



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS URUÇUÍ
CURSO LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

WILTON MENDES DE MORAES

O USO DE DADOS PARA EXPLORAR O CONTEÚDO DE PROBABILIDADE NO
ENSINO MÉDIO

URUÇUÍ-PI
2022

WILTON MENDES DE MORAES

O USO DE DADOS PARA EXPLORAR O CONTEÚDO DE PROBABILIDADE NO
ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso (artigo científico) apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Uruçuí.

Orientadora: Prof. Me. Gabriel dos Santos Pinto

O USO DE DADOS PARA EXPLORAR O CONTEÚDO DE PROBABILIDADE

Wilton Mendes de Moraes¹

Orientador: Prof. Me Gabriel dos Santos Pinto²

RESUMO

Enxergando o uso de problemas envolvendo dados como uma excelente metodologia de ensino da probabilidade, este trabalho apresenta uma análise do uso de problemas envolvendo dados em livros didáticos, ao abordarem conceitos de probabilidade. Tal pesquisa justifica-se também pela grande influência da probabilidade em nosso meio social e os desafios enfrentados no ensino dessa temática. A amostra foi um conjunto de nove livros didáticos referentes ao novo ensino médio. É uma pesquisa de natureza bibliográfica, e foi dividida em três momentos, quais sejam: amostra, instrumentos e tratamento de dados. Através dessas etapas foi analisado e selecionado os conceitos de probabilidade que não foram trabalhados com dados. Verificou-se que muitas dessas publicações, quando aborda conceitos mais delicados fazem pouco uso dessa ferramenta, dessa forma foi criado um banco de questões explorando apenas problemas com dados para englobar todos os conceitos de probabilidade, servindo assim de alternativa para quem desejar trabalhar esses conceitos com problemas envolvendo dados.

Palavras-chave: Ensino; Probabilidade; Problemas com dados.

ABSTRACT

Seeing the use of problems involving data as an excellent methodology for teaching probability, this work presents an analysis of the use of problems involving data in textbooks, when approaching concepts of probability. Such research is also justified by the great influence of probability in our social environment and the challenges faced in teaching this subject. The sample was a set of nine textbooks referring to the new high school. It is a bibliographic research, and it divided itself into three moments, namely: sample, instruments and data processing. Through these steps, probability concepts that did not develop with data, they were analyzed and selected. It found itself that many of these publications, when addressing more delicate concepts, make little use of this tool, so a question bank was created exploring only problems with data to encompass all concepts of probability, thus serving as an alternative for those who wish to work on these concepts, with problems involving data.

Keywords: Teaching; Probability; Problems with data.

Data de aprovação do TCC: 23/08/2022

Data de apresentação do TCC: 13/07/2022

¹ Graduando do Curso Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Piauí– IFPI (Campus Uruçuí), wiltonmendes1997@gmail.com.

² Mestre no Ensino de Matemática pelo PROFMAT e professor do Instituto Federal- IFPI (Campus Uruçuí). Email: gabriel.pinto@ifpi.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A probabilidade é um ramo da matemática que estuda os fenômenos determinísticos e aleatórios, e assim apresenta as chances de algo acontecer. Outras áreas da ciência apropriam-se dessa ferramenta matemática para explicar seus conceitos e teorias. Esses fenômenos estão intrinsicamente ligados ao nosso cotidiano e às vezes nem percebemos. Usamos probabilidade intuitivamente em diversas situações, por exemplo, quando desejamos ligar para uma pessoa, talvez escolhamos um horário que tem mais chances de ela atender, também, quando desejamos ir à praia, mas antes olhamos para previsão do tempo e vemos a probabilidade de chuva ou sol. De forma mais complexa, o mercado financeiro, a economia e a política de um modo geral fazem uso da probabilidade para tomarem decisões importantes.

Em vista da sua influência social citada acima, a probabilidade merece uma atenção especial, e tem recebido. A BNCC vem propondo habilidades específicas para ela, que se alcançadas teremos uma sociedade mais atuante em suas escolhas e muito mais preparada para estudos mais complexos dentro das ciências. Todavia, é do conhecimento comum que o ensino de probabilidade é desafiador no âmbito do ensino médio, isso se dá em especial por conta dos vários conceitos abstratos e entrelaçados. Esse trabalho foi desenvolvido considerando quatro motivos. Primeiro, pela importância social da probabilidade vista no parágrafo anterior. Segundo, pelas dificuldades no ensino e aprendizagem dessa matéria. Terceiro, o fato de haver muitos estudos convincentes sugerindo metodologias com o uso de material concreto, e ou, com uso de problemas. E Quarto, por notar-se que, o uso de problemas com dados, reúne perfeitamente as duas características citadas anteriormente, material concreto e problemas. Dessa forma esse trabalho tem por objetivo apresentar uma pesquisa realizada com livros didáticos, a fim de identificar se as publicações estão utilizando problemas com dados para explicar conceitos de probabilidade e que conceitos estão sendo trabalhados dessa forma.

Após a identificação e enumeração dos conceitos probabilísticos presentes no material selecionado para a pesquisa, foi visto que algumas publicações utilizam muito pouco problemas com lançamento de dados para explorar seus conceitos, visto isso, será criado um banco de questões utilizando apenas problemas com lançamentos de dados. O banco de questões será dividido em blocos contendo um determinado número de conceitos, acreditamos que essa divisão nos permite uma melhor associação dos problemas com os diferentes conceitos, e também, facilita o encontro de questões direcionados para cada conceito do tema probabilidade. As questões/problemas a que nos referimos, algumas foram construídas por nós, outras foram retiradas dos livros didáticos selecionados e de vestibulares.

