional Comum Curricular
2. ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio
3. Geometria espacial (Ensino médio) 4. Matemática (Ensino médio) 5. Modelagem matemática I. Melo, André Luiz Ferreira de Carvalho. II. Esteves, Ezequias Matos. III. Título.

26-372085.0

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

FICHA TÉCNICA DO PRODUTO EDUCACIONAL

Título do Produto

Modelagem Matemática no Ensino de Geometria Espacial: Uma Sequência Didática com Base em Questões do ENEM

Autores

Antonio Marcos de Lima Miranda
André Luiz Ferreira de Carvalho Melo
Ezequias Matos Esteves

Programa

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Instituição

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI) –
Campus Floriano

Área de Conhecimento

Matemática

Público-alvo

Professores de Matemática do Ensino Médio e do Ensino Fundamental II

Ano de Produção

2026

ISBN

978-65-02-19117-0

RESUMO

Este caderno pedagógico apresenta uma sequência didática fundamentada na Modelagem Matemática aplicada ao ensino de Geometria Espacial, tomando como eixo estruturante questões do ENEM. A proposta articula construção de modelos matemáticos, experimentação concreta, validação de resultados e análise crítica, promovendo aprendizagem significativa e desenvolvimento de competências previstas na BNCC. A sequência contempla pré-teste e pós-teste, oficinas de construção de protótipos, comparação entre resultados teóricos e experimentais e reflexões pedagógicas sobre replicabilidade.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Geometria Espacial; ENEM; BNCC; Produto Educacional.



SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	5
INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA PEDAGÓGICA	6
OBJETIVOS	10
1 FUNDAMENTAÇÃO E CONTEXTUALIZAÇÃO	11
1.1 Modelagem Matemática e Ensino de Geometria	11
1.2 Relação com o ENEM e a BNCC	12
1.3 Abordagem Metodológica da Sequência Didática	15
2 ESTRUTURA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	17
2.1 Público-Alvo e Organização	17
2.2 Cronograma e Recursos	18
2.3 Estratégias de Avaliação	20
2.4 Habilidades da BNCC Desenvolvidas	23
2.5 Competências e habilidades do ENEM Desenvolvidas	24
2.6 Quadro-síntese da Sequência Didática	25
3 PROBLEMAS EM GEOMETRIA ESPACIAL	26
3.1 O Silo de Grãos: Um Estudo de Caso	26
3.2 Empacotamento e Deslocamento de Volume	29
3.3 Redução de Volume em Cones	32
3.4 Cilindros e suas Propriedades	35
3.5 integração e Análise Geral	38
4 AVALIAÇÃO E VALIDAÇÃO DA APRENDIZAGEM	39
4.1 Pré-Teste	39
4.2 Pós-Teste	40
4.3 Análise Comparativa	40
5 ORIENTAÇÕES PARA APLICAÇÃO E REPLICAÇÃO	42
CONSIDERAÇÕES FINAIS	44
REFERÊNCIAS	46
APÊNDICES	48
AGRADECIMENTOS	56

APRESENTAÇÃO

Este caderno pedagógico constitui o produto educacional vinculado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). O material apresenta uma sequência didática estruturada a partir da Modelagem Matemática aplicada ao ensino de Geometria Espacial, tomando como eixo organizador questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

A proposta fundamenta-se na compreensão de que as questões do ENEM não exigem apenas aplicação direta de fórmulas, mas interpretação de situações contextualizadas, construção de modelos geométricos e análise crítica de resultados. Nesse sentido, a modelagem matemática configura-se como abordagem metodológica adequada para desenvolver competências de resolução de problemas, argumentação e validação de resultados.

O material foi organizado para aplicação em turmas da 3ª série do Ensino Médio, podendo ser adaptado a outras realidades escolares.

INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA PEDAGÓGICA

Desafios no ensino de Geometria Espacial

O ensino de Geometria Espacial no contexto da Educação Básica brasileira tem historicamente enfrentado desafios significativos, especialmente no que se refere à compreensão conceitual dos estudantes e ao desenvolvimento da visualização espacial. Em muitas práticas pedagógicas, observa-se a predominância de abordagens centradas na memorização de fórmulas e na aplicação mecânica de procedimentos algorítmicos, o que limita a construção de significados matemáticos mais profundos.

Essa abordagem tradicional, frequentemente dissociada de contextos reais, contribui para que os estudantes compreendam os sólidos geométricos apenas como abstrações simbólicas, sem estabelecer relações com situações concretas do cotidiano. Como consequência, há dificuldades recorrentes na interpretação de problemas, na identificação de grandezas relevantes e na construção de estratégias de resolução, especialmente quando as situações exigem raciocínio tridimensional.

Essas dificuldades tornam-se ainda mais evidentes em avaliações externas, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), cujas questões de Geometria Espacial demandam não apenas o domínio de fórmulas, mas principalmente a capacidade de interpretar contextos, construir modelos e analisar resultados. Nesse cenário, muitos estudantes apresentam baixo desempenho, não por desconhecerem os conteúdos, mas por não conseguirem mobilizá-los de forma significativa.

Dessa forma, evidencia-se a necessidade de repensar as práticas pedagógicas voltadas ao ensino de Geometria Espacial, buscando estratégias que favoreçam a compreensão conceitual, a visualização espacial e a aplicação do conhecimento em situações contextualizadas.

Limitações das abordagens tradicionais e necessidade de inovação

As abordagens tradicionais de ensino de Matemática, ainda amplamente presentes nas salas de aula, tendem a privilegiar a transmissão de conteúdos de forma expositiva, com foco na repetição de exercícios e na reprodução de procedimentos previamente apresentados pelo professor. Embora tais práticas possam contribuir para o desenvolvimento de habilidades operacionais, elas se mostram insuficientes para promover uma aprendizagem significativa, especialmente em conteúdos que envolvem relações espaciais e interpretação de fenômenos tridimensionais.

No caso específico da Geometria Espacial, essa limitação se intensifica, uma vez que a compreensão dos conceitos exige a articulação entre representação simbólica, visualização e experimentação. Quando o ensino se restringe ao uso de fórmulas e à resolução de exercícios descontextualizados, o estudante tende a desenvolver uma compreensão fragmentada, incapaz de estabelecer conexões entre os conceitos matemáticos e a realidade.

Além disso, a ausência de atividades investigativas e experimentais reduz as oportunidades de protagonismo discente, dificultando o desenvolvimento de habilidades como argumentação, análise crítica e validação de resultados. Nesse contexto, o erro passa a ser visto como falha, e não como parte do processo de aprendizagem, o que pode inibir a participação dos estudantes e comprometer o desenvolvimento do pensamento matemático.

As orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforçam a necessidade de superação desse modelo tradicional, ao enfatizar a importância de práticas pedagógicas que promovam investigação, resolução de problemas e construção de conhecimentos em contextos significativos. Assim, torna-se fundamental a adoção de metodologias que valorizem a participação ativa dos estudantes, a contextualização dos conteúdos e a articulação entre teoria e prática.

A Modelagem Matemática como alternativa pedagógica

Diante das limitações das abordagens tradicionais, a Modelagem Matemática apresenta-se como uma alternativa pedagógica capaz de promover uma aprendizagem mais significativa e contextualizada. Essa abordagem caracteriza-se pela investigação de situações reais por meio da construção de modelos matemáticos, permitindo ao estudante compreender, interpretar e analisar fenômenos a partir de representações matemáticas.

Ao trabalhar com problemas contextualizados, a modelagem favorece a aproximação entre a Matemática e a realidade, tornando o processo de aprendizagem mais relevante e motivador. Nesse contexto, o estudante deixa de ser um mero receptor de informações e passa a assumir um papel ativo na construção do conhecimento, participando da formulação de hipóteses, da definição de estratégias de resolução e da análise dos resultados obtidos.

No ensino de Geometria Espacial, a Modelagem Matemática possibilita a exploração concreta dos sólidos geométricos por meio da construção de protótipos, medições e experimentações. Essa abordagem contribui para o desenvolvimento da visualização espacial, ao permitir que os estudantes manipulem objetos tridimensionais, observem suas propriedades e estabeleçam relações entre diferentes grandezas.

Além disso, a modelagem promove a compreensão de que os modelos matemáticos são representações simplificadas da realidade, cuja validade depende das hipóteses assumidas. Esse aspecto é fundamental para o desenvolvimento do pensamento crítico, uma vez que leva o estudante a analisar as limitações dos modelos e a refletir sobre a adequação das soluções encontradas.

A articulação entre Modelagem Matemática e questões do ENEM potencializa ainda mais essa proposta, uma vez que as situações-problema presentes no exame exigem exatamente esse tipo de abordagem: interpretação de contextos, construção de modelos e validação de resultados. Dessa forma, a modelagem não apenas contribui para a aprendizagem conceitual, mas também prepara os estudantes para enfrentar desafios avaliativos de forma mais autônoma e reflexiva.

Objetivos e relevância do produto educacional

O presente produto educacional tem como objetivo apresentar uma sequência didática fundamentada na Modelagem Matemática, voltada ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio, tomando como referência situações-problema inspiradas em questões do ENEM. A proposta busca contribuir para o desenvolvimento da compreensão conceitual, da capacidade de interpretação de problemas e da habilidade de validar resultados em contextos reais.

