

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PIAUÍ
Campus Parnaíba

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ-
CAMPUS PARNAÍBA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

HISTÓRIA E DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DA RELATIVIDADE

Carlos Gabriel Falcão Freitas

**Parnaíba-Pi
2021**

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ-
CAMPUS PARNAÍBA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

Carlos Gabriel Falcão Freitas

HISTÓRIA E DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DA RELATIVIDADE

Trabalho de conclusão de curso submetido à coordenação do curso de Licenciatura em Física, do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Piauí - Campus Parnaíba, como requisito para obtenção do grau em Licenciatura em Física.

Orientador: Prof. Me. Marcos Antônio Matos Souza

**Parnaíba-Pi
2021**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Freitas, Carlos Gabriel Falcão

F862h História e desenvolvimento da Teoria da Relatividade / Carlos Gabriel
Falcão Freitas. - 2022.
118 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto
Federal do Piauí, Campus Parnaíba, 2022.

Orientador : Prof. Me. Marcos Antonio Matos Souza .

1. Física . 2. Teoria da Relatividade. 3. História . I. Título.

CDD - 530

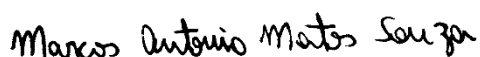
Elaborado por Micheline Angélica Aragão Gouveia CRB 3/1244

HISTÓRIA E DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DA RELATIVIDADE

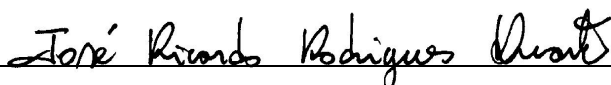
Carlos Gabriel Falcão Freitas

Aprovado em 18/01/2022

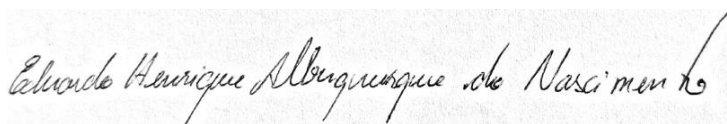
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Física do IFPI/*Campus* Parnaíba, aprovado pela Banca Examinadora:



Prof. MSc. Marcos Antonio Matos Souza - (Orientador) - IFPI/*Campus* Parnaíba-PI
Presidente



Prof. Dr. José Ricardo Rodrigues Duarte - IFPI - Campus Teresina Central
Membro Examinador



Prof. MSc Eduardo Henrique Albuquerque do Nascimento - IFMA - Campus São Raimundo das Mangabeiras
Membro Examinador

Parnaíba PI

2022

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse ao longo de minha vida. É o maior mestre que alguém pode conhecer.

A minha esposa Maria Carolinne Carvalho do Rêgo, por todo apoio, dedicação, compreensão e incentivo. Amo você.

Aos meus pais Carlos José Cardoso Freitas e minha mãe Maria de Fatima Falcão Freitas, por todo amor e cuidado.

Aos meus avós João Cardoso de Miranda e Francisca Cardoso Freitas, por todo aprendizado e carinho.

Ao Prof. Me. Marcos Antônio Matos Souza pela oportunidade, ensinamentos e apoio na elaboração deste trabalho.

A todos os professores do curso de licenciatura em física e todos aqueles que passaram por minha vida. A palavra mestre, nunca fará justiça aos professores dedicados, aos quais sem nominar terão os meus eternos agradecimentos.

As casas são feitas de tijolos, a ciência é feita de fatos, porém uma pilha de tijolos não é uma casa e uma coleção de fatos não é, necessariamente, ciência.

Jules Henri Poincaré

RESUMO

O presente trabalho tem como tema a História e Desenvolvimento da Teoria da Relatividade. Essa teoria foi apresentada ao mundo no ano de 1905 por Albert Einstein e causou grandes mudanças no mundo científico e na sociedade em que vivemos. É porque existe teorias como a relatividade que hoje o ser humano desfruta de inúmeras tecnologias, viaja ao espaço e consegue fazer estudos de outros planetas. Diferente do que muitos pensam, a Relatividade começa a ganhar forma, no século XVII, nas mãos de Galileu e a partir desse ponto ela seguiu avançando no tempo e passou pelas mentes de vários outros cientistas até ganhar a forma que a conhecemos hoje. O objetivo deste material é apresentar os fatos históricos e relevantes que foram essenciais para a síntese dessa teoria que é tão importante para a ciência, listar os nomes de todos os envolvidos que contribuíram para tal feito, e por fim descrevê-la de uma forma acessível e adequada a qualquer pessoa que se interesse pelo tema, desmistificando a ideia de que a Teoria da Relatividade é uma teoria complexa e exclusiva de Albert Einstein. Também, mostrar que o conhecimento científico deve fazer parte da formação básica dos cidadãos, para que este possa ter o mínimo de conhecimento necessário para compreender os avanços que a ciência proporcionou ao mundo contemporâneo e, por fim auxiliar as disciplinas e conteúdos voltados para a filosofia e história da ciência moderna nos cursos de Licenciatura em Física com o intuito de estimular a elaboração de novos trabalhos, na respectiva área, e disseminar a evolução histórica das teorias e do conhecimento científico. O trabalho aborda, além disso, uma parte bibliográfica que descreve a um pouco da vida de alguns dos principais nomes envolvidos na Teoria da Relatividade, como Albert Einstein e Galileu Galilei, mostrando aspectos da época desses homens e as principais dificuldades que encontraram no decorrer de suas trajetórias na ciência. Para alcançar tal objetivo, foi feito um levantamento histórico bibliográfico de obras, artigos, revistas e livros de física básica com intuito de obter o máximo de informações possíveis a respeito do tema ou informações conectadas a ele.

Palavras-chave: Teoria da relatividade. Desenvolvimento Histórico. Cientistas. Biografia. Formação Básica.

ABSTRACT

The present work has as its theme the History and Development of the Theory of Relativity. This theory was introduced to the world in 1905 by Albert Einstein and caused great changes in scientific world and in the society where we live. It is because there are theories such as relativity that today human beings enjoy countless technologies, travel to space and is capable to do research outside the earth. Unlike what many people think, Relativity begins to take shape, in the 17th century, by the hands of Galileo, much earlier and from that point onwards it continued to advance in time and passed through the hands of several other scientists, until it took on the form, we know it today. The objective is to present the historical and relevant facts that were essential for the synthesis of this theory, which is so important to science, as well as list the names of all who contributed, in an accessible and suitable way for anyone interested in the topic, demystifying the idea that the Theory of Relativity is a difficult and exclusive theory of Albert Einstein. Also, show that scientific knowledge must be part of the basic education of citizens, so that they can have the minimum knowledge necessary to understand the advances that science has provided to the contemporary world and, finally, help the disciplines and content aimed at philosophy and modern science history in Physics Degree courses to stimulate the development of new works, in the respective area, and disseminate the historical evolution of theories and scientific knowledge. The work also covers a part of the biography of some of the main names involved in the Theory of Relativity, such as Albert Einstein and Galileo Galilei, showing aspects of these men's lives and the main difficulties they encountered during their careers in science. To achieve this objective, a historical bibliographic survey of works, articles, magazines and books on basic physics was carried out, in order to obtain as much information as possible about the topic or information connected to it.

Keywords: Theory of relativity. Historical Development. Scientists. Biography. Basic Training.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
1. A RELATIVIDADE DE GALILEU GALILEI	4
1.1 GALILEU GALILEI	4
1.2 AS TRANSFORMAÇÕES DE GALILEU	12
1.3 O PROBLEMA DO ELETROMAGNETISMO	15
2.0 AS CONTRIBUIÇÕES DE POINCARÉ, LORENTZ E FITZGERALD	20
2.1 A RELATIVIDADE DE POINCARÉ	20
2.2 LORENTZ E FITZGERALD	23
2.3 AS TRAFORMAÇÕES DE LORENTZ	27
3. A TEORIA DA RELATIVIDADE DE EINSTEIN	28
3.1 EINSTEIN	29
3.2 RELATIVIDADE DE EINSTEIN	37
3.3 ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DA TEORIA DA RELATIVIDADE	39
3.4 O FIM DO ÉTER	41
4. MINKOWSKI E A QUARTA DIMENSÃO	43
CONSIDERAÇÕES FINAIS	48
REFERÊNCIAS	52
APÊNDICE A	54
EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY	54
APÊNDICE B	59
APÊNDICE C	63
TRANSFORMAÇÕES DE LORENTEZ INVERSAS	63
APÊNDICE D	66
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO	66
APÊNDICE E	69
DILATAÇÃO DO TEMPO	69

APÊNDICE F	72
ENERGIA	72
APÊNDICE G	75
ADIÇÃO DE VELOCIDADE	75
ANEXO 1	78
ANEXO 2	79
ANEXO 3	79

INTRODUÇÃO

O ser humano sempre procurou entender sua origem e o mundo que o cerca. Aos poucos o homem foi entendendo a natureza e os seus fenômenos, conseguiu fazer descobertas e criou inúmeras ferramentas, bem como conceitos a partir de suas necessidades, como por exemplo, a descoberta do fogo e a invenção da roda. Assim, na tentativa de compreender a natureza através da observação, a Física tenta explicar os fenômenos que ocorrem no mundo.

A ciência percorreu um caminho até adquirir a forma que a conhecemos hoje e ainda está em constante evolução. O mundo passou por inúmeras transformações desde os filósofos gregos como Aristóteles, Platão e Thales de Mileto e a evolução científica trouxe à humanidade a tecnologia atual. Tais transformações tiveram como resultado mais recente a Física Moderna que ganhou grande impulso no século XVII, focada na experimentação como forma de conhecer e definir as leis naturais. A partir desse ponto, nascia então a ciência moderna, que somente através de experimentação poderia provar hipóteses e, seguramente, afirmar se determinado evento é ou não verdadeiro.

A mudança de paradigma da Física, a partir do século XX, demonstrou as limitações da Mecânica de Newton, a qual passa a ser válida apenas para objetos que possuem grande massa, ou grande quantidade de átomos, e restritamente para velocidades pequenas se comparadas à velocidade da luz. É então que a Mecânica Clássica cede terreno para a Mecânica Quântica e para a Relatividade de Einstein.

Atualmente qualquer smartphone possui um navegador GPS¹, mas é a Teoria da Relatividade que pode explicar o seu funcionamento. A localização, nestes dispositivos, é calculada segundo o tempo de resposta entre eles e os satélites que orbitam a terra. Se o GPS não considerasse a relatividade do tempo, por exemplo, devido à velocidade dos satélites em órbita e a distância em que o campo gravitacional está da terra, os relógios atômicos incorporados ao GPS deixariam de estar calibrados, podendo acumular vários erros sem que conseguíssemos chegar ao destino final correto (ZANOTTA, CAPPELLETTO, MATSUOKA, 2011).

¹ GPS: Sistema de posicionamento global

Outra aplicação da teoria da relatividade é nas televisões mais antigas que utilizavam CRTs², pequenos aceleradores de partículas que faziam com que os elétrons fossem disparados em alta velocidade, na parte de trás do monitor. Caso a relatividade não fosse levada em conta os elétrons não conseguiriam projetar os pixels nas posições corretas.