A fim de apresentar os resultados de forma lógica, faz-se primeiro, nesse trabalho, um breve comentário teórico sobre a importância social da probabilidade, e os desafios encontrados no ensino dessa matéria, bem como uma recordação dos conceitos de probabilidade trabalhados no ensino médio. Após essa abordagem teórica faz-se uma apresentação dos passos tomados para a realização dessa pesquisa bibliográfica. Em seguida faz-se uma leitura das informações encontradas e tabeladas, bem como uma discussão deles. Por fim é feita uma consideração final onde pode-se observar que os livros fazem pouco uso dessa metodologia em conceitos mais complexos de probabilidade, porém é deixada por porte do autor um conjunto de problemas envolvendo dados.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1. A importância social da probabilidade

De forma simples e superficial podemos dizer que a probabilidade é um ramo da matemática que calcula as chances de algo acontecer ou deixar de acontecer. Quando calculamos a chance de algo ocorrer, dizemos que estamos calculando a probabilidade desse acontecimento. Falando de forma mais rigorosa, a teoria probabilística é o ramo da matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos aleatórios.

No nosso dia a dia, intuitivamente, desprovidos de conceitos matemáticos, avaliamos a possibilidade o tempo inteiro, quando tomamos uma decisão achamos que a chance de sermos bem-sucedidos é alta. Por exemplo, quando escolhemos um horário para ir ao banco com a ideia não enfrentar fila, estamos usando probabilidade, quando escolhemos um trajeto com a intenção de não enfrentar engarrafamento também estamos usando probabilidade. Outras decisões importantes são tomadas em função da probabilidade da ocorrência de fenômenos naturais, como chuva, tempo nublado e a temperatura da cidade. Formalmente falando em probabilidade, hoje por conta da complexidade da economia, o cálculo de probabilidade é muito importante para a tomada de decisão de movimentos comerciais e econômicos. Um exemplo disso é que atualmente o preço do petróleo já sofre alteração apenas quando há uma probabilidade considerável de acontecer um conflito no oriente médio. Existe também o chamado **cálculo de risco**, que usando probabilidade, mede o grau de incerteza na obtenção do retorno em um determinado investimento. Com essas considerações em mente, sem exageros, podemos dizer que a probabilidade está presente em praticamente todos os ramos do conhecimento. Segundo Nascimento (2017, p. 11) “outras ciências como Estatística, Economia, Engenharia, Física, Química, Teoria dos Jogos, Sociologia, Psicologia e Biologia, têm usado cálculos probabilísticos para explicar seus conceitos dessa forma, fica consolidada sua relevância e abrangência”.

Pensando na grande influência da probabilidade nas decisões do cidadão comum, do mercado financeiro e econômico, e da ciência em geral, percebemos que o tratamento adequado desse assunto deve ser uma preocupação especial da educação escolar. Nesse trabalho, nas páginas seguintes, apresenta-se o que se requer dessa etapa da educação e o que se pode propor.

2.2. Probabilidade e educação básica do ensino médio

Sabemos que o conhecimento matemático acerca da probabilidade vai de assuntos básicos a conceitos e cálculos bem complexos então, atualmente, o grau de competências e habilidades que os indivíduos devem desenvolver no processo educacional são cada vez maiores, em função da constante transformação do mundo. Dessa forma quais as aprendizagens essenciais que o ensino médio deve garantir?

Para o ensino médio, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), propõe habilidades bem específicas que o educando deve desenvolver nessa etapa da educação, vejamos algumas:

Quadro 1 Habilidades

HABILIDADES
(EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades. (p. 537)

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. (p. 537)
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades. (p. 541)
(EM13CNT205) Utilizar noções de probabilidade e incerteza para interpretar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, reconhecendo os limites explicativos das ciências. (p. 557)

Fonte: Brasil (2018)

Percebemos que as habilidades são voltadas de modo bem direto e específico para compreensão e resolução de problemas relacionados aos conceitos. Essas propostas são de fato agradáveis, desejáveis e necessárias para qualquer educando que deseja se beneficiar com esse conhecimento, tanto para compreensão do mundo a sua volta como para uma provável atuação em estudos mais avançados. Porém a probabilidade é uma das áreas da matemática que, de modo geral, apresenta mais dificuldades no processo de ensino e aprendizagem. Costuma-se apresentar dificuldade tanto na compreensão dos conceitos bem como na aplicação dos mesmo.

O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado, a comprovação de que se trata de uma área de conhecimento relevante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com frequência em relação à sua aprendizagem (BRASIL, 1997). Na tentativa de amenizar esse problema, muitos educadores e pesquisadores têm buscado métodos estratégicos para melhorar o ensino. Nessa busca duas metodologias têm se apresentado como eficazes, nos diversos trabalhos encontrados a respeito desse assunto, são elas: o uso de material concreto e uso de problemas no ensino. Segundo (TURRIONI, 2004, p. 66) “o material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos”.