Ao integrar atividades investigativas, construção de modelos físicos e análise comparativa entre resultados teóricos e experimentais, o material propõe uma abordagem que articula teoria e prática, favorecendo a aprendizagem significativa. Além disso, a sequência didática foi estruturada de modo a possibilitar sua aplicação em diferentes contextos escolares, utilizando materiais de baixo custo e estratégias metodológicas acessíveis.

A relevância deste produto educacional reside na sua contribuição para o aprimoramento das práticas pedagógicas no ensino de Matemática, especialmente no que se refere à Geometria Espacial. Ao propor uma metodologia que valoriza a investigação, a experimentação e a contextualização, o material responde às demandas contemporâneas da educação, alinhando-se às orientações da BNCC e às competências avaliadas no ENEM.

Além disso, o produto apresenta potencial de replicabilidade, podendo ser adaptado por professores de diferentes realidades escolares, o que amplia seu alcance e impacto educacional. Nesse sentido, constitui-se não apenas como um recurso didático, mas como uma proposta de inovação pedagógica que busca contribuir para a formação de estudantes mais críticos, autônomos e capazes de utilizar a Matemática como ferramenta de compreensão da realidade.

OBJETIVOS

Objetivo Geral

Desenvolver e aplicar uma sequência didática baseada em modelagem matemática, utilizando questões do ENEM como situações-problema para o ensino de Geometria Espacial, promovendo compreensão conceitual, argumentação e validação experimental.

Objetivos Específicos

- Interpretar questões do ENEM envolvendo sólidos geométricos sob a perspectiva da modelagem matemática;
- Construir modelos geométricos físicos em escala;
- Comparar resultados teóricos e experimentais;
- Analisar discrepâncias entre modelo matemático e realidade;
- Desenvolver competências relacionadas à resolução de problemas contextualizados;
- Avaliar o impacto da sequência didática por meio de pré-teste e pós-teste com questões do ENEM.

1 FUNDAMENTAÇÃO E CONTEXTUALIZAÇÃO

1.1 Modelagem Matemática e Ensino de Geometria

A Modelagem Matemática, no âmbito da Educação Matemática, tem sido compreendida como uma abordagem investigativa que articula situações da realidade à construção de representações matemáticas, possibilitando a compreensão, análise e interpretação de fenômenos. Conforme Bassanezi (2002), modelar consiste em transformar situações reais em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas no contexto original. Trata-se, portanto, de um processo dinâmico que envolve representação, análise e validação.

Almeida, Silva e Vertuan (2016) destacam que o modelo matemático é uma representação simplificada da realidade, construída com o objetivo de descrever, explicar ou prever o comportamento de determinado fenômeno. Essa simplificação não implica empobrecimento conceitual, mas organização das variáveis relevantes à análise do problema. Nesse sentido, a modelagem não é apenas um recurso metodológico, mas um processo estruturado que envolve etapas interdependentes.

No contexto deste caderno pedagógico, a modelagem envolve:

- Problematização da situação, a partir de um contexto real ou de uma questão do ENEM;
- Simplificação da realidade, com identificação das variáveis essenciais;
- Construção do modelo matemático, por meio de expressões, fórmulas ou relações geométricas;
- Resolução, utilizando procedimentos matemáticos adequados;
- Validação e interpretação, confrontando o resultado com a situação inicial e analisando sua plausibilidade.

Burak (1992) ressalta que a modelagem, ao partir do interesse do grupo e da investigação de situações do cotidiano, favorece o envolvimento dos estudantes e o desenvolvimento do pensamento crítico. Assim, o valor pedagógico da modelagem reside não apenas na solução obtida, mas no percurso investigativo realizado.

No ensino de Geometria Espacial, essa abordagem assume relevância particular. Historicamente, conforme aponta Lorenzato (1995), a Geometria tem sido frequentemente relegada a segundo plano ou apresentada de maneira excessivamente formalista, o que compromete o desenvolvimento do raciocínio visual e espacial. Quando abordada apenas por meio de fórmulas e procedimentos algorítmicos, a Geometria Espacial limita a compreensão conceitual dos estudantes, reduzindo sólidos geométricos a expressões simbólicas descontextualizadas.

A Modelagem Matemática permite superar essa limitação ao favorecer:

- Visualização concreta dos sólidos;
- Construção de protótipos físicos em escala;
- Comparação entre resultados teóricos e experimentais;
- Interpretação de fenômenos tridimensionais em contextos reais.

Ao construir modelos físicos de cilindros, cones ou recipientes e comparar medidas experimentais com cálculos teóricos, o estudante compreende, por exemplo, que o volume depende da relação cúbica entre as dimensões lineares, internalizando o significado das fórmulas. Esse movimento fortalece o raciocínio geométrico e amplia a capacidade de interpretação espacial, aspectos fundamentais tanto para a formação matemática quanto para o desempenho em avaliações externas.

1.2 Relação com o ENEM e a BNCC

A articulação entre Modelagem Matemática, Geometria Espacial e ENEM constitui eixo central desta proposta pedagógica. As questões de Geometria no ENEM exigem, predominantemente, interpretação de contextos, identificação de variáveis relevantes e construção implícita de modelos matemáticos. Não se trata apenas da aplicação direta de fórmulas, mas da compreensão estrutural do problema.

A matriz de referência do exame valoriza competências relacionadas à resolução de problemas, análise de grandezas e interpretação de representações espaciais. Assim, o estudante precisa:

- Traduzir situações contextualizadas para a linguagem matemática;
- Estabelecer relações entre área, volume e proporcionalidade;
- Avaliar a coerência dos resultados obtidos.

Nesse cenário, a Modelagem Matemática apresenta convergência direta com as competências avaliadas, pois estrutura o processo de resolução segundo as mesmas etapas cognitivas exigidas pelo exame: compreensão do problema, matematização, resolução e validação.

Além disso, a proposta está alinhada às orientações da Base Nacional Comum Curricular, que enfatiza a investigação, a resolução de problemas e a modelagem como práticas essenciais no Ensino Médio. A habilidade EM13MAT301, por exemplo, orienta que o estudante seja capaz de resolver e elaborar problemas em contextos diversos, avaliando a razoabilidade dos resultados obtidos.

A BNCC destaca ainda, em suas competências gerais, a importância de exercitar a curiosidade intelectual, formular hipóteses, testar previsões e analisar criticamente soluções (BRASIL, 2018). Tais princípios dialogam diretamente com a estrutura da modelagem.

Conforme D'Ambrosio (2009) argumenta, as transformações nos modos de produzir conhecimento exigem práticas pedagógicas que valorizem investigação e contextualização. Nesse sentido, a proposta aqui apresentada responde às demandas contemporâneas do ensino de Matemática ao integrar:

- Contextualização por meio de questões do ENEM;
- Construção de modelos matemáticos;
- Experimentação e validação empírica;
- Análise crítica dos resultados.

Assim, a relação entre Modelagem Matemática, ENEM e BNCC não é circunstancial, mas epistemológica e metodológica, estruturando a proposta deste caderno pedagógico.

- Traduzir situações contextualizadas para a linguagem matemática;
- Estabelecer relações entre área, volume e proporcionalidade;
- Avaliar a coerência dos resultados obtidos.

Nesse cenário, a Modelagem Matemática apresenta convergência direta com as competências avaliadas, pois estrutura o processo de resolução segundo as mesmas etapas cognitivas exigidas pelo exame: compreensão do problema, matematização, resolução e validação.

Além disso, a proposta está alinhada às orientações da Base Nacional Comum Curricular, que enfatiza a investigação, a resolução de problemas e a modelagem como práticas essenciais no Ensino Médio. A habilidade EM13MAT301, por exemplo, orienta que o estudante seja capaz de resolver e elaborar problemas em contextos diversos, avaliando a razoabilidade dos resultados obtidos.

A BNCC destaca ainda, em suas competências gerais, a importância de exercitar a curiosidade intelectual, formular hipóteses, testar previsões e analisar criticamente soluções (BRASIL, 2018). Tais princípios dialogam diretamente com a estrutura da modelagem.

Conforme D'Ambrosio (2009) argumenta, as transformações nos modos de produzir conhecimento exigem práticas pedagógicas que valorizem investigação e contextualização. Nesse sentido, a proposta aqui apresentada responde às demandas contemporâneas do ensino de Matemática ao integrar:

- Contextualização por meio de questões do ENEM;
- Construção de modelos matemáticos;
- Experimentação e validação empírica;
- Análise crítica dos resultados.

Assim, a relação entre Modelagem Matemática, ENEM e BNCC não é circunstancial, mas epistemológica e metodológica, estruturando a proposta deste caderno pedagógico.

1.3 Abordagem Metodológica da Sequência Didática

A sequência didática proposta organiza-se a partir de uma perspectiva interventiva e investigativa, inspirada no percurso metodológico descrito na dissertação. A estrutura contempla quatro momentos articulados:

1. Diagnóstico inicial

A sequência inicia-se com a aplicação de um pré-teste composto por questões do ENEM, com o objetivo de identificar conhecimentos prévios, dificuldades conceituais e estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução de problemas de Geometria Espacial. Essa etapa permite mapear lacunas relacionadas à visualização espacial, interpretação de enunciados e aplicação de relações métricas.