Sabemos que durante a vida das pessoas, a Relatividade se encontra presente em muitos momentos de seu cotidiano, mas a grande maioria delas não fazem ideia desse fato e o grande motivo pra tal é bastante claro, elas não entendem ou mesmo a conhecem. Para muitos a Relatividade apenas significa Albert Einstein, para outros não passa de uma grande e complexa teoria que poucas pessoas compreendem, destinando essa façanha apenas para aos cientistas e a alguns grupos seletos que precisam compreendê-la para algum fim específico.

Isso ocorre pela falta de materiais disponíveis nos meios de comunicação, informação e acadêmicos, que abordem a teoria de uma forma simples, objetiva e direta sem uso de termos técnicos difíceis de compreender e cálculos complexos que poucos são capazes de decifrar a sua real essência. Com sua evolução histórica acontece o mesmo problema, além da escassez de material disponível, poucos sabem realmente sobre a evolução e o desenvolvimento da teoria, fazendo relação apenas com a figura de Albert Einstein e se esquecendo de grandes nomes que tiveram papel fundamental na construção da teoria.

Portanto, é necessário produzir materiais que, de maneira didática, aborde a evolução histórica da Teoria da Relatividade, trazendo os seus autores, contribuintes e os principais fatos determinantes para sua síntese, e que ao final traga para as pessoas o entendimento mínimo necessário para compreender os fenômenos relativísticos que ocorrem no seu cotidiano. Com isso, a pesquisa possui problemática de: como apresentar a evolução histórica da teoria da relatividade de forma compreensível para as pessoas apresentando os seus autores?

A pesquisa possui como objetivo geral: apresentar o desenvolvimento histórico da teoria da relatividade, analisando e abordando diversos aspectos que contribuíram para sua descoberta, mas principalmente, o que faz dela uma teoria tão especial no que se refere à Física e consequentemente, à história da Ciência. Como objetivos específicos iremos: apresentar a Teoria da Relatividade de uma maneira didática e

² CRTs: tubo de raios catódicos

em uma linguagem acessível para qualquer pessoa, mostrando-a na forma de uma abordagem histórica e sequencial, que explicitem os principais aspectos inerentes a sua formação e descoberta, bem como proporcionar um entendimento mínimo.

Para alcançar os objetivos do seguinte trabalho, será feito o uso das leituras e interpretações de obras bibliográficas, bem como materiais voltados para temas mais específicos relacionados à própria Teoria da Relatividade ou qualquer outro tema que tenha relação direta ou indireta no processo de construção dela.

1. A RELATIVIDADE DE GALILEU GALILEI

O princípio da relatividade foi surgindo ao longo da história da ciência como consequência da compreensão progressiva de que dois referenciais diferentes oferecem visões perfeitamente plausíveis de um mesmo efeito. Este princípio foi inserido na ciência moderna por Galileu Galilei.

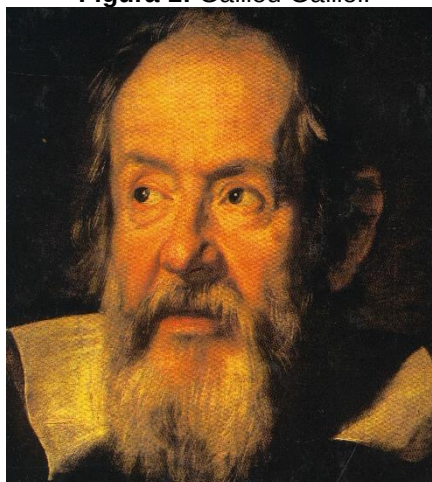
De acordo com Pablo Rubén Mariconda (2006), A obra de Galileu Galilei está intimamente ligada à revolução científica do século XVII, talvez uma das mais profundas revoluções sofridas pelo espírito humano, que implicou uma mudança intelectual radical, cujo produto e expressão mais genuína foi o nascimento da ciência moderna.

Dentro desse quadro, Galileu é mundialmente considerado o fundador e pai da ciência moderna.

1.1 GALILEU GALILEI

Como descrito por Bernard (1954), todos já ouviram falar em Galileu Galilei, o grande sábio, gênio, cientista, matemático, físico, astrônomo, escritor, filósofo e pensador, que deixou um importante legado em diversas áreas. Considerado revolucionário à época, chegou a ser perseguido e julgado. Foi admirado e louvado, criticado e acusado, elevado ao ápice da glória e humilhado como réu e criminoso. Foi um lutador vitorioso e derrotado, impulsionando a ciência e cedendo a erros. Seus admiradores o exaltam, seus opositores o condenavam. Boa e má fé se misturam, como também os fatos históricos se entremeiam com lendas. Apontado como um homem indecifrável, com a vida cheia de estranhas contradições. Seu legado nos deixou inúmeros mistérios e indagações.

Figura 1: Galileu Galilei.



Fonte: <https://www.ufjf.br>.

Há mais ou menos 500 anos atrás, a Europa não se parecia em nada com o continente que conhecemos hoje, tudo era muito diferente. A maioria das pessoas trabalhavam e viviam da agricultura, cultivando e produzindo seus próprios alimentos, cuidando dos poucos animais que possuíam e alguns viviam do comércio e do artesanato. Poucas crianças conseguiam ir à escola, muitas delas assim que atingiam uma certa idade, que as dariam uma pequena capacidade para trabalho, já passavam a ajudar seus pais nas atividades diárias. Os livros eram raros e muito caros para a maioria da população, somado a isso os livros, também, eram escritos em latim, a língua dos sábios da igreja, e grande parte deles também eram proibidos de circular dentre a população por serem tidos como hereges. Época da famosa inquisição da igreja católica, também chamada de Santo Ofício, que era formado pelos tribunais da Igreja Católica que perseguiram, julgavam e puniam pessoas acusadas de se desviar de suas normas e conduta.

Foi nesse mundo em que Galileu Galilei nasceu e cresceu e ainda assim tornou-se, para muitos, uma das maiores mentes que já existiu na terra. Um italiano, que deu contribuições fundamentais para o desenvolvimento do método científico, principalmente na astronomia, em estudos do movimento e resistência dos materiais. Galileu Galilei é uma referência maior para a ciência tal como a entendemos hoje. Na sua obra não publicada, *De Motu*, escrita entre 1589 e 1592, é um dos primeiros a expressar a ideia de que as teorias poderão ser testadas através da experiência. Para muitos foi nesse ponto que começou a ciência moderna (MARICONDA, 2006).

Galileu Galilei nasceu em Pisa, Itália, em 16 de fevereiro de 1564, na família dos Galilei e, foi o primogênito de seis filhos, e seguindo uma praxe da época, deram-lhe o mesmo nome de forma um pouco alterada. Coincidência ou não, nasceu no

mesmo ano em que a obra *De revolutionibus orbium coelestium* de Copérnico, que havia sido publicada em 1543, atingiu seu auge e se tornou a primeira obra de referência para o heliocentrismo.

O pai de Galileu era Vincenzo Galilei, um aristocrata, músico alaudista e um teórico musical descendente de uma família florentina com tradição nas áreas da medicina e administração pública. Além disso, dedicava-se ao comércio em sua loja de tecidos e a dar aulas de música para famílias tradicionais italianas. Sua mãe era Giulia Ammannati, que com o passar do tempo passou a ser mais conhecida como a mãe de Galileu Galilei. Ela era descendente de uma família rica e próspera italiana, um de seus ancestrais era Iacopo Ammannati, que foi o secretário do Papa Pio II.

Galileu herdou de seu pai um grande gosto pela música, além de uma aptidão enorme pela matemática. De sua mãe, puxou o seu lado colérico que lhe trouxe algumas desavenças ao longo de sua trajetória. Dos cinco irmãos que Galileu possuía, apenas três deles sobreviveram a infância e que com ele cresceram.

Na sua infância, revelou ter capacidades diferentes às das outras crianças. Interessava-se em artes, realizou excelentes trabalhos de pinturas e como demonstrava uma grande habilidade manual, costumava se distrair fabricando brinquedos e pequenas engenhocas com as quais perdia horas do seu dia. Na música, herança de seu pai, era um excelente músico, instrumentista e compositor, tocava órgão, alaúde, citara e compôs músicas.

No ano de 1574, quando ainda criança, Galileu muda-se para a cidade de Florença e passa a estudar no Mosteiro Jesuíta de Calmadolese, na então cidade vizinha de Vallombrosa. Aos dezessete anos de idade, no ano de 1581, estimulado pelo seu pai, que o encorajava a fazer medicina, entrou na Universidade de Pisa a fim de estudar a carreira que seu pai sonhava. No entanto, Galileu não se identificou com o curso e passava grande parte de seu tempo se dedicando ao estudo de outras disciplinas de seu interesse. Durante seu tempo na Universidade, faltava as aulas para realizar experiências e por algumas vezes ainda fazia inimizades com professores por se atrasar para as aulas, e claro, também por ir de encontro ao pensamento aristotélico estabelecido na época.

No ano de 1585, Galileu retorna para Florença sem o diploma de medicina almejado por seu pai, já que não tinha vocação alguma para área. Passou, então, a ajudar seu pai na loja de tecidos e a dedicar-se ainda mais ao estudo da matemática e as experiências que realizava, passando a estudar sozinho Euclides e Arquimedes.

No decorrer do ano de 1585 a 1589, Galileu passou a ministrar aulas particulares em Florença e em Siena, ambas na Itália. Com o passar do tempo, Galileu acabou ganhando prestígio e ficou conhecido por esse motivo, até que em 1589, por recomendação de Guidobaldo del Monte³, figura que o indicou para o cargo de professor de matemática na Universidade de Pisa, passa a lecionar na mesma, fato que deu ao seu pai certo orgulho.

Em 1591, Vincenzo Galilei, pai de Galileu, morre e suas obrigações passam então para ele, já que era homem e o primogênito da família. No ano de 1592, por conta de sua contra abordagem ao pensamento aristotélico, o seu contrato para o cargo de professor de matemática da Universidade de Pisa não foi renovado. No entanto, consegue ir para a Universidade de Pádua, onde acabaria ocupando o mesmo cargo anterior, de professor de matemática, onde permaneceu até o ano de 1610.

Em meados do ano de 1599, durante uma viagem de Galileu a Veneza, conheceu uma jovem chamada Marina di Andrea Gamba, filha de Andrea Gamba, com quem começou um relacionamento. Após a mudança de Galileu para Pádua, Marina Gamba mudou-se para a casa de Galileu, apesar de serem católicos passaram a viver juntos sem se casarem na igreja, ela deu-lhe três filhos, Virginia no ano de 1600, Livia no ano de 1601 e Vincenzo no ano de 1606. Virginia mais tarde viria a ser Irmã Maria Celeste quando entrou para o convento em 1616.

No dia 17 de agosto de 1605, Galileu é admitido como membro da Accademia Della Crusca, em Florença, uma renomada instituição linguística Italiana, que reúne estudiosos e especialistas em linguística e filologia italiana, é conhecida por ser a mais antiga entre as academias em atividade na Itália. Abaixo, a figura 2 representa uma imagem do prédio da antiga instituição.

³ Também conhecido como Guidobaldi, Marquês de El Monte, foi um filósofo, matemático e astrônomo italiano que viveu no século XVI e que mantinha uma amizade com Galileu.