Uma das dificuldades percebidas no processo de ensino é a abstração dos conceitos, mas “*Manipular os materiais concretos permite aos alunos criar imagens mentais de conceitos abstratos.*” (RIBEIRO, 2011, p.9). Essas imagens mentais de conceitos abstratos certamente contribuem de forma muito significativa para a simplificação dos conceitos.

É muito comum uma publicação ou um professor em aula, ao iniciar a explicação de um determinado conceito, iniciar com um problema para atizar a curiosidade e ou para explorar os conceitos a respeito do tema de estudo.

Portanto o que percebemos da literatura existente é que tanto o uso de material concreto e o uso de problemas bem escolhidos são duas ferramentas que se apresentam funcionais. A primeira com o foco na simplificação da abstração e a segunda na para estimular o interesse e melhor apresentar os conceitos.

2.4. Conceitos de Probabilidade

O estudo e compreensão dos conceitos é fundamental no entendimento de uma determinada matéria, para que se avance no conteúdo e faça correlações a outros eixos temáticos. Como vimos no início do tópico anterior as próprias habilidades que a BNCC atribui para o ensino de probabilidade se volta para o entendimento e aplicação dos variados conceitos dessa área. Dessa forma, entende-se que o foco inicial no ensino de probabilidade é usar uma metodologia que facilite a compreensão dos conceitos, priorizando a exploração do mesmo, com objetos do cotidiano, cujo objetivo está diametralmente oposto àquele que, por vezes, é empregado na cultura do ensino brasileiro de “decorar” os conceitos, onde não se sabe a

procedência, e nem a formação dos mesmos. Uma das finalidades do ensino da Matemática no contexto escolar é conduzir os alunos a aprenderem conceitos matemáticos (BRASIL, 1988; 2018).

Nesse sentido, a importância dos conceitos fica explícita, quando nos deparamos com algum problema simples, que não precisa fazer uso de contas, fórmulas e ainda assim não conseguimos responder, simplesmente por não compreendermos bem os conceitos envolvidos. Dessa forma, fica evidente a necessidade de compreendermos os conceitos, para podermos criar e resolver problemas.

Desse modo, tendo em vista a relevância do estudo da teoria probabilística, podemos destacar os conceitos de probabilidade que são abordados no ensino médio de acordo com os livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD-2021). Apresentamos esses conceitos, e exploramos com alguns exemplos encontrados no material didático para pesquisado para a realização dessa pesquisa. Onde é possível observar, a utilização de problemas constituídos com materiais concretos.

Conceito 01 - Experimento Aleatório: É Todo experimento (ou fenômeno) cujo resultado depende somente do acaso, ou seja, cujo resultado é imprevisível mesmo quando repetido várias vezes, sob as mesmas condições.

- **Exemplo 01:** No lançamento de uma moeda qual será a face voltada para cima?

Conceito 02 - Espaço amostral: É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, representado, em geral, pela letra grega Ω (lê-se ômega).

- **Exemplo 02:** No lançamento de uma moeda, temos como espaço amostral “cara” e “coroa”. Logo, $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$ e $n(\Omega) =$

Conceito 3 - Evento: chamamos de evento ou acontecimento, e geralmente indicamos por uma letra maiúscula, cada subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

Tipos de eventos:

Em relação ao espaço amostral do sorteio ao acaso de um dia da semana, destacamos os seguintes eventos:

Impossível: Quando o evento é um conjunto vazio

- **Exemplo 03:** Em um sorteio, ocorrer um dia cuja letra inicial seja uma vogal.

Certo: Quando o evento é o próprio espaço amostral

- **Exemplo 04:** Em um sorteio ocorrer um dia cuja letra inicial seja uma consoante.

Simples ou Elementar: Quando o evento é um conjunto unitário

- **Exemplo 05:** Em um sorteio, ocorrer um dia cuja letra inicial seja d.

Complementares: Quando dois eventos A e B tal que $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$ conjunto vazio.

- **Exemplo 06:** considerando o lançamento de um dado, seja:
E: O resultado no dado branco seja um número ímpar

F: O resultado no dado branco seja um número par.

Assim, temos:

$E = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (5,6)\}$ e

$F = \{(2,1); (2,2); (2,3); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6); (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6)\}$

Nesse caso, os conjuntos E e F são tais que $E \cup F = \mathbf{U}$ e $E \cap F = \emptyset$, ou seja, E e F são eventos complementares.

Mutuamente exclusivos

- **Exemplo 07:**

G: A soma dos resultados dos dois dados é igual a 5.

H: A soma dos resultados dos dois dados é menor ou igual a 3.

Assim temos:

$G = \{(1,4); (2,3); (3,2); (4,1)\}$ e

$H = \{(1,1); (1,2); (2,1)\}$

Observe que: $G \cap H = \emptyset$

Conceito 4 - Probabilidade de um evento ocorrer: Seja um evento A de um espaço amostral (Ω) finito. A probabilidade $P(A)$ de o evento A ocorrer é a razão entre o número de elementos de A, indicado por $n(A)$, pelo número de elementos de (Ω), indicado por $n(\Omega)$, isto é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{números de casos favoráveis}}{\text{números de casos possíveis}}$$

- **Exemplo 08:** Ao lançar um dado, qual a probabilidade da face superior sair 3 pontos?

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ ou } 16,6 \%$$

OBS: Esta é a definição clássica de probabilidade utilizada em situações em que o espaço amostral é um conjunto e os resultados são equiprováveis (têm a mesma chance de ocorrer).