2. Desenvolvimento de oficinas

O núcleo da proposta consiste em oficinas de Modelagem Matemática organizadas a partir de problemas inspirados em questões do ENEM. Cada oficina envolve:

- Análise coletiva da situação-problema;
- Identificação das variáveis envolvidas;
- Construção do modelo matemático;
- Resolução e registro dos procedimentos;
- Construção de protótipos físicos em escala;
- Discussão coletiva dos resultados.

Nessa fase, o professor atua como mediador, conforme defendem Biembengut e Hein (2018), estimulando a investigação e orientando a sistematização dos conceitos.

3. Validação experimental

Após a construção do modelo matemático, os estudantes realizam a validação experimental por meio de protótipos físicos (silos, recipientes com esferas, cones, cilindros).

Essa etapa envolve:

- Medição de grandezas reais;
- Comparação entre valores teóricos e experimentais;
- Análise de discrepâncias;
- Discussão sobre simplificações do modelo.

Conforme Almeida, Silva e Vertuan (2016), a validação constitui etapa essencial da modelagem, pois evidencia limites e potencialidades da representação construída.

4. Avaliação final comparativa

Ao término da sequência, aplica-se um pós-teste também composto por questões do ENEM, possibilitando a comparação com o diagnóstico inicial.

A análise comparativa permite avaliar:

- Evolução conceitual;
- Ampliação da capacidade interpretativa;
- Desenvolvimento da autonomia na resolução de problemas.

Essa organização metodológica articula teoria, prática e avaliação, favorecendo aprendizagem significativa e alinhamento às competências requeridas pelo ENEM.

2 ESTRUTURA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática apresentada neste caderno pedagógico fundamenta-se na Modelagem Matemática como eixo metodológico para o ensino de Geometria Espacial. Sua organização considera o perfil dos estudantes, a realidade escolar e as exigências formativas do Ensino Médio, especialmente no que se refere às competências avaliadas no ENEM.

A estrutura articula diagnóstico inicial, desenvolvimento de oficinas investigativas, validação experimental e avaliação final comparativa, promovendo integração entre teoria, prática e reflexão crítica.

2.1 Público-Alvo e Organização

A sequência didática destina-se a estudantes da 3ª série do Ensino Médio, preferencialmente em turmas que estejam em fase de consolidação dos conteúdos de Geometria Espacial ou em processo de revisão para o ENEM.

A escolha desse público justifica-se por três fatores principais:

1. Necessidade de aprofundamento conceitual em conteúdos de área e volume de sólidos;
2. Proximidade com avaliações externas, especialmente o ENEM;
3. Maturidade cognitiva adequada para atividades investigativas e experimentais.

A organização da turma pode ocorrer em 4 grupos colaborativos de 5 a 8 estudantes, e cada grupo com uma situação problema, favorecendo:

- Discussão de estratégias de resolução;
- Construção coletiva de modelos matemáticos;
- Divisão de tarefas na construção dos protótipos;
- Socialização de resultados.

O professor assume papel de mediador do processo, orientando a problematização, incentivando a formulação de hipóteses e conduzindo a sistematização conceitual ao final de cada atividade.

A sequência está estruturada em quatro momentos pedagógicos:

1. Diagnóstico inicial (pré-teste)
2. Oficinas de Modelagem Matemática
3. Validação experimental dos modelos
4. Avaliação final comparativa (pós-teste)

Essa organização garante coerência metodológica e permite acompanhamento do desenvolvimento das habilidades ao longo do processo.

2.2 Cronograma e Recursos

A sequência didática pode ser desenvolvida em aproximadamente 12 a 18 aulas de 50 minutos, podendo ser adaptada conforme a realidade da escola.

Quadro 1 - Proposta de cronograma da sequência didática

Semana	Número de aulas	Atividades
1ª semana	2 aulas	Aplicação do pré-teste diagnóstico com cinco questões contextualizadas do ENEM e Instrumento de Pesquisa sobre dificuldades de aprendizagem em Geometria Espacial.
2ª semana	3 aulas	Introdução à Modelagem Matemática por meio de discussão orientada, análise do pré-teste, análise coletiva da situação-problema e organização dos grupos de trabalho.
3ª semana	3 aulas	Construção dos modelos físicos tridimensionais (cilindro, cone e sólidos compostos), com utilização de materiais de baixo custo, medições e ajustes estruturais.
4ª semana	4 aulas	Continuidade da construção e validação dos modelos: realização de cálculos matemáticos, medições experimentais de volume, massa e capacidade; discussão orientada sobre discrepâncias entre resultados teóricos e experimentais; preparação das apresentações dos grupos.

5ª semana	2 aulas	Socialização dos resultados por meio de apresentações orais dos grupos e exposição dos modelos, com mediação docente.
6ª semana	2 aulas	Aplicação do pós-teste avaliativo, composto por cinco questões do ENEM de complexidade semelhante às do pré-teste e com habilidades comuns.

Fonte: Elaborado pelo o autor, 2026.

O cronograma pode ser ajustado conforme carga horária disponível.

Recursos Didáticos Necessários

A utilização de materiais concretos é essencial para a validação experimental dos modelos e para o desenvolvimento da visualização espacial.

Quadro 2 – Recursos didáticos necessários para aplicação da sequência didática

Categoria	Recursos
Materiais manipuláveis	Papel cartão ou cartolina; papel A4; papel alumínio; isopor; tesoura; régua; transferidor; micrômetro; cola adesiva; cola de isopor; tinta guache; pincel; recipientes transparentes (garrafa PET); arroz ou areia (para simulação de volume); esferas ou bolinhas; água; proveta ou copo graduado; balança simples; barbante; fita métrica.
Recursos pedagógicos	Projeter multimídia; questões impressas do ENEM; fichas de registro das atividades; calculadora simples.
Recursos digitais (opcional)	Planilhas eletrônicas; simuladores geométricos.

Fonte: Elaborado pelo o autor, 2026.

Os recursos didáticos apresentados no quadro anterior foram selecionados com o objetivo de favorecer a aprendizagem por meio da experimentação, da visualização e da construção de modelos geométricos. A utilização de materiais manipuláveis possibilita aos estudantes explorar conceitos de Geometria Espacial de forma concreta, permitindo relacionar representações tridimensionais com suas formulações matemáticas.

Além disso, os recursos pedagógicos e digitais contribuem para ampliar as estratégias de ensino, possibilitando a apresentação de problemas contextualizados, a análise de diferentes representações geométricas e o registro sistemático das atividades desenvolvidas. Dessa forma, a combinação desses recursos busca promover um ambiente de aprendizagem investigativo, no qual os estudantes possam construir e validar modelos matemáticos a partir de situações-problema inspiradas em questões do ENEM.

2.3 Estratégias de Avaliação

A avaliação na sequência didática assume caráter diagnóstico, formativo e somativo, priorizando a compreensão conceitual e o desenvolvimento das competências matemáticas.

Avaliação Diagnóstica

Realizada por meio do pré-teste com cinco questões do ENEM, permite:

- Identificar lacunas conceituais;
- Mapear dificuldades na interpretação de problemas;
- Avaliar o nível inicial de domínio das habilidades relacionadas à Geometria Espacial.

Avaliação Formativa

Ocorre ao longo das oficinas, considerando a participação nas discussões em grupo, coerência na construção do modelo matemático, capacidade de justificar procedimentos, análise crítica das discrepâncias entre modelo teórico e experimental.

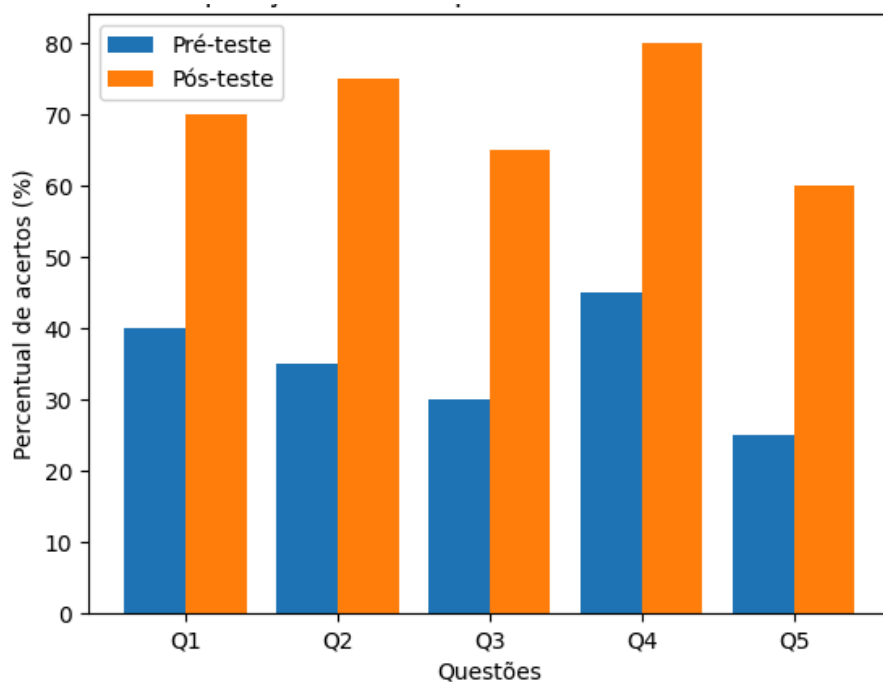
Registros escritos das atividades. O erro é tratado como elemento de reflexão e não como falha definitiva.