Figura 2: Accademia della Crusca.



Fonte: <https://encrypted-tbn0.gstatic.com>.

No ano de 1610, Galileu muda-se definitivamente de Pádua para Florença, no mês de setembro, e passa a morar no Palácio Medici depois de ter sido nomeado por Cosimo II, grão-duque da Toscana e chefe da poderosa família Medici, para os cargos de primeiro matemático e filósofo do grão-duque de Toscana e primeiro matemático da Universidade de Pisa. Com ele, levou apenas suas duas filhas que posteriormente as coloca em um mosteiro, deixando sua companheira Marina Gamba e seu filho.

No dia 29 de março de 1611, viaja para Roma, onde é recebido pelo Papa Paulo V, o mesmo o homenageou como membro da Accademia dei Lincei e apoiou as suas pesquisas e as suas descobertas na ciência. Em 1616, o cardeal Bellarmine, a mando do Papa foi comunicar Galileu que a teoria de Nicolau Copérnico não poderia ser disseminada, ensinada e nem defendida de forma alguma, seja escrita ou verbalmente como fato verdadeiro, Galileu o advertiu que poderia acontecer de surgir rumores que indicassem que ele teria sido forçado a abjurar e a se penitenciar, Bellarmine, diante dos argumentos expostos por Galileu, escreveu um certificado negando-os e afirmando que Galileu fora apenas notificado do decreto e informado que, por conta do decreto, a doutrina de Copérnico não poderia ser defendida, ensinada ou mantida. O certificado de Bellarmine permitiu que Galileu continuasse seus estudos em busca de evidências e usasse o modelo geocêntrico como dispositivo teórico. No mesmo ano, Paulo V garantiu a Galileu que ele estava a salvo de perseguições enquanto ele estivesse em vida. O certificado de Bellarmine foi usado anos depois por Galileu para sua defesa no seu julgamento em 1633.

No ano de 1615, no dia 7 de fevereiro, o padre Lorini Denuncia Galileu ao Santo Ofício.

As observações astronômicas de Galileu fizeram com que este se inclinasse para a teoria de Copérnico e a sua postura perante a teoria viria, mais tarde, a causar-lhe problemas. Em 1613, escreveu uma carta ao seu discípulo Benedetto Castelli (1577 – 1644) sobre o problema do enquadramento da teoria de Copérnico com certas passagens bíblicas. Dois anos depois, a Inquisição considerou a teoria de Copérnico herética e Galileu teve, ao longo da sua vida, alguns problemas com esta instituição, sendo mesmo obrigado a rejeitar publicamente que a Terra se movesse em torno do Sol, uma rejeição imortalizada em diversas obras literárias e que simboliza o conflito entre as visões científica e dogmática (RIBEIRO, 2014, p. 19).

Galilei escreveu uma carta a seu amigo Benedetto Castelli, matemático da Universidade de Pisa, em 21 de dezembro de 1613. Essa carta foi encontrada pelo pesquisador Salvatore Ricciardo, da Universidade de Bérgamo, na Itália, que encontrou o documento nos arquivos da Royal Society of London⁴. No documento, Galilei expõe pela primeira vez seus argumentos de que a pesquisa científica deve estar livre da doutrina teológica (ALEX LINO, 2019).

Galileu já havia apoiado publicamente a teoria do astrônomo polonês Nicolau Copérnico de que o Sol estava no centro do Sistema Solar, numa época em que a maioria das pessoas acreditava que a terra era o centro do universo. Essa nova hipótese era revolucionária e ao mesmo tempo também problemática.

Os historiadores sabiam que Castelli havia devolvido a carta a Galileu, mas não tinham conhecimento sobre o destino da carta depois disso. Sabiam, entretanto, que havia uma cópia da carta que caiu nas mãos do frade dominicano Niccolò Lorini, que a enviou ao Vaticano em 7 de fevereiro de 1615 (ALEX LINO, 2019). Dias depois de Lorini ter enviado a carta transgressora ao Vaticano, Galilei escreveu ao clérigo Piero Dini, em 16 de fevereiro de 1615, dizendo-lhe que a versão nas mãos da hierarquia da Igreja poderia ter sido alterada, Galileu anexou a Dini uma versão mais branda da primeira carta, assegurando-lhe que esta era a correta e pedindo que ela fosse enviada aos membros do Vaticano. Até o momento, os pesquisadores não sabem até que ponto a cópia de Lorini teria sido alterada.

De acordo com a descoberta de Ricciardo, Galilei teria escrito os dois textos sob rasuras e correções. A cópia descoberta por Ricciardo mostra o texto original de Galileu e é igual à versão de Lorini. Na versão de Lorini, o físico italiano diz que algumas afirmações na Bíblia são falsas se alguém é guiado pelo significado literal

⁴ Sociedade científica fundada no século XVII e sediada na capital inglesa.

das palavras. Na versão suavizada, Galilei removeu a palavra *falsas* da carta. Ver anexos A e B as imagens das duas cartas.

No fim do mesmo ano em que Galileu foi denunciado pelo padre Lorini. Ele viaja à Roma para se defender das acusações, chegando em Roma, a doutrina copernicana é declarada herética pela congregação do Index, que era um grupo que decidia quais eram os livros proibidos pela Igreja Católica por serem considerados contrários à fé e à moral cristã, geralmente apresentado pelo latim Index Librorum Prohibitorum⁵. Galileu, porém, nada sofreu com esse acontecimento, foi, inclusive, recebido pelo papa na ocasião.

Sua ex-companheira Marina Gamba morreu, em 1612 em Pádua, sozinha. Galileu, tempos depois, declarou nunca ter sido casado com a mesma. No ano de 1620 morre também sua mãe, Giulia Ammannati, restando em Pádua apenas seu filho casula, o qual Galileu não o reconhecia como tal, vindo, anos depois, a se reconciliarem. Seu filho, Vincenzo, casa-se, em janeiro de 1629, e, no mesmo ano em dezembro, nasce o único neto de Galileu, batizado com o mesmo nome do avô.

Em meados de 1632, Galileu é convocado pelo Santo Ofício, em Roma, o Papa Urbano VIII percebe a aceitação generalizada do modelo heliocêntrico logo após a publicação do seu livro *Diálogos*, nesse mesmo ano, obra em que Galileu defende o heliocentrismo, contraria ao pensamento da igreja da época, o geocentrismo. Em setembro, ao ficar sabendo da situação, Galileu manda comunicar a igreja que não está bem alegando complicações de saúde para não ter que viajar. No entanto, a desculpa de Galileu, no dia 30 de dezembro de 1632, não suporta nova ordem do Papa pedindo para que se apresente em Roma imediatamente e com a nova ordem também vinha o pedido de aprisionamento de Galileu pelo Santo Ofício. Então, ele parte por conta própria em direção a Roma para ser julgado e entrega-se ao Santo Ofício no dia 12 de abril de 1633. Começa então nesse período um dos fatos mais lembrados de sua vida.

Em 1632 é publicado *Dialogos*. Aquela que é, talvez, a sua obra maior revelar-se-á também o maior problema da sua vida. Em *Dialogos*, três personagens, Simplicio, Salviati e Sagredo discutem a ciência e em particular os dois

⁵ Lista dos livros proibidos, o livro *Diálogos* escrito por Galileu foi proibido pelo Index no ano de 1632.

Grandes Sistemas do Mundo: o Copernicano e o Ptolomaico. A controvérsia e a intriga contra Galileu adensam-se (MACEDO, 2016, p.28).

O tribunal da Santa Inquisição começa a ganhar forma no ano de 1633. Galileu então passa a perceber que entre o céu que observa através dos telescópios que ele mesmo constrói e o Céu que, como católico assumido, admira, existem barreiras intransponíveis. O livro *Diálogos* é proibido pela igreja católica e permanecerá inserido no Index até o ano de 1835. Galileu foi obrigado a negar e a desmentir tudo que acreditava para salvar a sua vida, perante a acusação de heresia associada à defesa da teoria heliocêntrica de Copérnico. Assim, aos 69 anos, Galileu é considerado culpado pela igreja e permanece em prisão domiciliar pelo o resto da vida.

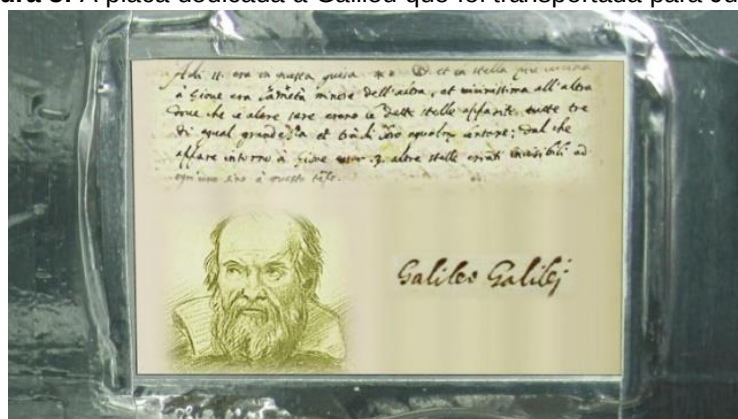
De acordo com Francisco Macedo (2016), no site <https://correiominho.pt>⁶, nos seus anos finais, Galileu volta a dedicar-se aos estudos sobre o movimento dos corpos iniciado muitos anos antes. Em novembro de 1641, é acometido por uma forte gripe que logo evolui para uma pneumonia, fazendo com que Galileu morresse no dia 8 de janeiro de 1642. Cerca de um ano depois nasceria Isaac Newton e, com ele, muitos dos trabalhos de Galileu se tornariam leis. Em 1979, o Papa João Paulo II pede que o processo de Galileu seja reexaminado e, em 1992, trezentos e cinquenta anos passados após a sua morte, ele reconhece que erros foram cometidos no processo e declara o mesmo encerrado.

Um fato curioso que aconteceu no ano de 1995, uma sonda, enviada pela NASA⁷ e batizada de Galileu, chega ao planeta de Júpiter com a missão de expandir o conhecimento do homem a respeito do universo e de desbravar o planeta vizinho da terra. A sonda levou em seu interior uma placa em homenagem a Galileu como pode ser visto na figura 3.

⁶ Site oficial do jornal Correio do Minho, do Departamento de Física da Escola de Ciências da Universidade do Minho, fundado em 6 de julho de 1926.

⁷ NASA - Administração Nacional da Aeronáutica e do Espaço (National Aeronautics and Space Administration).

Figura 3: A placa dedicada a Galileu que foi transportada para Júpiter.



Fonte: <http://www.nasa.gov>.

A placa tem 6 gramas e mede 71 x 51 milímetros e além da imagem de Galileu ela inclui uma passagem escrita pelo próprio em que se registram observações de Júpiter e dos seus satélites que dizia o seguinte.