Conceito 05 - Probabilidade de um evento não ocorrer: A probabilidade de um evento A não ocorrer, indicado por $P(\underline{A})$, é igual a 1 menos a probabilidade de ele ocorrer, isto é, $P(\underline{A}) = 1 - P(A)$.

- **Exemplo 09:** Considere um conjunto de dez frutas, em que três estão estragadas. Escolhendo aleatoriamente duas frutas desse conjunto, determine a probabilidade de ambas não estarem estragadas.

Conceito 06 - Probabilidade da união de dois eventos: A probabilidade da união de dois eventos A e B é igual à soma das probabilidades de A e de B menos a probabilidade da interseção de A com B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- **Exemplo 10:** Retirando uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de ocorrer um rei ou valete?

Conceito 07 - Probabilidade condicional: Dados os eventos A e B não vazios no mesmo espaço amostral (Ω) finito, a probabilidade da ocorrência de A, tendo B já ocorrido, é a probabilidade condicional de A em relação a B, indicada por $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- **Exemplo 11:** Considere um lançamento de um dado. Se sabemos que o número da face superior é par, qual é a probabilidade de esse número ser 4?

Conceito 08 - Eventos simultâneos ou independentes: Dois eventos A e B, são ditos independentes quando a ocorrência de um não influi na ocorrência do outro, ou usando probabilidade, quando:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exemplo 12: Considere uma caixa contendo quatro bolas pretas e seis bolas azuis. Escolhendo duas bolas com reposição, qual é a probabilidade de:

- a) A primeira bola ser preta e a segunda, azul?
- b) As duas bolas serem pretas?

Conceito 09 - Espaço amostral não equiprovável: Todos os eventos elementares do espaço amostral não apresentam a mesma probabilidade de ocorrência. Mesmo assim, a soma das probabilidades é igual a 1.

Conceito 10 - Lei binomial das probabilidades: A probabilidade de um evento A ocorrer p vezes em n tentativas independentes, em que cada tentativa é $P(A)$, é dada por:

$$(n P) \cdot [P(A)]^p \cdot [P(A)]^{n-p}$$

Exemplo 13: No planejamento familiar, um casal decide ter 5 filhos. Qual a probabilidade de nascerem 3 meninas e 2 meninos?

Analisando os conceitos, percebe-se que o eixo temático probabilidade é bastante flexível, podendo ser trabalhado com diversos materiais concretos. Dentre os materiais utilizados, e com o intuito de englobar todos os conceitos com apenas um objeto concreto para formulação de problemas, consideramos o uso de dados uma alternativa, visto que é de fácil acesso e há uma variedade de formas que podemos utilizar como recurso didático. Nesse sentido, procuramos criar um banco de problemas tendo como base apenas dados, utilizando algumas das variedades mais frequentes no meio educacional.

3. METODOLOGIA

Esta pesquisa é de natureza bibliográfica, em que foram analisados nove livros do novo ensino médio aprovados pelo PNLD - 2021, para explorar os distintos conceitos de probabilidade com a utilização de problemas envolvendo dados. Para Andrade (2010) a pesquisa bibliográfica é habilidade fundamental para os cursos de graduação, pois é a base construção de todas as atividades acadêmicas. Amaral (2007) ratifica que, é uma etapa fundamental em todo trabalho científico, pois dela é retirado todo o embasamento teórico que sustentará o trabalho.

Para Lakatos e Marconi (2003) a pesquisa bibliográfica não se caracteriza como uma mera repetição mecânica dos dados escritos sobre determinado assunto, mas possibilita a avaliação de um tema sob um novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras. Dessa forma, a pesquisa bibliográfica se torna imprescindível como parte fundamental para análise e resolução de um problema, como afirma Boccato (2006) por meio de referenciais teóricos publicados busca se a resolução de um problema (hipótese) analisando e discutindo os dados existentes.

Os livros didáticos utilizam-se de diversas metodologias de ensino para explorarem os conteúdos de probabilidade, uma delas é o uso de materiais concretos. Dentre os objetos utilizados destacam-se: dados, moedas, baralho, entre outros. A análise foi feita com o objetivo de apontar quais conceitos são trabalhados, e quais não são com o uso de dados. Diante do contexto, este estudo foi dividido em 3 momentos, quais sejam:

- Primeiro momento – **AMOSTRA**

Nessa etapa, foi selecionado um conjunto de livros do novo ensino médio na área da matemática avaliados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD-2021) e analisados quais conceitos de probabilidade eram explicados em cada livro com base em problemas com dados. Em seguida, os dados foram distribuídos em um quadro, para termos uma visão panorâmica sobre a quantidade de livros que usaram problemas aliado com o uso de materiais concretos, no ensino de conceitos de probabilidade. Para a obtenção dos dados, o quadro foi dividido em quatro partes, são elas: conceitos, usaram, não usaram e não apresentaram os conceitos.

- Segundo momento – **INSTRUMENTOS**

Nessa etapa, foi feita uma descrição do quadro relatado anteriormente, e analisada a quantidade de publicações do material didático selecionado que usaram de fato, problemas relacionados com a utilização de dados para explorar os variados conceitos do eixo temático tratado. Cabe ressaltar, que esta avaliação não tem como objetivo desqualificar ou atribuir um menor valor pedagógico a outros problemas ou materiais concretos que porventura sejam usados para explicação dos conceitos abordados no material didático, mas sim, mostrar que é possível associar problemas com lançamento de dados aos distintos conceitos de probabilidade.