Avaliação Somativa Comparativa

Realizada por meio do pós-teste (5 questões do ENEM), aplicado ao final da sequência. A análise comparativa entre pré e pós-teste permite verificar evolução no desempenho, identificar consolidação das habilidades, avaliar impacto da metodologia. Os resultados podem ainda ser organizados por meio de tabulação em tabelas ou gráficos, possibilitando uma visualização clara da evolução da aprendizagem.

A seguir apresenta-se um exemplo de como dessa organização.

Gráfico 1 - Comparação de desempenho entre pré-teste e pós-teste



Fonte: Elaborado pelo o autor, 2026.

Tabela 1 – Comparação de acertos no pré-teste e pós-teste

Questão	Pré-teste (% de acertos)	Pós-teste (% de acertos)
Q1	40%	70%
Q2	35%	75%
Q3	30%	65%
Q4	45%	80%
Q5	25%	60%

Fonte: Elaborado pelo o autor, 2026.

A representação dos dados por meio de tabelas e gráficos é importante por permitir uma visualização clara e organizada dos resultados obtidos pelos estudantes. Essa forma de apresentação facilita a comparação entre o pré-teste e o pós-teste, possibilitando identificar avanços na aprendizagem e analisar o impacto da sequência didática no desenvolvimento das habilidades trabalhadas.

A avaliação da sequência didática fundamenta-se na análise da compreensão conceitual e da capacidade de resolução de problemas em Geometria Espacial. São considerados como critérios: a interpretação adequada do enunciado, a construção correta do modelo matemático, o uso coerente de fórmulas e relações geométricas, a argumentação lógica e a validação crítica dos resultados obtidos.

A proposta está alinhada às orientações da Base Nacional Comum Curricular, especialmente no que se refere ao desenvolvimento da modelagem matemática, da resolução de problemas e da análise de grandezas no Ensino Médio. Nesse sentido, mobiliza habilidades como analisar relações entre grandezas, interpretar representações geométricas e resolver problemas contextualizados — competências também exigidas no ENEM.

Organizada como um percurso investigativo, a sequência inicia-se com diagnóstico inicial, desenvolve atividades de modelagem contextualizadas, integra experimentação concreta para validação dos modelos e culmina em avaliação comparativa. Essa estrutura assegura coerência metodológica, articulação entre teoria e prática e alinhamento às demandas formativas do Ensino Médio.

2.4 Habilidades da BNCC Desenvolvidas

Quadro 3 - Habilidades da BNCC desenvolvidas na sequência didática

Código da habilidade	Descrição da habilidade	Relação com a sequência didática
EM13MAT301	Resolver e elaborar problemas envolvendo cálculo de áreas e volumes de sólidos geométricos em diferentes contextos.	Utilizada nas atividades de modelagem envolvendo cilindros, cones e outros sólidos estudados nas oficinas.
EM13MAT302	Construir e interpretar modelos matemáticos que representem situações reais, utilizando diferentes representações geométricas.	Desenvolvida na elaboração de modelos matemáticos a partir de problemas inspirados em questões do ENEM.
EM13MAT303	Interpretar e utilizar representações geométricas para analisar relações entre grandezas e resolver problemas contextualizados.	Mobilizada nas atividades de análise de estruturas geométricas presentes nas situações-problema trabalhadas.
EM13MAT401	Utilizar diferentes estratégias de resolução de problemas, argumentando matematicamente e validando resultados obtidos.	Desenvolvida nas etapas de construção, resolução e validação dos modelos matemáticos nas oficinas.

Fonte: Elaborado pelo o autor, 2026.

2.5 Competências e habilidades do ENEM Desenvolvidas

Quadro 4 – Competências e habilidades do ENEM mobilizadas na sequência didática

Competência	Habilidade	Descrição
Competência 2	H6	Interpretar a localização e a movimentação de pessoas ou objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
Competência 2	H7	Identificar características de figuras planas ou espaciais.
Competência 2	H8	Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
Competência 2	H9	Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
Competência 3	H10	Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
Competência 3	H12	Resolver situações-problema que envolvam medidas de grandezas.
Competência 3	H13	Avaliar resultados de medições e cálculos de grandezas, considerando o contexto da situação.
Competência 3	H14	Utilizar escalas, razões e proporções na resolução de problemas geométricos e de representação espacial.

Fonte: Elaborado pelo o autor, 2026.

2.6 Quadro Síntese da Sequência Didática

Quadro 5 - Síntese da Sequência Didática

Etapa	Objetivo	Atividade Principal	Produto Esperado
Diagnóstico inicial	Identificar conhecimentos prévios dos estudantes	Aplicação do pré-teste com questões do ENEM	Levantamento do nível inicial da turma
Oficina 1 – Silo de grãos	Compreender relações de volume em sólidos	Modelagem matemática do silo e construção de protótipo	Modelo geométrico do silo
Oficina 2 – Empacotamento de esferas	Analisar ocupação de volume	Experimento com esferas em recipientes	Comparação entre volume teórico e experimental
Oficina 3 – Redução de volume em cones	Estudar relações entre raio, altura e volume	Construção de cones em escala	Análise das variações de volume
Oficina 4 – Cilindros e otimização	Investigar relação entre área e volume	Construção de cilindros com diferentes dimensões	Comparação entre modelos
Avaliação final	Verificar avanços na aprendizagem	Aplicação do pós-teste	Comparação entre resultados

Fonte: Elaborado pelo o autor, 2026.

3 PROBLEMAS EM GEOMETRIA ESPACIAL

O presente capítulo apresenta o conjunto de oficinas que compõem o núcleo da sequência didática, estruturadas a partir da Modelagem Matemática e fundamentadas em situações-problema inspiradas em questões do ENEM. A proposta visa articular conceitos de Geometria Espacial à experimentação concreta, promovendo a construção, validação e análise crítica de modelos matemáticos.

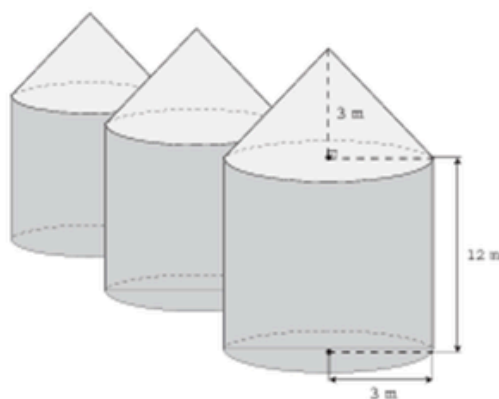
Cada oficina segue as etapas da modelagem: problematização, simplificação da realidade, construção do modelo matemático, resolução, validação experimental e interpretação dos resultados. Essa organização favorece a compreensão conceitual e amplia a capacidade de análise espacial dos estudantes.

3.1 O Silo de Grãos: Um Estudo de Caso

Figura 1 - Questão 136 (ENEM 2016 – Caderno Azul)

QUESTÃO 136

Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

- A 6.
- B 16.
- C 17.
- D 18.
- E 21.

Fonte: INEP, 2016.

A primeira oficina parte da análise de um silo utilizado para armazenamento de grãos, modelado matematicamente como um cilindro. A situação-problema propõe determinar a capacidade máxima de armazenamento e discutir a adequação do modelo adotado.

Inicialmente, promove-se a problematização por meio de uma questão contextualizada semelhante às abordadas no ENEM, envolvendo cálculo de volume e interpretação de grandezas. Os estudantes são conduzidos a identificar as variáveis relevantes — raio e altura — e a reconhecer que o silo pode ser simplificado como um cilindro perfeito, desconsiderando-se a espessura das paredes e possíveis irregularidades estruturais.

O modelo matemático construído é dado por:

Raio da base comum (r): 3 metros.

Altura da parte do cilindro (h_1): 12 metros.

Altura da parte cone (h_2): 3 metros.

Capacidade do caminhão (K): 20 m³ por viagem.

π : aproximada como 3.

$$V_{total} = V_1 + V_2$$

(i) Volume do Cilindro: $V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h_1$

(ii) Volume do Cone: $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_2$

$$V_{total} = V_1 + V_2 \Rightarrow$$

$$V_{total} = (3 \cdot 3^2 \cdot 12) + \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3\right) \Rightarrow$$

$$V_{total} = (3 \cdot 9 \cdot 12) + (9 \cdot 3) \Rightarrow$$

$$V_{total} = 324 + 27 \Rightarrow$$

$$V_{total} = 351 \text{ m}^3$$

:

$$N = \frac{351}{20} = 17,55$$

Número mínimo necessário de viagens é 18.