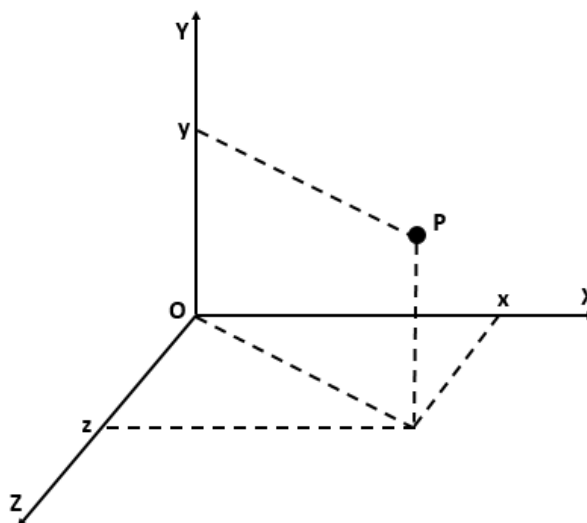
No 11? elas estavam nessa formação – e a estrela mais próxima de Júpiter tinha metade do tamanho da outra e estava muito próxima da outra assim, durante as noites anteriores todas as três estrelas observadas tinham o mesmo tamanho e a mesma distância as separava, fica então evidente que ao redor de Júpiter existe três estrelas se movendo invisíveis até agora para qualquer um de nós (SACANI, 2011).

1.2 AS TRANSFORMAÇÕES DE GALILEU

De acordo com Riffel (2010), todos os fenômenos naturais ocorrem em algum lugar do espaço e se modificam com o passar do tempo e um evento físico pode ser definido como um elemento de algum fenômeno que ocorre em uma determinada posição no espaço em um determinado instante de tempo. Dessa forma, um fenômeno físico pode ser descrito como uma sequência destes eventos. A medida das posições no espaço onde ocorrem os eventos pode ser caracterizada pela escolha de um sistema de referência, ou referencial, que pode ser definido como um sistema de eixos, nos quais as posições em que o evento ocorre serão indicadas. Um exemplo de um referencial é apresentado na Figura 4, onde um ponto (P) no espaço é definido pelas suas coordenadas x , y e z as quais são construídas pela projeção do ponto nos eixos X , Y e Z . Um fenômeno físico, como por um exemplo a trajetória de

uma partícula, pode ser caracterizado por sucessivas medidas da posição do espaço em que o evento ocorre em diferentes instantes de tempo

Figura 4: Representação de um sistema de referência com os eixos X, Y e Z .



Fonte: Figura do autor.

Conclui-se que na situação a cima, o movimento de uma partícula que está a realizar uma trajetória é diferente quando o mesmo é observado de referenciais distintos e a partir deles são tiradas as medidas do trajeto realizado. As grandezas, como a velocidade, não irão ser as mesmas para os respectivos observadores em seus respectivos referenciais.

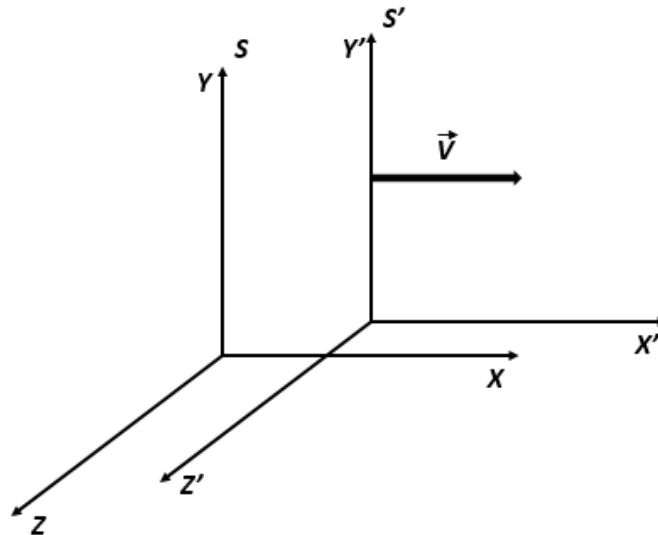
Newton afirmava que é possível obter um referencial ou um conjunto deles, em que um corpo sempre vai estar em movimento retilíneo uniforme, sem aceleração, ou em repouso, sendo o somatório das forças atuantes no corpo igual a zero. Sendo assim, temos duas categorias referenciais: um onde as leis de Newton são validas que é denominado de *referencial inercial* e outra onde as leis de Newton não são validas que é denominado de *referencial não inercial* (HALLIDAY E RESNICK, 2017, p. 320).

Galileu afirmava que o movimento, ou pelo menos o movimento retilíneo uniforme, só tem algum significado quando é levado em consideração outro ponto de referência. Segundo o princípio da relatividade de Galileu, não existe sistema de referência absoluto pelo qual todos os outros movimentos possam ser medidos.

Com isso, elaborou um conjunto de transformações chamadas transformações de Galileu, para sintetizar as leis do movimento quanto a mudanças de referenciais. Para entendê-las, considere a figura 5 abaixo no qual se tem dois referenciais

inerciais, S e S' , adotando que o referencial S' se move com velocidade V em relação ao referencial S .

Figura 5: Referenciais inerciais S e S' .



Fonte: Figura do autor.

Se existir um observador no referencial S , para ele as coordenadas do espaço tempo de um determinado evento será x, y, z e t , por outro lado um outro observador no referencial S' terá para o mesmo evento coordenadas x', y', z' e t' . Para caracterizar o evento físico, além da posição espacial, precisamos conhecer também o instante de tempo em que ele ocorreu medido no referencial $S(t)$ e no referencial $S'(t')$. Admitindo-se que quando o movimento acontecer na direção de x , as coordenadas y e z vão se manter constantes; na direção y , serão x e z constantes e por último na direção z serão x e y . Logo, temos, para o movimento na direção x , $y=y'$ e $z=z'$, admite-se o mesmo raciocínio para os outros casos, mudando de acordo com a direção do movimento. Dessa forma, as equações de transformação de Galileu para $t=t'$ são descritas na equação (1.1) para $y=y'$ e $z=z'$, (1.2) para $x=x'$ e $z=z'$ e (1.3) para $x=x'$ e $y=y'$.

$$x' = x - v_x t \quad (1.1)$$

$$y' = y - v_y t \quad (1.2)$$

$$z' = z - v_z t \quad (1.3)$$

Uma transformação de Galileu é usada para transformações entre as coordenadas de dois quadros de referência que diferem apenas por um movimento relativo constante dentro das construções da física de Newton. Podemos concluir,

nesse caso, que conhecendo a velocidade de uma partícula em um referencial inercial podemos calcular a velocidade correspondente em qualquer outro referencial inercial.

Essa equação é válida para velocidades v muito menores que a velocidade da luz c , pois quando v tende a se aproximar de c , essas equações começam a discordar de resultados experimentais. Em essência, as transformações de Galileu incorporam a noção intuitiva de adição e subtração de velocidades como vetores.

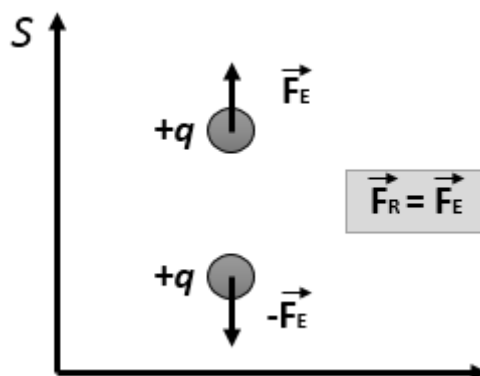
1.3 O PROBLEMA DO ELETROMAGNETISMO

Com a descoberta das ondas eletromagnéticas cuja propagação se dava no vácuo, criou-se um sério problema, pois se a luz era uma onda, isto não poderia ocorrer. O conhecimento que se tinha neste período era de ondas mecânicas, que são ondas que necessitam obrigatoriamente de um meio para se propagar, como por exemplo, ondas sonoras que necessitam do ar para sua propagação. Esse modelo de ondas mecânicas, ou mecanicista, dominava o pensamento científico da época e logo imaginou-se que deveria existir um meio com algumas propriedades especiais no qual as ondas eletromagnéticas pudessem se propagar. Para este meio, deu-se o nome de éter luminífero ou simplesmente éter. No entanto, também era necessário postular propriedades um tanto quanto incomuns para este meio, como densidade zero e transparência perfeita. Este meio já havia sido idealizado por René Descartes no século XVI (WOLFF e MORS, 2005).

Mas esse não era o único problema, ainda existia um outro. Em 1632, Galileu estabeleceu que todas as leis da física são as mesmas em qualquer referencial inercial, esse é o princípio da relatividade postulado por ele, que está na base da Mecânica Newtoniana. De uma forma mais simples, o princípio mostra que uma experiência qualquer de mecânica é descrita pelas mesmas leis em qualquer que seja o referencial inercial, ou seja, em referenciais que se movem com velocidade constante ou estão em repouso. Mas, esse princípio não é válido para força eletromagnética. Tomamos o seguinte problema a seguir (GRIFFITHS, 2017).

Considere dois referenciais, S e S' , de modo que S' esteja em movimento com velocidade v na direção horizontal. Duas partículas de mesma carga elétrica $+q$, estão em repouso em relação ao referencial S . Nesse referencial, as duas partículas se repelem dando origem à força de repulsão eletrostática F_E . Conforme a figura 6 abaixo.

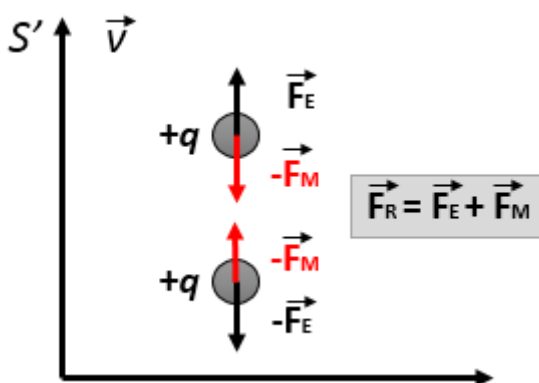
Figura 6: Partículas de carga elétrica $+q$ em repouso em relação ao referencial S e representação do vetor F_E .



Fonte: Figura do autor.

No referencial S' , há duas partículas em repouso de mesma carga $+q$, tomando-se como referência S' , de modo que ambas sejam observadas de S , movem-se com velocidade v igual a de S' . Nessa situação, as duas cargas que se movem com velocidades iguais se atraem com uma força magnética F_M . Logo, em S' , além da repulsão eletrostática F_E , as partículas exercem entre si uma força de atração magnética F_M . Conforme a figura 7 abaixo.

Figura 7: Partículas de carga elétrica $+q$, em movimento com S' em relação ao referencial S e representação do vetor F_E e F_M .



Fonte: Figura do autor.

A força resultante F_R que atua sobre as cargas em cada um dos dois exemplos dados a cima é dada pela Segunda Lei de Newton em ambos os referenciais inerciais, nesse caso, percebemos que ela é diferente. Tem-se, então, uma aparente violação do princípio da relatividade e a Segunda Lei de Newton não pode ser válida simultaneamente nos dois referenciais S e S' (GRIFFITHS, 2017).

Esse problema é a evidência de um problema maior, que é o fato das equações de Maxwell não serem invariantes mediante uma transformação de Galileu, o eletromagnetismo, portanto, violava o princípio da relatividade. Levando-se em

consideração as ondas eletromagnéticas, as Equações de Maxwell fundamentam os princípios do eletromagnetismo e a partir delas pode-se deduzir a velocidade de propagação dessas ondas de acordo com a equação (1.4) abaixo (GRIFFITHS, 2017).