- Terceiro momento – **TRATAMENTO DOS DADOS**

Etapa final, onde após análises dos estudos teóricos, tendo em vista a pouca utilização de dados para explorar os conceitos de probabilidade, foi possível criar problemas direcionados para cada tópico do conteúdo de probabilidade, todos baseados na utilização de dados. Dessa forma, foi criado um material agregado e sistematizado em relação ao ponto: conceitos versus problema com lançamento de dados. Para melhor compreendermos os conceitos trabalhados na pesquisa, dividimos em quatro blocos, de acordo com a sequência didática do conteúdo, mantendo juntos àqueles conceitos que possuem uma estreita relação entre si. As questões que

foram apresentadas, algumas foram criadas, outras retiradas dos livros trabalhados e sites de vestibulares, todas direcionadas para cada bloco de questões previamente estabelecidas.

Essa divisão em momentos da pesquisa é importante para termos uma visão temporal sobre as etapas do trabalho, o que nos permite fazer uma análise detalhada sobre o conjunto de livros selecionado. Cabe ressaltar que o critério observado para a escolha desse material, foi o desenho do novo ensino médio e o novo modelo de abordagem dos conteúdos. Consideramos que faz sentido, fazer uma análise desse novo modelo de material didático, para entendermos como estão sendo abordados os conteúdos de probabilidade no novo ensino médio, e a partir daí, produzir um material sistemático e organizado como forma complementar para quem desejar uma outra opção de abordagem de conceitos, opção essa com a utilização de problemas envolvendo dados, o um objeto simples e comum. Os livros selecionados estão no quadro abaixo.

Tabela 1: Apresentação dos livros didáticos

Livros	Autores
Matemática Interligada: estatística, análise combinatória e probabilidade. 1.ed. São Paulo: 2020	Andrade, Thaís Marcelle
Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade. 1. Ed. São Paulo: 2020	Bonjorno, Junior e Sousa
Multiversos Matemática: Estatística e Probabilidade. 1. ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.	Sousa, J. R.
Matemática em contextos: análise combinatória, probabilidade e computação. 1. Ed. São Paulo: 2020	Dante, Luiz Roberto
Matemática nos dias de hoje: probabilidade e Estatística: 1. ed. -- São Paulo: Editora SEI, 2020.	Jefferson Cevada ... [Et al.]
Diálogo matemática e suas tecnologias: estatística e probabilidade. Editora Moderna; -- 1. ed. -- São Paulo: Moderna, 2020.	Lilian Aparecida Teixeira
Quadrante matemática e suas tecnologias: estatística, probabilidade e matemática financeira / Eduardo. -- 1. ed. -- São Paulo: Edições SM, 2020.	Diego Prestes Chavante
Ser protagonista: matemática e suas tecnologias :estatística e probabilidade: ensino médio / Kátia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz. — 1. ed. —São Paulo: Edições SM, 2020.	Kátia Stocco Smole
Conexões: matemática e suas tecnologias: estatística e probabilidade. Editora Moderna. -- 1. ed. -- São Paulo: Moderna, 2020.	Fabio Martins de Leonardo

Fonte: Autores (2022)

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O quadro abaixo, nos proporciona uma visão panorâmica sobre os conceitos que são abordados por meio de problemas com dados. No decorrer da análise foi constatado que há uma discrepância entre os conteúdos abordados por cada coleção. De fato, essa diferença está de acordo com o PNLD, já que as instituições de ensino são dotadas de autonomia para decidirem quais coleções de livros irão utilizar no desenvolvimento de suas práticas pedagógicas. Veremos mais detalhes no quadro abaixo.

Quadro 2: Apresentação dos conceitos de probabilidade

PROBLEMAS X CONCEITOS	Quantidade dos livros que exploraram os conceitos com dados		
	Usou	Não usou	Não abordou o conceito
Experimento aleatório	7	2	
Espaço Amostral	7	2	
Evento	6	3	
Probabilidade de um evento ocorrer	4	5	
Probabilidade de um evento não ocorrer	3	6	
Probabilidade da união de dois eventos	3	6	
Probabilidade condicional	1	8	
Eventos simultâneos ou independentes	1	8	
Espaço amostral não equiprovável	1	4	4
Lei binomial das probabilidades	2	4	3

Fonte: Autores (2022)

4.2 Das publicações

Fazendo uma análise da disposição da quantidade de publicações que abordaram os conceitos utilizando dados, percebe-se que há uma certa frequência de utilização nos conceitos iniciais, porém grande parte das publicações não usaram esse material especialmente em conceitos mais delicados. Nota-se que, nos conceitos de probabilidade de um evento não ocorrer

e, da união de dois eventos, das 9 publicações apenas 3 fazem uso de problemas usando dados. E se tratando dos conceitos: probabilidade condicional, eventos simultâneos ou independentes e espaço amostral equiprovável, tem-se que dos 9 livros apenas 1 faz uso dessa metodologia. Ainda com relação ao conceito Lei binomial de Newton, apenas duas empregam o uso de problemas usando dados.