Após o cálculo do volume teórico, realiza-se a validação experimental por meio da construção de um protótipo em escala reduzida. Recomenda-se uma escala entre 1:50 e 1:100 e uma criação da capacidade do caminhão com dimensões de livre escolha.

Figura 2 – Construção do modelo físico do silo de grãos construído em escala reduzida



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

O protótipo é preenchido com material granular (areia ou arroz) e o volume é medido com auxílio de recipiente graduado. Pode usar a balança de precisão para comparar as massas. A comparação entre valor teórico e experimental permite discutir discrepâncias decorrentes de imprecisões na construção, compactação do material e limitações da idealização matemática.

Essa atividade evidencia que o modelo matemático representa uma aproximação da realidade e que sua validade depende das hipóteses assumidas.

Habilidades BNCC: EM13MAT302, EM13MAT303

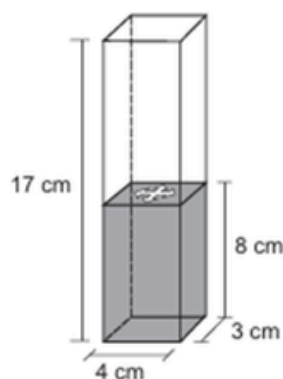
3.2 Empacotamento e Deslocamento de Volume

Figura 3 - Questão 164 (ENEM 2020 – Caderno cinza))

Questão 164

Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água.

Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a 6 cm^3 cada, que ficarão totalmente submersas.



O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de

- A** 14.
- B** 16.
- C** 18.
- D** 30.
- E** 34.

Fonte: INEP, 2020.

A segunda oficina aborda o conceito de deslocamento de volume a partir da inserção de esferas em um recipiente cilíndrico contendo água. A situação-problema investiga a elevação do nível do líquido após a imersão das esferas.

O processo inicia-se com a identificação das grandezas envolvidas e com a simplificação da realidade, considerando-se esferas perfeitas e desconsiderando inicialmente os espaços vazios entre elas.

O modelo matemático é representado por:

Geometria do Recipiente (Paralelepípedo): Base de 4 cm x 3 cm.

Altura total do recipiente (h_t): 17 cm

Altura inicial da água (h_i): 8 cm

Altura mínima necessária da água para retirar o objeto (h_f): 15 cm

Volume de cada bolinha (V_b): 6 cm³

A variação de altura da coluna de água é dado por:

$$\Delta_h = 15 - 8 = 7\text{ cm}$$

O aumento do nível da água corresponde a:

$$V_n = A_b \cdot \Delta_h$$

$$V_n = 12 \cdot 7 = 84\text{ cm}^3$$

Seja n o número de bolinhas.

$$n = \frac{84}{6} = 14$$

Matematicamente o modelo é coerente, pois a articulação algébrica mostra o resultado esperado, mas para isso precisa-se do experimento prático.

Para a construção do recipiente pode ser utilizada uma garrafa PET. As esferas podem ser representadas por bolas de gude, permitindo verificar se o volume ocupado corresponde ao esperado. Caso o volume da esfera não seja atingido, pode-se utilizar materiais de revestimento, como papel alumínio ou massa de modelar, para ajustar. A verificação do volume da esfera pode ser realizada utilizando o próprio recipiente como referência inserindo-a e verificando o aumento de 12 cm³ do volume, ou seja, 0,5 cm da altura da água.

Na etapa experimental, os estudantes medem o nível inicial da água, inserem as esferas e registram a nova altura atingida.

Figura 4 – Construção do modelo físico do recipiente com esferas



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

A análise comparativa dos resultados permite discutir a presença de espaços vazios entre as esferas e a necessidade de ajustes no modelo matemático utilizado. Essa reflexão contribui para que os estudantes compreendam que, em situações reais, as idealizações geométricas nem sempre representam perfeitamente os objetos físicos, ampliando o entendimento do conceito de volume em contextos tridimensionais.

Nesse contexto, pode-se relacionar a atividade ao Princípio de Arquimedes, segundo o qual o empuxo exercido sobre um corpo imerso em um fluido é igual ao peso do fluido deslocado. Esse princípio indica que apenas o volume efetivamente ocupado pelo sólido contribui para o deslocamento da água, permitindo aos estudantes perceber que os espaços vazios entre as esferas não participam desse deslocamento.

Dessa forma, a discussão contribui para aprofundar a compreensão do conceito de volume e das limitações dos modelos matemáticos utilizados na representação de situações reais.

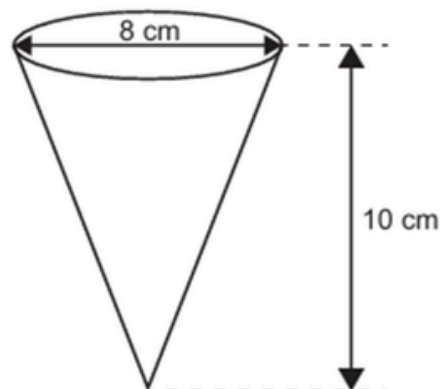
Habilidades BNCC: EM13MAT302, EM13MAT303

3.3 Redução de Volume em Cones

Figura 5 - Questão 148 (ENEM 2022 – Caderno Amarelo)

QUESTÃO 148

Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.



Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm.

Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

- A** 1,52.
- B** 3,24.
- C** 3,60.
- D** 6,48.
- E** 7,20.

Fonte: INEP, 2022.

Nesta oficina, investiga-se o impacto da redução proporcional das dimensões lineares sobre o volume de um cone. A questão central problematiza uma ideia intuitiva comum entre estudantes: ao reduzir o volume do cone em 19%, qual será o novo raio? Em quantos por cento o raio diminui?

O modelo matemático teórico é representado por:

Diâmetro da base igual a 8 cm

Raio do cone original: $r_1 = 4 \text{ cm}$.

Altura: $h = 10 \text{ cm}$.

Aplicando o cálculos dos volumes:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = \frac{160}{3} \pi \quad (i)$$

o volume do novo cone corresponde a:

$$V_2 = 0,81 \cdot V_1$$

Seu volume é dado por:

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot 10 \quad (ii)$$

Por (i) e (ii), obtém-se:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot 10 = 0,81 \cdot \frac{160}{3} \pi$$

$$10r_2^2 = 129,6 \Rightarrow$$

$$r_2^2 = 12,96 \Rightarrow$$

$$r_2 = \sqrt{12,96} \Rightarrow$$

$$r_2 = 3,6 \text{ cm}$$

É importante observar, no modelo matemático construído, a redução aproximada de 10% do volume em relação ao cone inicial. Essa discussão com os estudantes é necessária, pois permite analisar a proporcionalidade entre os volumes envolvidos e compreender como essa relação influencia os resultados obtidos.

Para consolidar essa compreensão, os estudantes constroem dois protótipos: um cone original e outro com dimensões reduzidas proporcionalmente com o raio encontrado.

Figura 6 – Construção dos protótipos dos cones e validação experimental com sorvete



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

Após a construção o processo de validação será provado através da massa do material utilizado para preenchimento do cone, utilizando uma balança de precisão.

A experimentação, realizada com preenchimento por areia, sorvete, chocolate ou outro material granular, confirma que a redução do volume ocorre em proporção cúbica.

A atividade possibilita superar interpretações lineares equivocadas e fortalece o entendimento das relações entre grandezas espaciais. Além disso, permite aos estudantes comparar o modelo teórico com o resultado prático observado no experimento, favorecendo uma análise mais crítica das relações matemáticas envolvidas.

Nesse processo, torna-se possível discutir como variações no raio influenciam diretamente o volume e, conseqüentemente, a quantidade de material utilizada (massa), evidenciando que pequenas mudanças no raio podem gerar variações significativas nessas grandezas. Dessa forma, os estudantes ampliam a compreensão das relações entre raio, volume e massa em contextos tridimensionais.

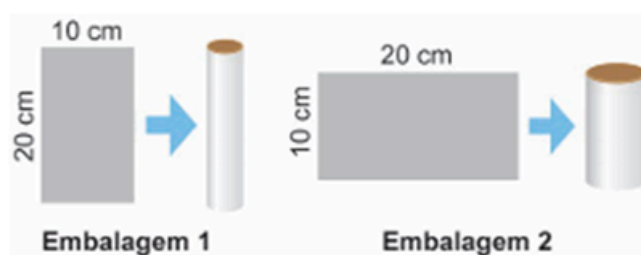
Habilidades BNCC: EM13MAT305, EM13MAT302

3.4 Cilindros e suas Propriedades

Figura 7 - Questão 175 (ENEM 2024 – Caderno Azul)

QUESTÃO 175

Uma indústria faz uma parceria com uma distribuidora de sucos para lançar no mercado dois tipos de embalagens. Para a fabricação dessas embalagens, a indústria dispõe de folhas de alumínio retangulares, de dimensões 10 cm por 20 cm. Cada uma dessas folhas é utilizada para formar a superfície lateral da embalagem, em formato de cilindro circular reto, que posteriormente recebe fundo e tampa circulares. A figura ilustra, dependendo de qual das duas extensões será utilizada como altura, as duas opções para formar a possível embalagem.