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299.792.458 \text{ m/s} \cong 3.10^8 \text{ m/s} \quad (1.4)$$

Onde c é a velocidade de propagação das ondas, ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. Entretanto, as equações de Maxwell não são invariantes frente às transformações de Galileu.

Levando-se em consideração as transformações de Galileu, é possível chegar nas relações de transformações de velocidade e aceleração. De uma forma geral, isso quer dizer que se pode relacionar velocidade e aceleração de um ponto de vista de dois referenciais inerciais. Logo, pode-se escrever para a velocidade o seguinte.

$$u' = u - v \quad (1.5)$$

Onde u' é a velocidade de um ponto P medida em um referencial S' em movimento, u é a velocidade do ponto P medida no referencial S e v é a velocidade de S' em relação a S . Nesse caso, se o referencial inercial S mede a velocidade da luz como sendo c , o valor medido por um referencial inercial S' que se move com velocidade relativa em relação a S será, de acordo com as transformações de Galileu.

$$c' = c - v \quad (1.6)$$

Se o sentido do movimento de S' for oposto, o resultado segue o mesmo raciocínio.

$$c' = c + v \quad (1.7)$$

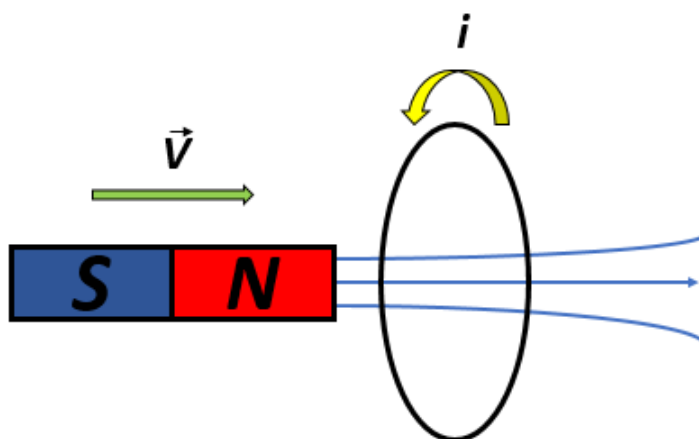
Portanto, percebe-se que o valor obtido para a velocidade da luz não é igual a c em todos os casos.

Uma outra forma de ver o problema é na eletrodinâmica, especificamente na força magnética que depende explicitamente da velocidade, contudo, velocidade é um conceito dependente de referencial. Na mecânica, até aparecem forças dependentes da velocidade, como a força de atrito, mas aqui a força depende apenas da velocidade relativa entre o corpo e a superfície e esta é a mesma em todos os referenciais. O fato de a força magnética depender diretamente da velocidade da carga no referencial em questão provoca uma aparente inconsistência a respeito da força magnética, já que a mesma pode apresentar valores diferentes dependendo do sistema de referência

adotado. Logo, à primeira vista a eletrodinâmica não parece ser consistente com o princípio da relatividade postulado por Galileu (GRIFFITHS, 2017).

Tudo passa a acontecer no momento em que se movimenta um ímã próximo a uma bobina em repouso produzida com material condutor. Sabe-se, nessa situação, que uma corrente elétrica será induzida na espira de acordo com princípio da lei de Faraday, a qual afirma que a variação no fluxo de um campo magnético através de materiais condutores induz o surgimento de uma corrente elétrica. Quando o ímã está em movimento e a bobina em repouso surge na vizinhança do ímã um campo elétrico, o *Efeito Faraday*, que produz a corrente na espira. Observe a figura 8 abaixo.

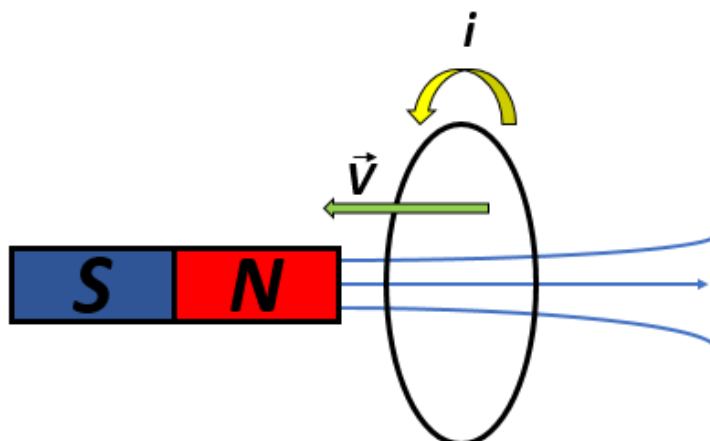
Figura 8: Ímã em movimento em relação à bobina.



Fonte: Figura do autor.

Agora, se fizermos o processo oposto deixando o ímã em repouso e passarmos a movimentar a espira. Sabe-se que o resultado causado por esse ato contrário vai produzir os mesmos efeitos que o primeiro experimento, surgirá uma corrente elétrica de mesma intensidade na bobina. A força magnética atuante nas cargas em movimento da espira é responsável pelo mesmo efeito. Conforme mostra a figura 9 abaixo.

Figura 9: Bobina em Movimento em relação ao imã.



Fonte: Figura do autor.

Podemos concluir, então, que a corrente elétrica produzida, no processo citado anteriormente, irá depender apenas do movimento relativo entre a bobina e o ímã. Porém, percebe-se que o mesmo efeito é explicado por dois fenômenos diferentes, um deles é atribuído a um processo elétrico enquanto o outro é causado por um processo magnético. Isso acontece por conta da mudança do referencial, como já mencionado, perceba que na Relatividade de Galileu, as leis da Física deveriam ser iguais em qualquer referencial inercial onde estivesse sendo observado determinado fenômeno, isto quer dizer que deveria ser observado as mesmas manifestações de um evento, indiferentemente do referencial inercial que utilizarmos (SANTOS, 2019).

Segundo Jeferson Wolff e Paulo Mors (2005), frente a esse problema tinha-se apenas três alternativas, são elas:

1. A Relatividade galileana seria válida apenas para a mecânica clássica. As leis do Eletromagnetismo exigiriam um referencial inercial preferencial chamado éter.
2. A Relatividade galileana seria válida tanto para a mecânica clássica quanto para o eletromagnetismo, mas as equações de Maxwell deveriam ser modificadas.
3. As equações de Maxwell e as leis da mecânica clássica seriam válidas, mas para isto teríamos que modificar as transformações de Galileu.

As equações de Maxwell eram bastante fundamentadas para que fossem modificadas e as leis da Mecânica clássica também possuíam uma boa

fundamentação teórica e experimental então, como alternativa, Einstein escolheu modificar as transformações de Galileu, como veremos mais adiante.

2. AS CONTRIBUIÇÕES DE POINCARÉ, LORENTZ E FITZGERALD

Segundo afirmam Wolff e Mors (2005), antes mesmo de Albert Einstein publicar a Teoria da Relatividade Especial em 1905, os físicos George Francis FitzGerald e Hendrik Antoon Lorentz já discutiam sobre a contração dos objetos e propuseram a mesma relação da contração do comprimento na direção do deslocamento para explicar o resultado do experimento de Michelson e Morley, porém com significados diferentes. Para Lorentz e FitzGerald a contração era resultado da modificação da estrutura da matéria. O éter afetando as forças moleculares, o que explicaria a contração do comprimento. Este argumento foi utilizado e aceito na época. Poincaré, não diferente, em 1895 escreve um trabalho discutindo a publicação de 1893 de Larmor, que trazia uma discussão a respeito do éter e sobre os experimentos ópticos usados para tentar detectá-lo, e enunciou o seu Princípio da Relatividade.

2.1 A RELATIVIDADE DE POINCARÉ

Figura 10: Jules Henri Poincaré.



Fonte: <https://www.pucsp.br>.

Jules Henri Poincaré era um cientista de caráter convencional, nasceu em 29 de abril de 1854 na Cité Ducale, nas vizinhanças de Nancy, França. Era filho de Leon Poincaré, professor de medicina da Universidade de Nancy. Poincaré foi um filósofo, físico e um excelente matemático e dedicou boa parte de sua vida nessa área.

Realizou alguns trabalhos como *Os novos métodos da mecânica celeste*⁸, publicado entre 1892 e 1899, e *Ciência e hipótese* em 1904. Em 1912 ao passar por um procedimento cirúrgico por conta de problemas relacionados a próstata, acaba por ser afetado por uma embolia e vem a falecer em 17 de julho de 1912, aos 58 anos. Foi enterrado no mausoléu da família Poincaré no Cemitério de Montparnasse, Paris.

Em meados do ano de 1893, um cientista chamado Joseph Larmor publicou um trabalho sobre o éter onde tentava explicar o porquê dos resultados negativos, ou melhor, nulos para detectar o éter utilizando os experimentos ópticos. Larmor desenvolveu certas transformações de coordenadas semelhantes às que Lorentz desenvolveria mais tarde, mas suas transformações das grandezas eletromagnéticas eram incorretas. Ele tentou analisar as leis do eletromagnetismo em um referencial em movimento em relação ao éter, mas para isso era necessário partir das equações válidas em relação ao éter e transformá-las nas equações válidas em outros referenciais através de transformações de coordenadas e das grandezas eletromagnéticas (MARTINS, 2015).

No ano de 1895, Poincaré publicou um trabalho em que discutia as propostas de Larmor. Ele explica de forma muito clara os princípios básicos que nortearia todos os trabalhos da época a partir desse ponto. Poincaré afirmava que é impossível medir o movimento relativo da matéria em relação ao éter, pois só se pode evidenciar o movimento da matéria em relação à matéria.

Anos mais tarde Poincaré volta a tocar no assunto, e afirma que apenas o movimento entre corpos materiais pode produzir efeitos e nomeou de Lei da Relatividade. Em um novo trabalho de nome Princípio Do Movimento Relativo, Poincaré discute alguns pontos abordados por Lorentz como o tempo local, que era uma nova variável encontrada por Lorentz. Nesse trabalho, Poincaré expõe uma interpretação para o tempo local de Lorentz.

Mostrou que essa nova variável representava o tempo medido quando os relógios eram sincronizados por meio de sinais luminosos. O uso do tempo local significava utilizar a velocidade da luz como um padrão; e, por causa disso, a velocidade da luz se tornava um invariante, ou seja, tinha o mesmo valor em relação a todos os referenciais, estivessem eles se movendo em relação ao éter ou não. Dessa forma, nenhuma medida da velocidade da luz

⁸ Título original em francês: Les méthodes nouvelles da mécanique céleste.

poderia evidenciar qualquer efeito do movimento do sistema em relação ao éter (MARTINS, 2015, p.31).

No ano de 1902, Poincaré discute, no seu livro *A Ciência e a Hipótese*, sobre o estado atual da ciência na época. Ele afirma que a ciência estava avançando em direção à simplicidade, sendo que descobertas tenderiam a se organizar numa união e os novos fenômenos que iam sendo expostos, pela própria observação, teriam que esperar muito tempo para encontrar seu lugar nesta união. No entanto, seria preciso retirar alguns fatos e conceitos já bem incorporados, para dar espaço a eles. Por outro lado, parecia existir indícios de alterações e complexidades percebidas em conceitos e teorias até então consolidados com o espaço, o tempo e o éter, o que revela que a ciência parecia estar caminhando em direção à pluralidade e à complexidade (CAVALCANTI, 2001).