Como visto acima, embora os livros direcionados para o novo ensino médio, já vem adotando a metodologia do uso de dados para explorar alguns conceitos de probabilidade, acredita-se que, diante do seu excelente potencial, essa ferramenta de ensino poderia ser mais aproveitada quantitativamente, podendo ser relacionada a todos, ou quase todos os conceitos de probabilidade da grade curricular do ensino médio. Dessa forma o professor teria uma alternativa para ajudar seu aluno a compreender esses conceitos.

Considerando que os conceitos no quadro 2 vão avançando em dificuldade de compreensão (de cima para baixo), pode-se concluir então que as publicações vão cada vez menos usando dados para explicar esses conceitos mais complexos. Mas isso é lamentável pois é exatamente em conceitos mais complexos que o professor precisa de ferramentas que simplifique a abstração do conceito trabalhado. Diante desse problema apresentado, foi feito um banco de questões que usa exclusivamente dados para explorar os distintos conceitos de probabilidade, tendo em vista os benefícios desse objeto no meio educacional.

4.3 Dos problemas procurados

Após análise dos livros, notando a carência de problemas usando dados e, levando em conta que a beleza dessa metodologia fomenta sua utilização, buscou-se encontrar e/ou criar problemas, dessa natureza, direcionados para os diversos conceitos de probabilidade trabalhados no ensino médio. Dessa forma, criou-se um banco de problemas para englobar todos os conceitos de probabilidade, utilizando apenas o uso de dados. As questões encontradas foram agrupadas em blocos de conceitos, tendo em vista que com um mesmo problema pode-se trabalhar vários conceitos. Diante do exposto, o conteúdo de probabilidade foi dividido em quatro blocos de conceitos, onde:

1º bloco – Aborda os conceitos de espaço amostral e evento, estes, são os mais comumente explorados com dados nos livros do novo ensino médio, exceto algumas subdivisões do conceito de evento, como por exemplo, evento complementar. De forma geral, como esses conceitos estão relacionados, foi possível trabalhar em um só problema, diversos desses conceitos.

2º bloco – Trabalha problemas para explicar os conceitos de probabilidade, probabilidade de um evento não ocorrer e probabilidade da união de dois eventos. Esses conceitos não foram explorados com dados pela maioria dos livros selecionados.

3º bloco – Este bloco aborda os conceitos de probabilidade condicional e eventos independentes, sobre eles, foi visto que a grande maioria dos livros não utilizaram o material concreto dados, para explorar o seu conceito. Também, espaço amostral não equiprovável, este por sua vez, apenas uma publicação usou dados para explorar o seu conceito, as demais utilizaram-se de outros objetos didáticos, cabe ressaltar que quatro dessas publicações não abordam esses conceitos no decorrer do conteúdo.

4º bloco – Foi deixado para abordagem de apenas um conceito, a lei binomial da probabilidade. Esse conceito é o que mais deixa de ser abordado no ensino médio, somente duas publicações utilizaram dados para explorá-lo, outras três não abordaram e quatro não implementaram como tópicos de estudos para o ensino médio.

Por esses problemas com dados envolver um objeto do conhecimento da maioria, acredita-se que essa ferramenta pode contribuir significativamente para reduzir o grau de abstração dos

conceitos trabalhados facilitando o entendimento da probabilidade. Além de que a resolução de problemas instiga no aluno concentração e análise mais cuidadosa.

Banco de questões

Bloco I

Questão 01 – considere o experimento: lançamento de dois dados, um branco e outro verde, ambos com as faces numeradas de 1 a 6, e a observação das faces superiores. Determine:

- a) O espaço amostral.
- b) O evento: ocorrência de números iguais nos dois dados.
- c) O evento: ocorrência de números cuja soma seja 5.
- d) O número de elementos de cada item anterior.

Questão 02 – considere o lançamento de três dados, com as faces numeradas de 1 a 6. Determine o número de possibilidades dos seguintes eventos:

- a) Soma dos números das faces superiores dos três dados iguais a 3.
- b) Soma dos números das faces superiores dos três dados iguais a 10.

Questão 03 – Dois dados de 6 faces cada, um azul e outro amarelo, foram lançados simultaneamente. Determine:

- a) O espaço amostral dos resultados possíveis.
- b) O evento A, da ocorrência da mesma quantidade de pontos em ambos.
- c) O evento B, de a soma dos pontos ser igual a 6.
- d) O evento C, de a soma dos pontos ser maior do que 12.

Questão 04 – No lançamento de 2 dados com 6 faces cada, é observado o produto dos números de pontos sorteados. Determine o espaço amostral desse experimento.

Questão 05 – Dois dados distintos, cada um com 6 faces, são lançados simultaneamente. Determine:

- a) A soma dos pontos ser maior que 12.
- b) O evento B, em que a soma dos números de pontos ser maior ou igual a 10.
- c) O evento C, em que a soma dos pontos é menor do que 2.

Questão 06 - No lançamento de um dado não viciado, qual é a probabilidade de ocorrer:

- a) um número par?
- b) um número primo?
- c) o número 3?

Questão 07- Ao lançar um dado de 8 faces há uma altura de 5 metros do chão, determine a probabilidade de ocorrer:

- a) um número menor do que 3?
- b) um número menor do que 1?
- c) um número menor do que 7?

Questão 08 - No lançamento simultâneo de 2 dados não viciados e distinguíveis, um branco e outro vermelho, qual é a probabilidade de que:

- a) a soma seja 7?

- b) a soma seja par?
- c) a soma seja um número primo?