Dentre essas duas embalagens, a de maior capacidade apresentará volume, em centímetro cúbico, igual a

- A 4000π
- B 2000π
- C $\frac{4000}{\pi}$
- D $\frac{1000}{\pi}$
- E $\frac{500}{\pi}$

Fonte: INEP, 2024.

A última oficina explora relações entre área lateral e volume em cilindros, com enfoque em comparação e análise de variações dimensionais. A situação-problema apresenta dois cilindros com mesma área lateral, porém com alturas diferentes, questionando qual deles possui maior volume.

Inicialmente para mostrar o modelo matemático é importante calcular a área da lateral comum aos dois cilindros.

Dimensões da folha: 20 cm x 10 cm

$$\text{Área Lateral} = 20 \cdot 10 = 200 \text{ cm}^2$$

Os volumes dos cilindros são dados por:

$$2\pi r_1 = 10 \Rightarrow$$

$$r_1 = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$$

$$V_1 = \pi r_1^2 h_1$$

$$V_1 = \pi \cdot \left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \cdot 20 \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{500}{\pi}$$

daí,

$$2\pi r_2 = 20 \Rightarrow$$

$$r_2 = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}$$

$$V_2 = \pi r_2^2 h_2$$

$$V_2 = \pi \cdot \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 10 \Rightarrow$$

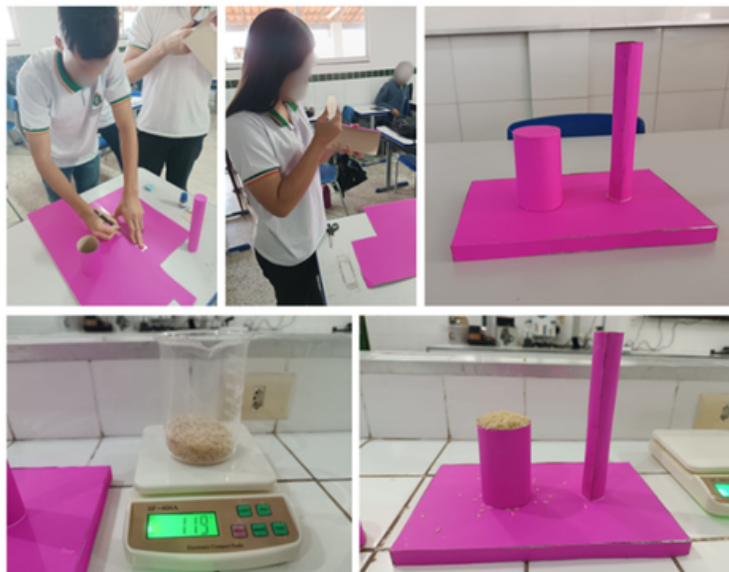
$$V_2 = \frac{1000}{\pi}$$

Mantendo a área lateral nos dois cilindros, os estudantes investigam como alterações no raio e na altura influenciam o volume total.

A construção de protótipos físicos com mesma área lateral permite verificar empiricamente as diferenças de capacidade. Essa diferença pode ser observada por meio da medição da massa utilizando materiais granulados, como arroz ou areia.

Para maior precisão na comparação dos resultados, recomenda-se utilizar uma balança de precisão, que possibilita medir com mais exatidão a quantidade de material presente em cada protótipo, permitindo relacionar as diferenças de massa às variações de volume entre os sólidos analisados.

Figura 8 – Construção dos modelos físicos dos cilindros



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026

A atividade conduz à reflexão sobre otimização e eficiência estrutural, estabelecendo conexões com aplicações práticas em engenharia, armazenamento e design industrial.

Além disso, após a realização dos experimentos, é importante que os estudantes percebam a relação entre o raio e o volume dos sólidos analisados, compreendendo que variações no raio influenciam significativamente a capacidade de armazenamento. Essa análise contribui para o desenvolvimento do raciocínio matemático ao relacionar resultados experimentais com os modelos teóricos estudados.

Habilidades BNCC: EM13MAT306

3.5 Integração e Análise Geral

Ao final das oficinas, promove-se uma sistematização coletiva dos resultados, enfatizando:

- A importância da problematização inicial;
- O papel das simplificações na construção do modelo;
- A necessidade de validação experimental;
- A análise crítica das discrepâncias encontradas;
- A aplicabilidade dos conceitos estudados.

Figura 9 – Socialização dos resultados da sequência didática



Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

O conjunto das atividades contribui para o desenvolvimento da visualização espacial, da argumentação matemática e da capacidade de interpretar situações tridimensionais em contextos reais, consolidando competências exigidas tanto pela Base Nacional Comum Curricular quanto pelo ENEM.

4 AVALIAÇÃO E VALIDAÇÃO DA APRENDIZAGEM

A avaliação, nesta proposta, assume caráter formativo e comparativo, articulando diagnóstico inicial, acompanhamento do desenvolvimento e verificação final da aprendizagem. Mais do que mensurar desempenho quantitativo, busca-se validar a consolidação conceitual em Geometria Espacial e a capacidade de modelar situações contextualizadas, conforme exigido no ENEM.

O processo avaliativo organiza-se em três momentos: pré-teste, pós-teste e análise comparativa dos resultados.

4.1 Pré-Teste

O pré-teste é aplicado antes do início das oficinas de Modelagem Matemática e tem como finalidade diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação aos conteúdos de Geometria Espacial.

O instrumento é composto por cinco questões objetivas do ENEM, selecionadas por contemplarem cálculo de volume de sólidos (paralelepípedo, cilindro, cone e esfera), relações entre grandezas, interpretação de situações contextualizadas e análise de proporcionalidade espacial.

Objetivos do Pré-Teste

- Identificar dificuldades conceituais relacionadas a área e volume;
- Verificar o nível de compreensão de enunciados contextualizados;
- Analisar estratégias utilizadas na resolução;
- Mapear possíveis equívocos na aplicação de fórmulas.

Além do registro quantitativo de acertos, recomenda-se observar a organização dos cálculos, a coerência das justificativas (quando solicitadas), o uso correto de unidades de medida.

O pré-teste não possui caráter classificatório, mas diagnóstico, servindo como referência para comparação posterior.

4.2 Pós-Teste

O pós-teste é aplicado ao término da sequência didática, após o desenvolvimento das oficinas, construção de protótipos e validação experimental dos modelos.

Também composto por cinco questões do ENEM, selecionadas com nível de complexidade semelhante ao pré-teste, o instrumento permite avaliar a evolução da aprendizagem.

Objetivos do Pós-Teste

- Verificar consolidação dos conceitos de volume e proporcionalidade espacial;
- Avaliar a capacidade de modelar situações-problema;
- Identificar melhoria na interpretação e análise crítica dos resultados;
- Comparar desempenho inicial e final.

Espera-se que, após a vivência da modelagem, os estudantes demonstrem maior segurança na escolha das fórmulas, uma melhor organização do raciocínio e a capacidade de verificar a plausibilidade das respostas.

4.3 Análise Comparativa

A análise comparativa constitui etapa central da validação da aprendizagem. Ela permite verificar não apenas o aumento percentual de acertos, mas, sobretudo, a evolução qualitativa na forma de resolver problemas.

A comparação entre pré e pós-teste pode considerar:

- Percentual médio de acertos da turma;
- Evolução individual dos estudantes;
- Redução de erros conceituais recorrentes;
- Melhoria na interpretação dos enunciados;
- Uso mais adequado de modelos matemáticos.

Além da análise quantitativa, recomenda-se uma leitura qualitativa das resoluções, observando:

- Clareza na identificação das variáveis;
- Organização lógica dos cálculos;
- Capacidade de justificar procedimentos;
- Análise crítica dos resultados obtidos.

A validação da aprendizagem não se limita ao desempenho numérico. Evidencia-se também na postura investigativa desenvolvida ao longo da sequência, na participação nas discussões, na compreensão das relações espaciais e na habilidade de confrontar resultados teóricos com dados experimentais.

5 ORIENTAÇÕES PARA APLICAÇÃO E REPLICAÇÃO

Este capítulo apresenta orientações pedagógicas destinadas a professores que desejem aplicar ou adaptar a sequência didática proposta em diferentes contextos escolares. Considerando que o produto educacional deve ser replicável, sustentável e ajustável às realidades diversas do Ensino Médio brasileiro, são discutidos aspectos relacionados à organização, mediação docente, adaptação curricular e possibilidades de ampliação.

A proposta fundamenta-se na Modelagem Matemática como eixo metodológico e na resolução de problemas inspirados em questões do ENEM, articulando experimentação concreta, análise conceitual e validação crítica dos resultados.

A aplicação desta sequência didática requer planejamento prévio, organização dos materiais e clareza quanto aos objetivos formativos. A proposta pode ser desenvolvida em diferentes realidades escolares, pois utiliza recursos de baixo custo e estrutura metodológica simples, baseada nas etapas da Modelagem Matemática: problematização, simplificação, construção do modelo, resolução e validação.