Poincaré preocupou-se com a questão das hipóteses de contração do espaço proposta por Lorentz. Para Poincaré a natureza da matéria também consistia em um fator para a existência de uma crise.

O atributo essencial da matéria é sua massa, sua inércia. A massa é o que, sempre e por toda parte, permanece constante, o que subsiste quando uma transformação química alterou todas as qualidades sensíveis da matéria e parece ter produzido um outro corpo. Portanto, se chegasse a demonstrar que a massa e a inércia da matéria não lhe pertencem, na realidade, que é um luxo de empréstimo com que ela se enfeita, que essa massa, a constante por excelência, é, ela própria, suscetível de alteração, poderíamos dizer que a matéria não existe. Ora, é precisamente isso que se anuncia (POINCARÉ, HENRI. 1988, p.177).

Pode-se dizer que a contribuição de Poincaré para a Teoria da Relatividade se baseou nas respostas que dava aos artigos de outros cientistas, ele apontava erros, dava opiniões e aperfeiçoava as ideias dos trabalhos ajudando a construir um trabalho mais coeso e claro. Inclusive foi Poincaré que batizou as Transformações Lorentz com esse nome.

Conclui-se que a Teoria da Relatividade já vinha sendo moldado antes de Einstein por Poincaré, não se pode afirmar que Einstein leu os trabalhos dele antes de publicar sua Teoria da Relatividade, mas tudo indica que sim. Einstein pode ter

usado os artigos de Poincaré para chegar a sua teoria. No entanto, no artigo original escrito por Einstein em 1905 não há nenhuma referência aos trabalhos de Poincaré.

2.2 LORENTZ E FITZGERALD

Em 1892, Lorentz e Fitzgerald propuseram uma solução para o impasse do experimento Michelson-Morley, que tinha obtido resultado negativo para a existência do éter

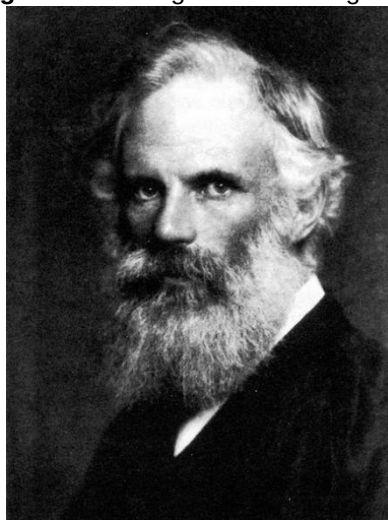
Figura 11: Hendrik Antoon Lorentz.



Fonte: <https://www.nobelprize.org>.

Hendrik Antoon Lorentz foi um físico holandês, nascido em Arnhem, Holanda, em 18 de julho de 1853. Em 1902 ele recebeu o Nobel de Física por seu trabalho sobre as radiações eletromagnéticas, trabalho que causou grande impacto na época. Uma das grandes contribuições de Lorentz à Física foi sua interpretação atomística das equações de Maxwell. Adoeceu gravemente anos depois em janeiro de 1928 e morreu um mês depois em 4 de fevereiro.

Figura 12: George Francis Fitzgerald.



Fonte: <https://physicstoday.scitation.org>.

George Francis FitzGerald foi um físico irlandês, nascido em Dublin, em 3 de agosto de 1851, era filho do reverendo William FitzGerald e de sua esposa Anne Frances Stoney. Ficou conhecido por seu trabalho na teoria eletromagnética e pela contração de Lorentz-FitzGerald, que citamos anteriormente, que se tornou parte integrante da teoria da relatividade especial. Morreu precocemente no dia 21 de fevereiro de 1901, em decorrência de problemas estomacais que o acompanharam por toda sua vida.

Nas primeiras décadas do século XIX, o mundo estava vivendo uma mudança de pensamento em relação a luz. A maioria dos físicos da época acreditavam na teoria corpuscular da luz, mas no decorrer dos anos passaram a surgir evidências de que a luz também tinha natureza ondulatória. Os principais autores dessas ideias foram Thomas Young e Augustin Jean Fresnel. Fresnel acreditava na existência de uma substância em todo universo na qual os corpos se encontram imersos, essa substância se encontra em repouso e possui características e propriedades especiais, essa substância seria o éter. O éter era capaz de atravessar todos os objetos, então o movimento da terra não interferia no estado de repouso do mesmo. Logo, se a luz fosse uma onda que se propagava através do éter, talvez fosse possível medir a velocidade de translação da terra em relação ao éter através de ferramentas e instrumentos ópticos, assim conseguido comprovar a existência do mesmo.

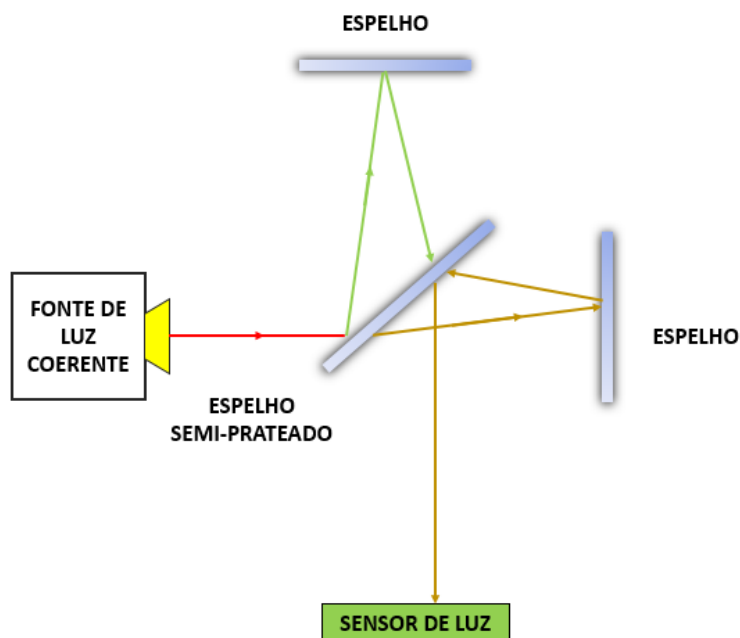
Em 1887, Michelson e Morley obtiveram resultado negativo para existência do éter quando tentavam comprovar a sua existência tentando detectar o movimento da

terra em relação ao éter usando o interferômetro⁹, Lorentz afirmou o seguinte sobre o experimento.

Esta experiência me intriga há muito tempo; por fim, só consegui pensar numa maneira de reconciliá-la com a teoria de Fresnel, que consiste na suposição de que a linha que une dois pontos de um corpo sólido, se inicialmente é paralela à direção do movimento da terra, não conserva o mesmo comprimento quando é subsequentemente rodada de 90° (LORENTZ apud PAIS, ABRAHAM. 2005, p.140).

A ideia era separar em dois feixes de menor intensidade o feixe principal de luz, fazendo com que refletissem separadamente e no seu percurso de volta, se unissem novamente exibindo no anteparo o feixe de luz recombinado. Como os braços do interferômetro possuíam mesmo comprimento, a intensidade do feixe quando incidisse sobre o anteparo dependeria das interferências construtivas ou destrutivas apenas. Se os feixes de luz tivessem diferentes velocidades em ambas as direções, padrões de interferência deveriam ser observados nos anteparos. Ver figura 13 abaixo do esquema do experimento. Experimento completo no apêndice A.

Figura 13: Esquema do experimento realizado Michelson e Morley.



Fonte: Figura do autor.

⁹ Um instrumento óptico utilizado para medir comprimentos com bastante precisão.

O experimento consistia em medir a velocidade da luz aproveitando-se do movimento e da velocidade de translação da terra utilizando um aparato que ficou conhecido como interferômetro de Michelson-Morley consistido de dois braços de mesmo comprimento dispostos perpendicularmente entre si. Na extremidade de um dos braços, uma fonte emissora de luz, na intersecção dos braços um conjunto de espelhos semitransparentes posicionados de forma angulada em 45° , nas extremidades dos dois braços espelhos refletores e um anteparo que permitia visualizar o feixe de luz refletido.

Em 1892, cada um de forma independente do outro, Lorentz e Fitzgerald, formularam uma solução para o impasse do experimento Michelson-Morley. Afirmavam que para manter a teoria do éter, tinha que considerar que o movimento do interferômetro através do éter produziria uma contração do seu comprimento.

Essa hipótese é bastante simples, Lorentz afirmava que a contração do comprimento consistia em se fazer $l' = l \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)$ sendo l o comprimento do braço do interferômetro paralelo à direção do movimento, a velocidade v da terra em relação ao éter e c a velocidade da luz para um observador em repouso no éter. Se o braço do interferômetro que se move paralelamente ao éter sofresse uma contração, passando do comprimento l para l' os tempos de ida e volta da luz nos dois braços passariam a ser iguais, fazendo com que o movimento da terra através do éter não produzisse nenhum efeito mensurável pelo interferômetro. Lorentz comentou que os efeitos também se cancelariam se o interferômetro, ficasse mais largo, isto é, se o braço do interferômetro perpendicular ao éter aumentasse de tamanho na proporção $l'' = l \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$. Essa hipótese já havia sido proposta por Fitzgerald, que acreditava na existência do éter, no entanto, Lorentz não sabia dos trabalhos realizados por ele, tomando conhecimento apenas depois de realizar seus próprios trabalhos. E ficou a teoria, portanto, conhecida como contração de Lorentz-Fitzgerald. Como mostra a citação a seguir.

Li com muito interesse a experiência maravilhosamente delicada dos srs. Michelson e Morley para tentar decidir a importante questão de como o éter é arrastado pela Terra. O resultado parece ser oposto ao de outras experiências, mostrando que o éter só pode ser arrastado no ar numa extensão desprezível. Eu sugeriria que o comprimento dos corpos materiais se modifica (na direção de seu movimento no éter) de uma quantidade que

depende do quadrado da razão entre as suas velocidades e a da luz. Sabemos que as forças elétricas são afetadas pelo movimento dos corpos eletrificados em relação ao éter, e parece ser uma suposição não improvável que as forças moleculares sejam afetadas pelo movimento e que, em consequência, o tamanho do corpo se altere. Seria muito importante que algumas experiências seculares sobre atrações elétricas entre corpos permanentemente eletrificados, como num eletrômetro de quadrante muito delicado, pudessem ser realizadas em zonas equatoriais, para se observar se existe alguma variação diária ou anual da atração - diária, por causa do fato de a rotação da Terra ser adicionada ou subtraída da respectiva velocidade orbital, e anual, de forma similar, para a sua velocidade orbital e o movimento do sistema solar." (FITZGERALD apud PAIS, ABRAHAM. 2005. p.139).

Na época, não havia nenhum motivo físico para imaginar que o movimento dos corpos através do éter deveria mudar suas dimensões. Tanto Fitzgerald quanto Lorentz estavam, provavelmente, sendo guiados simplesmente pela ideia de que alguma coisa poderia estar cancelando o efeito do éter e imaginaram então essa solução de contração.