Questão 09- considere um lançamento de três dados simples, qual a probabilidade de se obter:

- a) a soma seja maior do que 1 e menor do que 8?
- b) ambos os números sejam pares?
- c) ambos os números sejam iguais?

Questão 10- seja dois dados, um branco e outro azul, qual a probabilidade do seguinte evento acontecer:

- a) o número no dado vermelho seja múltiplo do número no dado branco?

Bloco II

Questão 11 – No lançamento de um dado comum, determine a probabilidade de se obter:

- a) O número 2.
- b) Um número par.
- c) Um número múltiplo de 3.
- d) Um número maior que 6.

Questão 12 – No lançamento de um dado de 12 faces enumeradas de 1 a 12, qual a probabilidade de se obter:

- a) Um número primo.
- b) Um número divisível por 2.

Questão 13- Lançando-se um dado de 12 faces, qual a probabilidade de ocorrer:

- c) Um número menor que 7.
- d) Um número maior que 9.

Questão 14 – No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter uma quantidade de pontos que representa um número primo?

Questão 15 – Considere dois dados de 8 faces coloridas.

1º Com as faces vermelha e amarela.

2º Com as faces azul e branco.

Ao lançar os dois dados, qual a probabilidade de se obter uma face vermelha e outra branca?

Questão 16 – No lançamento de dois dados de 24 faces, um vermelho e outro azul, calcule a probabilidade de:

- a) A soma dos pontos não ser 15.
- b) Não obter a face com um ponto

Questão 17- Ainda, considerando o problema anterior, calcule:

- a) Não obter faces com quantidade de pontos iguais.
- b) Não obter a face como número 5 no dado vermelho e a face com o número 2 no dado vermelho.

Questão 18 – Considerando o lançamento de um dado honesto de 8 faces, determine a probabilidade de se obter um número de pontos ímpar ou um número de pontos maior do que 2.

Questão 19 – No lançamento de dois dados, um com 6 faces e outro com 8 faces, qual a probabilidade de se obter um número em que a soma seja maior que 9 e o número múltiplo de 2.

Questão 20 – Um experimento consiste em dois lançamentos de um dado. Calcule a probabilidade da soma dos números de pontos obtidos ser maior que 8 ou o produto ser ímpar.

Bloco III

Questão 21 – considere o lançamento de um dado de 12 faces, e seja A e B eventos do espaço amostral, tal que $P(A/B) = 0,6$ e $P(A \cap B) = 0,4$. Qual é o valor de $P(B)$?

Questão 22 - Ao lançar um dado comum e honesto duas vezes consecutivas, observa-se o número obtido em cada lançamento e verifica-se que a soma deles é maior do que 7. Qual é a probabilidade de que, em ao menos um dos lançamentos, se tenha obtido o número 4?

Questão 23 – Um dado honesto é lançado duas vezes consecutivas, seja os eventos:

A= Obter um número par no primeiro lançamento.

B= Obter um número ímpar no segundo lançamento.

Mostre que os eventos A e B são independentes.

Questão 24- Dois dados não viciados, de 6 faces numeradas de 1 a 6, são lançados. Qual é a probabilidade de ocorrer a soma 8, se ocorreu o 3 no primeiro dado?

Questão 25- Seja um dado de 12 faces, sendo 7 números pares e 5 números ímpares. Qual a probabilidade de sair um número múltiplo de 2 em um lançamento?

Questão 26 – Um dado de 8 faces é lançado 4 vezes, calcule a probabilidade de:

- a) Obter o número 2 nos quatro lançamentos.
- b) Obter um número múltiplo de 3.
- c) Obter um número, cuja soma seja maior que 12.

Questão 27 – (Fuvest-SP) Dois dados cúbicos, não viciados, com faces enumeradas de 1 a 6, serão lançados simultaneamente. A probabilidade de que sejam sorteados dois números consecutivos, cuja soma seja um número primo, é de:

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| a) $\frac{2}{9}$ | c) $\frac{4}{9}$ | e) $\frac{2}{3}$ |
| b) $\frac{1}{3}$ | d) $\frac{5}{9}$ | |

Questão 28– Um dado com as faces numeradas de 1 a 8, não viciado, é lançado duas vezes. Qual é a probabilidade de saírem números menores do que três nos dois lançamentos?

Questão 29 – Qual a probabilidade de se obter três vezes o número 1 no lançamento de 3 dados?

Questão 30 – Seja um dado colorido de 12 faces, com 4 faces brancas, 6 faces amarelas e 2 vermelhas. Qual a probabilidade de sair uma face branca voltada para cima, ao lançar o dado.

Bloco IV

Questão 31 – Um dado de 6 faces, não viciado, é lançado 5 vezes. Qual a probabilidade de ocorrer um número múltiplo de 2 e um número ímpar?

Questão 32 – Ao lançar 6 vezes um dado, qual a probabilidade de a face com 3 pontos ocorrer exatamente 4 vezes?

Questão 33 – Um dado é lançado 6 vezes consecutivos. Calcule a probabilidade:

- a) De a face com 5 pontos ocorrer exatamente 4 vezes.
- b) De a face com 6 pontos ocorrer exatamente 3 vezes.
- c) De uma face com número de pontos par ocorrer exatamente 5 vezes.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso de dados como ferramenta auxiliadora no processo de ensino de probabilidade, é uma alternativa viável para o desenvolvimento de atividades pedagógicas diferenciadas. Essa metodologia capta com mais facilidade a atenção dos alunos, envolvendo problemas que estimulam o raciocínio lógico e criação de estratégias para resolução, dessa forma pode contribuir significativamente no processo de absorção, entendimento e compreensão desse eixo temático.