O professor exerce papel central como mediador do processo investigativo, estimulando a formulação de hipóteses, a análise crítica dos resultados e a argumentação matemática. A ênfase deve recair sobre a compreensão conceitual e a interpretação das relações entre grandezas, e não apenas sobre a obtenção de resultados numéricos. O erro, nesse contexto, é compreendido como parte constitutiva da aprendizagem.

A sequência pode ser adaptada conforme a carga horária disponível, o nível da turma e as condições estruturais da escola. É possível reduzir ou ampliar o número de oficinas, até mesmo com outras questões do ENEM, bem como contextualizar os problemas à realidade local, preservando a essência investigativa da proposta. A metodologia também admite integração com recursos tecnológicos e articulação interdisciplinar, ampliando seu alcance formativo.

Seu potencial de replicabilidade decorre da organização clara das etapas, da viabilidade material e do alinhamento às orientações da Base Nacional Comum Curricular e às competências avaliadas no ENEM.

Entretanto, a replicação deve considerar as especificidades de cada contexto, mantendo o caráter investigativo e reflexivo da Modelagem Matemática.

Assim, a proposta consolida-se como alternativa metodológica viável para o ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio, promovendo articulação entre teoria e prática, rigor conceitual e contextualização, e contribuindo para a formação matemática crítica e autônoma dos estudantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A elaboração deste caderno pedagógico teve como objetivo apresentar uma proposta de sequência didática para o ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio, fundamentada na perspectiva da modelagem matemática e estruturada a partir de situações-problema inspiradas em questões do ENEM. A proposta busca contribuir para a superação de práticas pedagógicas centradas exclusivamente na memorização de fórmulas e procedimentos, promovendo uma abordagem investigativa que valoriza a compreensão conceitual, a experimentação e a interpretação de fenômenos tridimensionais.

Ao longo do material, foram apresentadas atividades que articulam problematização, construção de modelos matemáticos, validação experimental e análise crítica dos resultados obtidos. Essa organização metodológica favorece o desenvolvimento de habilidades importantes para a formação matemática dos estudantes, tais como a interpretação de problemas contextualizados, a análise de relações entre grandezas, a utilização de representações geométricas e a argumentação lógica na resolução de situações-problema.

A utilização de oficinas experimentais, envolvendo a construção de protótipos e a comparação entre resultados teóricos e práticos, mostrou-se um recurso didático relevante para aproximar os conceitos matemáticos de situações concretas. Esse processo permite que os estudantes compreendam os sólidos geométricos não apenas como objetos abstratos, mas como modelos capazes de representar fenômenos presentes em diferentes contextos da realidade.

Outro aspecto relevante da proposta é a articulação entre modelagem matemática e as competências avaliadas em exames nacionais, especialmente no ENEM. Ao trabalhar com problemas contextualizados e estratégias investigativas, a sequência didática contribui para o desenvolvimento de competências relacionadas à resolução de problemas, interpretação de informações e análise de grandezas, aspectos frequentemente mobilizados nas avaliações externas.

Além disso, o produto educacional foi concebido com a preocupação de possibilitar sua replicação em diferentes contextos escolares. As orientações metodológicas apresentadas, bem como a descrição das atividades, materiais e procedimentos, buscam oferecer ao professor um suporte para a adaptação da proposta de acordo com as condições estruturais e pedagógicas de sua realidade de ensino.

Por fim, destaca-se que a proposta aqui apresentada não pretende esgotar as possibilidades de utilização da modelagem matemática no ensino de Geometria Espacial. Ao contrário, espera-se que este material possa servir como ponto de partida para novas experiências pedagógicas, incentivando professores a explorar abordagens investigativas e contextualizadas no ensino da matemática. Dessa forma, o caderno pedagógico contribui para o fortalecimento de práticas educativas que valorizem a compreensão conceitual, o pensamento crítico e a construção significativa do conhecimento matemático.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Modelagem matemática na educação matemática. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. Modelagem matemática no ensino. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: Diário Oficial da União, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Brasília, DF: INEP, 2012. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/enem/matriz-de-referencia>.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2016: prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2016. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2020: prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2022: prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2022. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2024: prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: INEP, 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/inep>.

BURAK, Dionísio. Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Campinas: UNICAMP, 1992.
BURAK, Dionísio. Modelagem matemática e ensino. In: BRANDT, Célia Finck; BURAK, Dionísio;

D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação matemática: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2009.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? Educação Matemática em Revista, São Paulo: SBEM, v. 3, n. 4, p. 3–13, 1995.

REGES, ADRIANO MARCOS MAIA; ALEKSANDRE SARAIVA DANTAS; ANTONIO RONALDO GOMES GARCIA; WALTER MARTINS RODRIGUES. O ENSINO DA GEOMETRIA COM ENFOQUE NA ETNOMODELAGEM . Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar, [S. l.], v. 3, n. 7, 2020. Disponível em: <https://periodicos.apps.uern.br/index.php/RECEI/article/view/929>. Acesso em: 6 abr. 2026.

RIVAS ORTIZ, Iram Barbaro; MARRERO IGLESIAS, Susana; SOUZA OLIVEIRA, Francisco Bruno; AMBRÓSIO, Paulo Eduardo; SANCHEZ DOMINGUEZ, Dany. Técnicas de Matriz Resposta com Aproximações de Baixa Ordem Aplicadas a Problemas de Transporte de Fótons. VETOR - Revista de Ciências Exatas e Engenharias, [S. l.], v. 33, n. 2, p. 24–31, 2023. DOI: 10.14295/vetor.v33i2.16440. Disponível em: <https://periodicos.furg.br/vetor/article/view/16440>. Acesso em: 6 abr. 2026.

APÊNDICES

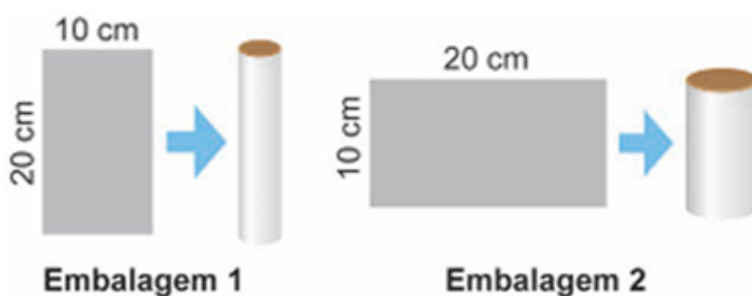
PRÉ-TESTE DIAGNÓSTICO

Nome: _____ Idade: _____

Série: _____ Turma: _____

EXERCÍCIO 1: Questão ENEM 2024.

Uma indústria faz uma parceria com uma distribuidora de sucos para lançar no mercado dois tipos de embalagens. Para a fabricação dessas embalagens, a indústria dispõe de folhas de alumínio retangulares, de dimensões 10 cm por 20 cm. Cada uma dessas folhas é utilizada para formar a superfície lateral da embalagem, em formato de cilindro circular reto, que posteriormente recebe fundo e tampa circulares. A figura ilustra, dependendo de qual das duas extensões será utilizada como altura, as duas opções para formar a possível embalagem.

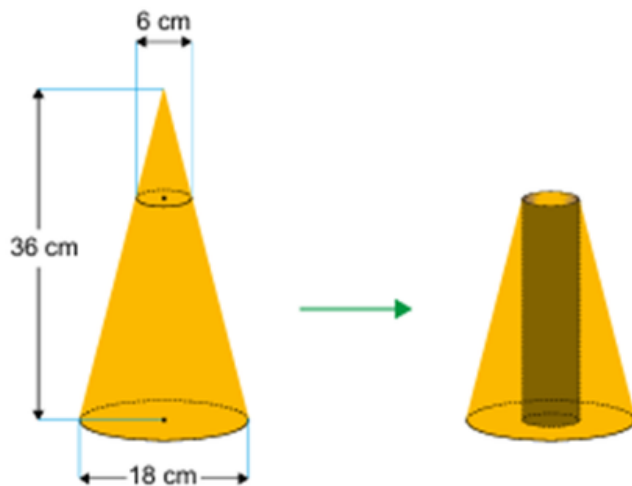


Dentre essas duas embalagens, a de maior capacidade apresentará volume, em centímetro cúbico, igual a

- A) $4\,000\pi$
- B) $2\,000\pi$
- C) $4000/\pi$
- D) $1000/\pi$
- E) $500/\pi$

EXERCÍCIO 2: Questão ENEM 2023.

Um artista plástico esculpe uma escultura a partir de um bloco de madeira de lei, em etapas. Inicialmente, esculpe um cone reto com 36 cm de altura e diâmetro da base medindo 18 cm. Em seguida, remove desse cone um cone menor, cujo diâmetro da base mede 6 cm, obtendo, assim, um tronco de cone, conforme ilustrado na figura.