Até que no decorrer do ano de 1895, Lorentz passa a construir uma de suas maiores contribuições para a ciência moderna, as que ficaram conhecidas como as *Transformações de Lorentz*.

2.3 AS TRAFORMAÇÕES DE LORENTZ

Lorentz foi responsável pela dedução das equações fundamentais para o estudo da relatividade, as chamadas equações de Lorentz ou transformadas de Lorentz. Para isso considerou dois referenciais, um S de coordenadas x, y e z e outro S' de coordenadas x', y' e z', em que S' se movimenta com velocidade v na direção do eixo x, permanecendo y e z invariáveis, como vimos anteriormente com as transformações de Galileu na sessão 1.2 deste trabalho. As transformações de Lorentz do movimento de um corpo inserido em S' que se move com velocidade v na direção do eixo x são as seguintes de acordo com a equação (2.1) e (2.4). Todo o passo a passo para chegar nessas equações pode ser encontrado no apêndice B.

$$x = \gamma(x' - vt') \quad (2.1)$$

$$y = y' \quad (2.2)$$

$$z = z' \quad (2.3)$$

$$t = \gamma \left(t' - \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (2.4)$$

Essas equações são válidas para todas as velocidades, note que se v for muito menor que c , elas se reduzem às equações de Galileu, isso por conta de γ tender a 1, nessa situação, isso mostra uma característica mais geral da relatividade em relação à física clássica, o tempo é relativo e depende do referencial. O fator γ é chamado de fator de Lorentz e pode ser calculado através da equação (2.5) a seguir:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (2.5)$$

As equações de Lorentz podem ser reescritas trocando de lugar as coordenadas x' e x , assim como t' e t , e também invertendo o sinal da velocidade v , obtendo as equações de Lorentz Inversas. Isso é a partir do referencial S' , podemos obtê-las simplesmente intercambiando as variáveis espaço-temporais e alterando o sinal da velocidade, já que se trata-se de uma velocidade relativa. Ficando da seguinte forma de acordo com a equação (2.6) e (2.9) abaixo. Confira o passo a passo no apêndice C.

$$x' = \gamma(x + vt) \quad (2.6)$$

$$y' = y \quad (2.7)$$

$$z' = z \quad (2.8)$$

$$t' = \gamma \left(t + \frac{v}{c^2} x \right) \quad (2.9)$$

Conforme já observamos, nas equações de Lorentz o espaço e o tempo aparecem entrelaçados. Isso traz consequências que desafiam o nosso senso comum e, consequentemente, podemos ver que um mesmo evento observado a partir de dois diferentes referenciais inerciais podem ser, e geralmente serão, não simultâneos.

3 A TEORIA DA RELATIVIDADE DE EINSTEIN

Na passagem do final do século XIX para o início do XX, as leis de Isaac Newton regiam o mundo da física. Newton afirmava que a força gravitacional nada mais é do que uma força causada pelas massas dos corpos, isso quer dizer que todo corpo que contém massa é capaz de atrair outro corpo que também contenha massa,

então ambos se atraem, um em direção ao outro. Quanto maior a massa do corpo, Newton acreditava que maior seria a atração que ele exercia.

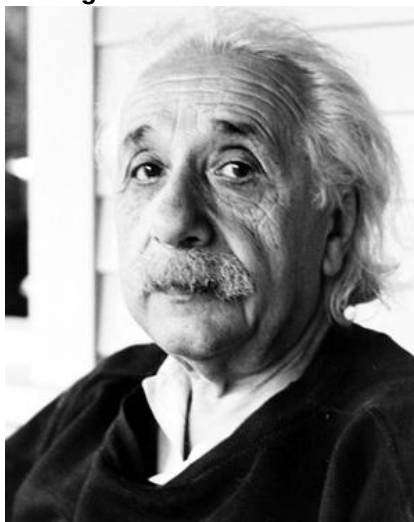
É por conta disso que o ser humano se mantém no chão, já que a terra tem massa e por ter uma massa muito grande acaba atraindo outros corpos para si. No sistema solar acontece a mesma coisa, o sol atrai os planetas que orbitam ao seu redor. Mas se o sol desaparecesse? Segundo Newton todos os planetas sairiam de suas órbitas instantaneamente, já que o sol não exerceria mais sua força gravitacional sobre eles. Para Newton o que se chama de gravidade seria uma força de ação imediata.

Mas, segundo Einstein a luz seria a coisa mais rápida de todo o universo, nenhum corpo possuidor de massa seria capaz de alcançar a velocidade da luz, nem mesmo a própria gravidade. A relatividade de Einstein permitiu que a ciência explicasse acontecimentos da origem do universo, se estendendo até a gravidade, orbitas planetárias e buracos negros. Até hoje, algumas de suas previsões são testadas e confirmadas pelos cientistas, que se surpreendem com a precisão das ideias do físico.

3.1 EINSTEIN

Albert Einstein nasceu a 14 de março de 1879, no fim do inverno daquele ano, em uma cidadezinha pacata na Alemanha, chamada de Ulm, pertencia a uma família de origem judaica da classe média alemã. Era filho de Hermann Einstein, um tradicional homem frio alemão, com Pauline Einstein, doce mulher paciente e dedicada a família, que adorava música, literatura e poesia. A família vivia da velha oficina que Hermann possuía, já que trabalhava como mecânico. Albert Einstein nasceu em tempos de crise para os negócios da família, a velha oficina não estava indo muito bem e o fato de a cidade ser pequena não ajudava em nada. E agora a família não era a mais a mesma, afinal ganhará mais um integrante.

Figura 14: Albert Einstein.



Fonte: <https://www2.ifsc.usp.br>.

Antes mesmo de Albert completar seu primeiro ano de vida, Hermann decide mudar-se com toda família, afinal os negócios não iam bem em Ulm, então a família decide mudar-se para a capital Berlim. Em 1879, Berlim era uma cidade grande, movimentada e com oportunidades. Na capital, a família é recebida por familiares que em primeiro momento acolhem a família Einstein, mas o velho Hermann estava enganado, não muito diferente de Ulm, as coisas em Berlim também não estavam dando certo, não conseguia arrumar emprego algum, muito menos um sócio para abrir uma oficina. Até que uma proposta chega à família, era o irmão de Hermann, Jakob que lhe fazia uma proposta de negócio para juntos abrirem uma oficina na cidade de Munique. E com apenas um ano a família novamente se desloca para outra cidade, dessa vez Munique, onde Hermann e seu irmão Jakob iniciam um novo negócio.

Einstein demorou a se desenvolver, só veio a proferir as primeiras palavras quando já estava com três anos de idade, fato que deixava seu pai preocupado, já que contava com Albert para que um dia tomasse conta dos negócios da família. Isso levou a família a levar o pequeno Einstein a médicos, já que seu desenvolvimento parecia um tanto quanto atrasado em relação as outras criança de sua idade, porém, nada foi constatado pelos médicos em relação a Albert.

Albert demonstrava ser uma criança diferente e solitária, preferia brincar sozinho, nem mesmo na aceitava a companhia de sua irmã, Maja Einstein, nascida no dia 18 de novembro de 1881. Adorava brincar empilhando cartas de baralho em que se formava figuras geométricas perfeitas, também ficava hipnotizado ao ver sua mãe tocar piano, fato que demonstrava que ele tinha um pequeno gosto pela música. Assim, Albert foi crescendo.

O primeiro contato com a escola ocorreu em 1886, quando ingressou na Escola Elementar de Munique. Einstein não foi um dos mais brilhantes alunos, tinha muita dificuldade em língua alemã e literatura, mas tinha uma facilidade incrível com as matérias que exigiam lógica e conhecimentos em geometria e matemática. Suas notas não eram as melhores no geral, mas sempre obteve notas muito boas nas disciplinas que realmente dava atenção. Seus professores sabiam de seu potencial nas exatas, mas muitos deles rejeitavam-no por ser judeu, fato que o fez sofrer bullying¹⁰ de colegas de classe e de alguns e a receber tratamento diferenciado de alguns docentes. Mas um professor foi de fundamental importância para Einstein, herr Reuss, professor de literatura, que apesar de saber que Einstein não era um dos melhores em sua disciplina, sabia do potencial do garoto tinha, passou, então, a aconselhá-lo e orientá-lo e tornaram-se amigos.

Chega o ano de 1891 e Albert finalmente completa o primário, sem muitos louvores, mas para seu pai já estava bom, já que as notas do filho não era as melhores, Hermann viu a formatura como uma coisa boa. Passa a estudar na escola no Ginásio Luitpold, as coisas não mudam muito de uma escola para outra, exceto pelo amigo que agora não vera com tanta frequência, mas um fato muda sua vida nesse período. Uma bela tarde, um amigo de Hermann fazia uma visita a família Einstein, ao ir embora esquece sobre a mesa um livro de geometria e matemática, Albert com curiosidade pega o livro e leva-o para o quarto, em pouco mais de uma semana, o garoto já tinha lido e relido o livro, ascendia-se uma chama que jamais se apagaria em Albert, a geometria e a matemática.

Em meados do ano de 1894, as coisas no negócio da família estavam ficando ruins, a oficina dos irmãos Hermann e Jakob não era mais a mesma. Diante da situação Hermann decide mais uma vez mudar-se, dessa vez para Milão, Itália. No entanto, a família agora terá que ir incompleta, Albert ainda não terminara o Ginásio e seu pai decide por deixá-lo em Munique para terminar seus estudos. O velho Hermann preocupava-se bastante com os estudos dos filhos. Agora Albert ficara sem a família, sem a oficina do pai, onde passava grande parte do tempo concertando e construindo coisas e sem suas aulas de violino ministradas por seu tio Jakob, nas quais encontrou

¹⁰ Palavra em inglês que dá nome a prática de atos de agressão física e psicológica, intimidação, humilhação de forma repetitiva e constante contra um indivíduo que não foi aceito em determinado grupo.

grande conexão com a música. Mas ainda ficava herr Reuss, seu velho amigo e conselheiro.

Albert finalmente termina o Ginásio em 1895 e com todas as permissões necessárias viaja para Itália para encontrar sua família e evitando o alistamento obrigatório nas forças armadas alemãs. Albert passa um período de férias dos estudos junto à sua família, época em que decide realizar os exames de admissão para o Instituto Politécnico Federal de Zurique, mas infelizmente acaba por ser reprovado nos exames de admissão e acaba frequentado a Escola Cantonal de Aarau, onde fica hospedado na casa de um de seus professores, Jost Winteler, e tendo aí vivido um dos anos mais felizes de sua vida. Albert, quando não conseguiu a admissão para o Instituto Politécnico Federal de Zurique, tinha dois anos a menos de idade que a idade tida como convencional para ingresso na instituição.

No ano seguinte, presta novamente exames para o Instituto Politécnico Federal de Zurique, dessa vez com sucesso. Nessa mesma época, conhece a mulher por quem iria se apaixonar e futuramente se casar, Mileva Maritsch, ela era a única mulher da turma de Einstein no Instituto Politécnico Federal de Zurique e a segunda mulher a terminar o curso no Departamento de Matemática e Física da instituição. Mileva nasceu em 1875 na cidade de Titel, na atual Sérvia, ainda parte do Império Austro-Húngaro, era a filha mais velha de um oficial do Governo do Império Austro-Húngaro, Miloš Marić e sua esposa, Marija Ružić-Marić.