Dentre os diversos conceitos presentes na teoria probabilística, que foram analisados nos materiais didáticos selecionados para esta pesquisa, observou-se que há uma discrepância entre a quantidade de conteúdos abordados no material analisado. Contudo, foi realizada uma análise para identificar quais conceitos de probabilidade foram trabalhados ou não, pelos livros destacados com a utilização de problemas envolvendo dados. Verificou-se que em todos os livros há conceitos que não utilizavam problemas com o lançamento de dados para sua exploração.

Dessa forma, construímos um banco de problemas utilizando dados para explorar todos os conceitos de probabilidade, visto que é um material simples e de fácil utilização. É importante mencionar que o ensino de probabilidade não se limita exclusivamente na utilização de dados, pois existem outros materiais didáticos que podem ser usados para explorar esse tema, não queremos aqui, atribuir um menor valor pedagógico a esses materiais, e sim, ter um material agregado e sistematizado baseado em problemas com dados para exploração de todos os conceitos da teoria probabilística do ensino médio, possibilitando assim, uma alternativa a quem desejar trabalhar com dados.

Em suma, foi possível explorar todos os conceitos de probabilidade que não eram trabalhados nos livros didáticos com a utilização de dados. Por meio de um acervo de problemas que foi construído selecionando questões dos próprios livros utilizados na pesquisa e de vestibulares. Houve também a criação de questões específicas para todos os temas, especialmente para probabilidade de espaço amostral não equiprovável e lei binomial de probabilidade, já que esses conceitos não foram abordados por algumas publicações e também se encontrou poucas questões para explorá-lo.

Portanto, com o intuito de reduzir a distância entre o abstrato da matemática e a aplicação prática, o banco de questões aqui criado, é uma alternativa para o estudo desses conceitos específicos utilizando-se de diversos tipos dados. Diante do contexto, outra área que poderia ser estudada com a utilização de materiais concretos, especificamente com dados, seria a análise combinatória.

REFERÊNCIAS

AMARAL, J. J. F. **Como fazer uma pesquisa bibliográfica**. Fortaleza, CE: Universidade Federal do Ceará, 2007. Disponível em: Acesso em: 13 jun. 2022.

ANDRADE, M. M. **Introdução à metodologia do trabalho científico**: elaboração de trabalhos na graduação. São Paulo, SP: Atlas, 2010.

BOCCATO, V. R. C. **Metodologia da pesquisa bibliográfica na área odontológica e o artigo científico como forma de comunicação**. Rev. Odontol. Univ. Cidade São Paulo, São Paulo, v. 18, n. 3, p. 265-274, 2006. Disponível em < A pesquisa bibliográfica Cadernos da Fucamp, v.20, n.43, p.64-83/2021 <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/rdbci/article/view/1896>> Acesso em: 13 de jun.2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **PCN + ensino médio**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, 2010.

_____. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**, Brasília: MEC/SEF,1997.

_____. Parâmetros Curriculares Nacionais. **Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2000.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC / SEF, 1998. 36-47.

CHARNAY, R. **Aprendendo (com) a resolução de problemas**. In: PARRA, C. (org.), 1996.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2ªed. São Paulo: Ática, 1998.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de Metodologia Científica**. São Paulo, SP: Atlas 2003.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino da matemática e materiais manipuláveis. In:_____. (org.). **O laboratório de ensino da matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

MARTINS, A. H. **A importância da Matemática**. Disponível em <www.jomar.pro.br/portal/modules/smartsection/item.php?itemid=183>. Acesso em 04 de maio de 2022.

MOURA, Tiago Emanuel Domingos de. **A BNCC para o Ensino Fundamental: Uma descrição do conteúdo probabilístico e articulações com os PCNs**. Anais IV CONEDU, 2017. Disponível em: <<http://editorarealize.com.br/revistas/conedu/anais.php>>. Acesso em 04

de maio de 2022.

NASCIMENTO, Júlio Cesar Pires do. **Um Estudo Sobre a Valorização e as Dificuldades do Ensino de Probabilidade na Educação Básica.** 2017. 73 f.: il.

OLIVEIRA, J. S. B.; ALVES, A. X.; NEVES, S. S. M. **História da Matemática: contribuições e descobertas para o ensino-aprendizagem de matemática.** Belém: SBEM, 2008. In: ROSA, M.; OREY, D. C. **Raízes históricas do programa etnomatemática.** Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Educação Matemática em Revista. Ano 12, n. 18-19, p. 5-13, 2005

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender matemática,** São Paulo; Autêntica, 2006.

PARRA, Cecilia. **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artes Médicas, p. 73-108, 1996.

POZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M. D. P. P. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, Juan Ignacio. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver a aprender.** Porto Alegre: Artmed, 1998.

RIBEIRO, E. C. **Material concreto para o ensino de trigonometria.** 29 f. Monografia de Especialização – Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciência Exatas - ICEx, Belo Horizonte, 2011.

VERGNAUD, G. **A teoria dos campos conceituais.** In: BRUN, Jean (dir.). **Didáctica das matemáticas.** Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 155–191.