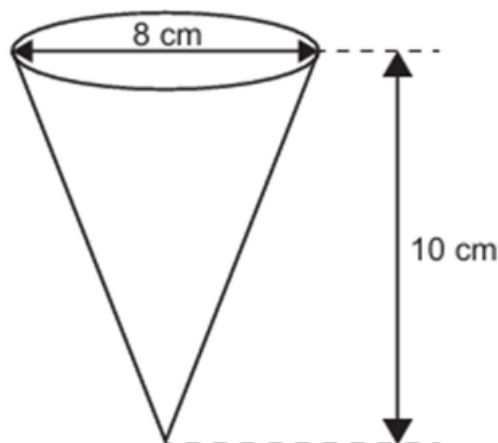


Em seguida, perfura esse tronco de cone, removendo um cilindro reto, de diâmetro 6 cm, cujo eixo de simetria é o mesmo do cone original. Dessa forma, ao final, a escultura tem a forma de um tronco de cone com uma perfuração cilíndrica de base a base. O tipo de madeira utilizada para produzir essa escultura tem massa igual a 0,6 g por centímetro cúbico de volume. Utilize 3 como aproximação para π . Qual é a massa, em grama, dessa escultura?

- A) 1 198,8
- B) 1 296,0
- C) 1 360,8
- D) 4 665,6
- E) 4 860,0

EXERCÍCIO 3: Questão ENEM 2022.

Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.

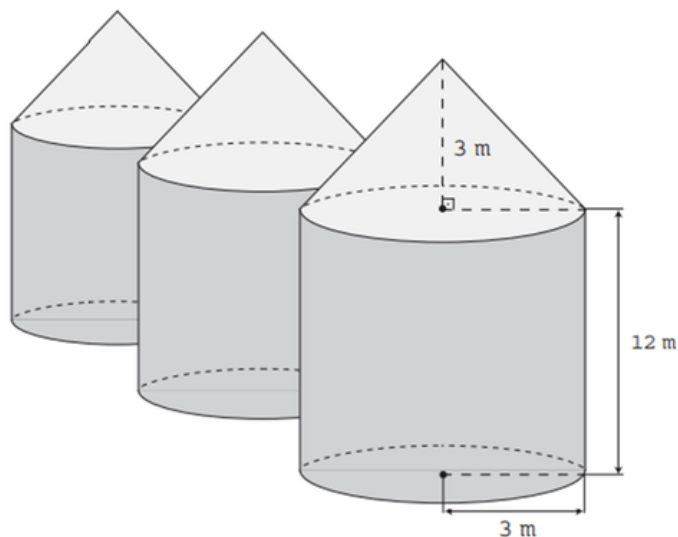


Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm. Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

- A) 1,52.
- B) 3,24.
- C) 3,60.
- D) 6,48.
- E) 7,20.

EXERCÍCIO 4: Questão ENEM 2016.

Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



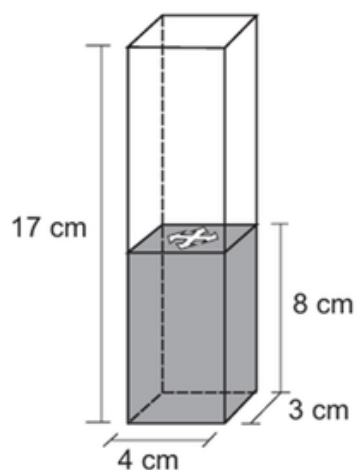
Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

- A) 6
- B) 16
- C) 17
- D) 18
- E) 21

EXERCÍCIO 5: Questão ENEM 2020.

Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água. Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a 6 cm^3 cada, que ficarão totalmente submersas.



O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de

- A) 14.
- B) 16.
- C) 18.
- D) 30.
- E) 34.

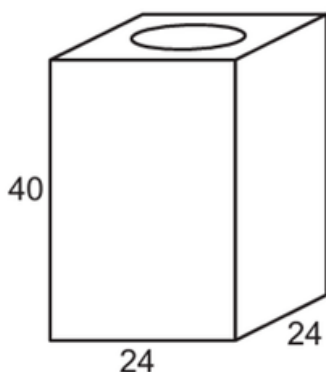
PÓS-TESTE DE AVALIAÇÃO

Nome: _____ Idade: _____

Série: _____ Turma: _____

EXERCÍCIO 1: (ENEM 2014).

Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.

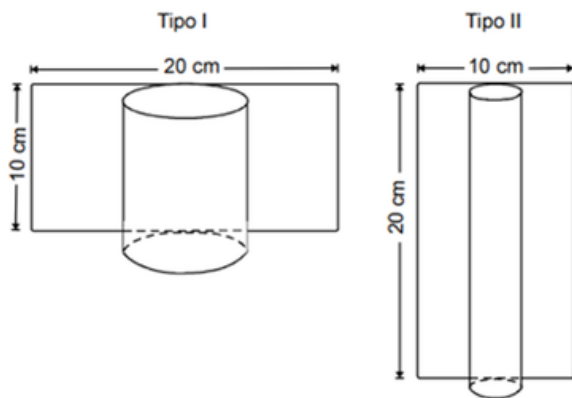


Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual. Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

- A) 14,4%
- B) 20,0%
- C) 32,0%
- D) 36,0%
- E) 64,0%

EXERCÍCIO 2: (ENEM - 2006).

Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm x 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

- A) o triplo.
- B) o dobro.
- C) igual.
- D) a metade.
- E) a terça parte.

EXERCÍCIO 3: (ENEM PPL - 2019).

Para decorar sua casa, uma pessoa comprou um vaso de vidro em forma de um paralelepípedo retangular, cujas medidas internas são: 40 cm de comprimento, 35 cm de largura e 60 cm de altura. Em seguida, foi até uma floricultura e escolheu uma planta aquática para colocar nesse vaso. Segundo uma proposta do gerente do local, essa pessoa avaliou a possibilidade de enfeitar o vaso colocando uma certa quantidade de pedrinhas artificiais brancas, de volume igual a 100 cm^3 cada uma delas, que ficarão totalmente imersas na água que será colocada no vaso. O gerente alertou que seria adequado, em função da planta escolhida, que metade do volume do vaso fosse preenchido com água e que, após as pedrinhas colocadas, a altura da água deveria ficar a 10 cm do topo do vaso, dando um razoável espaço para o crescimento da planta. A pessoa aceitou as sugestões apresentadas, adquirindo, além da planta, uma quantidade mínima de pedrinhas, satisfazendo as indicações do gerente. Nas condições apresentadas, a quantidade de pedrinhas compradas foi:

- A) 140.
- B) 280.
- C) 350.
- D) 420.
- E) 700.

EXERCÍCIO 4: (ENEM - 2015).

Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π .

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

- A) 0,5
- B) 1,0
- C) 2,0
- D) 3,5
- E) 8,0

EXERCÍCIO 5: (ENEM 2014 - REAPLICAÇÃO).

Para fazer um pião, brinquedo muito apreciado pelas crianças, um artesão utilizará o torno mecânico para trabalhar num pedaço de madeira em formato de cilindro reto, cujas medidas do diâmetro e da altura estão ilustradas na Figura 1. A parte de cima desse pião será uma semiesfera, e a parte de baixo, um cone com altura 4 cm, conforme Figura 2. O vértice do cone deverá coincidir com o centro da base do cilindro.

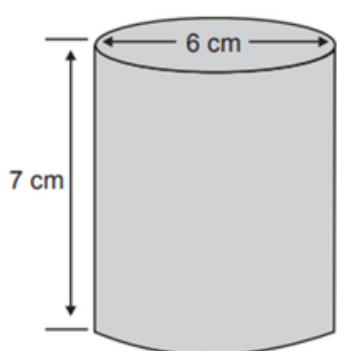


Figura 1

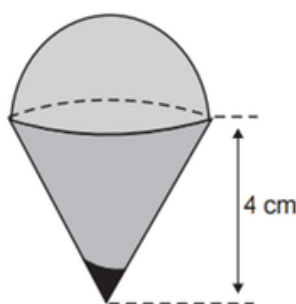


Figura 2

O artesão deseja fazer um pião com a maior altura que esse pedaço de madeira possa proporcionar e de modo a minimizar a quantidade de madeira a ser descartada.

Dados:

O volume de uma esfera de raio r é ;

O volume do cilindro de altura h e área da base S é $S \cdot h$;

O volume do cone de altura h e área da base S é $\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$;

Por simplicidade, aproxime π para 3.

A quantidade de madeira descartada, em centímetros cúbicos, é

A) 45.

B) 48.

C) 72.

D) 90.

E) 99.

AGRADECIMENTOS

A realização deste caderno pedagógico está vinculada ao desenvolvimento da pesquisa realizada no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, cuja proposta visa contribuir para o aprimoramento do ensino de Matemática na Educação Básica.

Inicialmente, agradeço a Deus pela força, perseverança e sabedoria ao longo desta trajetória acadêmica.

Aos meus familiares, pelo apoio constante, compreensão e incentivo durante todas as etapas deste processo formativo.

Aos professores do programa, pela contribuição acadêmica, pelas discussões enriquecedoras e pelo compromisso com a formação docente.

Ao orientador desta pesquisa, pela orientação, sugestões e acompanhamento ao longo do desenvolvimento do trabalho, fundamentais para a construção deste produto educacional.

Aos estudantes participantes da pesquisa, cuja colaboração tornou possível a aplicação e análise da sequência didática proposta.

Por fim, agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí pelo apoio institucional e pela oportunidade de desenvolvimento acadêmico e profissional.