Durante o curso em física e matemática, Albert ausentava-se muitas vezes das aulas, preferia ficar trabalhando no laboratório ou estudando por outros livros de Física mais recentes. Conhece Marcel Grossmann, estudante com o qual faz grande amizade, ficando a depender dos apontamentos e notas feitas pelo seu colega e amigo, as quais utilizava para se preparar para os exames. Albert queixava-se várias vezes dos programas de algumas das disciplinas de Física que na sua opinião eram pouco atuais. Fato esse que não lhe rendeu bons frutos, este comportamento comprometeu a sua relação com alguns dos seus professores vindo a prejudicá-lo quando procurou uma posição acadêmica na Instituição após sua graduação em 1900.

Em 1902, consegue finalmente um trabalho como examinador de 3ª classe na Repartição das Patentes de Berna, Albert tinha se naturalizado suíço um ano antes. No ano de 1903 casa-se com Mileva, após fortes objecções dos pais dela e apesar da religião, antes de se casarem, tiveram uma filha da qual chamaram Lieserl, que

aparentemente nunca chegou a viver com o casal, há suspeitas de que tenha sido dada para adoção, mas dela não há qualquer traço além do registo de nascimento e de uma carta que Albert escreveu para Mileva em que faz menção ao assunto. Os dois tiveram mais dois filhos, Hans Albert que nasce em 1904 e Eduard em 1910.

No período em que Albert trabalhava no escritório de patentes, estava insatisfeito com o trabalho, mas ao mesmo tempo, ele tem acesso a muitos documentos com ideias inovadoras que passa por suas mãos todos os dias. É nessa mesma época que começa a trabalhar no desenvolvimento de uma de suas mais conhecidas teorias que é tema do presente trabalho: A Teoria da Relatividade.

No dia 05 de junho de 1905, entrega à revista científica *Annalen de Physik*¹¹ o manuscrito da teoria da relatividade (Ver no anexo C, a cópia do artigo original de Albert Einstein escrito em Alemão), que vem a ser publicado com o título de *Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento* e depois de ter publicado alguns artigos sobre mecânica estatística numa das revistas científicas com maior prestígio na época, o jovem oficial das patentes submete quatro artigos cruciais para publicação na mesma revista, em 1905: o primeiro propondo a hipótese dos quanta de luz¹², o segundo sobre o Movimento Browniano¹³ cujas leis contribuíram para o reconhecimento da realidade física dos átomos, o terceiro sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento que introduz a teoria da relatividade restrita e o último sobre uma consequência importante desta teoria, a inércia da energia ou $E = m \cdot c^2$, talvez a equação mais famosa da história da física (CRAWFORD, 2005, p2).

Com a publicação de seu primeiro artigo sobre a relatividade, inicialmente, seu trabalho despertou pouca atenção entre os físicos, apenas vários meses após a sua publicação é que Albert teve a primeira reação, a qual sob a forma de uma carta de Max Planck que já era um cientista renomado. As ideias de Einstein começaram a ser divulgadas sobretudo graças aos esforços de Planck, que as expôs em meio à comunidade científica.

Todavia, a relatividade de Einstein só começou a ganhar notoriedade por outros cientistas com a ajuda de Hermann Minkowski, que fora professor de Einstein no Instituto Politécnico Federal de Zurique, que a mencionou quando proferiu a sua

¹¹ Um dos periódicos mais antigo e conhecido de Física, está desde 1790 publicando artigos originais de Física experimental, teórica, aplicada e matemática e áreas afins.

¹² Conhecido atualmente como Fótons, considerando a luz como uma energia quantizada, esses quanta de luz são a menor porção dessa radiação eletromagnética.

¹³ O movimento não ordenado de partículas em suspensão num fluido.

famosa palestra Espaço e Tempo no dia 21 de setembro de 1908 numa conferência de cientistas alemães de diversas áreas.

Com o sucesso da Teoria da Relatividade, começa a surgir para Albert algumas oportunidades, entre elas o cargo de professor de física na Universidade de Berna na Suíça. Em contra partida, brigas familiares consomem parte de seu foco, o casamento com Mileva já não era mais o mesmo e entra em uma terrível crise. O período de tormenta iniciou por volta do ano de 1907, quando o casal tem apenas um filho. Mesmo em meio a anos de instabilidade, Mileva acaba engravidando outra vez, em 1910, dando à luz a outro filho do casal, ao mesmo tempo, Albert recebe e assume a cadeira de física do Instituto Politécnico Federal de Zurique. Logo em seguida, transfere-se para Praga, ao aceitar a sua nomeação como diretor do Instituto de Física Teórica na Universidade alemã de Praga, onde passa a lecionar na Universidade da capital tchecoslovaca.

Os anos que se seguem a partir de então na vida de Albert são bastantes importantes, ele retorna ao Politécnico Federal de Zurique em 1912, mas não diferente da outra vez, fica pouco tempo. No ano seguinte volta a mudar de Universidade, aceitando o convite irrecusável, de Max Planck e Walther Nernst, para se juntar a eles na Universidade de Berlim, no início de 1914.

Sua vida como profissional ia bem, estava sendo reconhecido pelo seu trabalho, as oportunidades iam surgindo uma melhor que a outra. Contudo, sua família parece se dissolver diante de seus olhos e acaba por se separar de Mileva pouco tempo antes de se transferir para a Universidade de Berlim e de se tornar membro da Academia de Ciências Prussiana.

Surge a figura de Elsa Rudolph filha de Rudolf Einstein e Fanny Einsteine e que nasceu em Hechingen, na Alemanha, em 18 de janeiro de 1876. Elsa e Albert eram primos de primeiro grau e o fato de serem familiares não foi problema para que os dois se casassem. Os dois já mantinham um relacionamento em segredo desde de 1912 quando Albert ainda era casado com Mileva, para muitos esse foi o motivo da separação do casal posteriormente.

No estopim da primeira guerra mundial, Albert se mostra contra a guerra e recusa-se a assinar um manifesto balista a favor da Primeira Guerra Mundial. A guerra fez com que alguns planos dele fossem deixados de lado, pelo menos por enquanto. Os efeitos da guerra foram avassaladores, muitos dos cientistas amigos de Albert

estavam a favor da guerra e estavam a unir forças para melhorar as técnicas e armas de combate, mas Albert sempre se mostrou ir contra a catástrofe.

Mesmo com os efeitos da guerra, ele consegue em 1916 publicar a Teoria da Relatividade Generalizada, que completa o sucesso da primeira obra. Tendo quase que de maneira imediata uma repercussão gigantesca no meio acadêmico mesmo com a uma guerra em andamento. Em 1918 a guerra chega ao fim com a derrota da Alemanha, que sofre várias sanções e abala ainda mais a comunidade científica da época.

Uma guerra de dimensão mundial chega ao fim e seus efeitos aos poucos vão se revelando, o mundo tenta se reergue novamente e aos poucos tudo parece voltar a seu lugar. Os anos caminham até chegar 1921, ano muito importante para vida de Albert, foi o ano em que foi agraciado com o Nobel de física. Apesar de ser mais conhecido pela sua famosa equação, $E = m \cdot c^2$, foi premiado por suas contribuições à física teórica e, especialmente, por sua descoberta da Lei Do Efeito Fotoelétrico¹⁴, que foi fundamental no estabelecimento da teoria quântica.

Toda a premiação do Nobel Albert deixou à sua ex-mulher e aos filhos. Ao se divorciarem, os dois concordaram que caso Albert ganhasse o Prêmio Nobel, Mileva ficaria com o dinheiro da premiação. Ele recebeu o prêmio no campo da Física em 1921, quando estava separado da primeira mulher há quase dois anos e já estava em outro relacionamento. Quando Albert fez seu testamento e deixou o dinheiro do prêmio aos filhos, acredita-se que Mileva tenha ameaçado revelar sua participação nos trabalhos dele, diante disso, o cientista teria aconselhado Mileva a ficar calada em troca da premiação paga a ele. Apagar da história e da ciência mulheres brilhantes como Mileva não ajuda no trabalho de demonstrar que mulheres são tão capazes quanto os homens (GAGNON, 2018.)

Os anos seguintes, pareciam demonstrar que tudo estava se organizando, mas não passava de simples ilusão. Começava a criar vida na Europa um período sombrio de perseguição e intolerância, o Nazismo na Alemanha e o Fascismo na Itália ganhavam força e forma, Adolf Hitler e Benito Mussolini chegavam ao poder. A perseguição aos judeus se acentua como nunca visto antes, principalmente na

¹⁴ Fenômeno que ocorre quando a luz incide sobre uma superfície e a sua energia arranca elétrons do material.

Alemanha Nazista e Albert começa a sofrer discriminações e violências pelo simples fato de ser judeu. Vale ressaltar que Albert tinha retornado a ser cidadão Alemão.

No início da década de 30, ele começa uma série de viagem aos Estados Unidos passando inclusive pelo Brasil onde pronuncia duas conferências, uma na Academia Brasileira de Ciências e outra no Clube de Engenharia do Rio de Janeiro. No ano de 1933 Hitler chega ao poder na Alemanha e esse fato obriga Albert a se mudar de vez para os Estados Unidos, tornando-se, inclusive, cidadão americano. A nova Grande Guerra começa a ganhar forma.

Os rumores de uma segunda grande guerra aumentam e Albert se vê pressionado por outros cientistas a escrever ao Presidente dos Estados Unidos, Franklin Delano Roosevelt, no intuito de informa-lo de que os alemães poderiam construir uma Bomba Atômica, mais tarde começaria o Projeto Manhattan¹⁵, mas não se pode afirmar que o financiamento desse projeto teve ajuda ou influência direta de Einstein, já que o mesmo já havia se mostrado pacifista. Vale salientar, também, que a pressão dos outros cientistas para que Albert escrevesse ao presidente não demonstra que ele tenha participado do projeto, foi o contrário disso, ele se recusou a colaborar com as pesquisas para a construção da arma. Nesse mesmo período, Elsa adoece e desenvolve problemas cardíacos e renais vindo a falecer em 1936. Isso faz com que Albert se dedique mais aos seus estudos.

Com a entrada dos Estados Unidos na guerra em 1942, a caminhada americana em direção a Bomba Atômica acelera. No ano de 1942, Fermi realiza a primeira experiência de reação atômica em cadeia e a partir desse período começam os trabalhos para construção da arma que aconteceu em Los Alamos sob a direção de Julius Robert Oppenheimer. No ano 1945, é testada a primeira arma nuclear da história no deserto de Alamogordo. Albert juntamente com outros cientistas se manifestam para o não uso da avassaladora arma, porém sem sucesso, e dia 6 e 9 de agosto a bomba é lançada sobre as cidades de Hiroshima e Nagasaki.

Mesmo sendo contrário ao uso da arma nuclear Albert defendeu Oppenheimer das acusações de traição aos outros colegas cientistas e escreve um manifesto contra o uso das armas nucleares. Albert passa então a viver quieto e solitário, mal recebe visitas, tendo uma vida rotineira e pacífica, alienando-se dos problemas científicos.

¹⁵ Projeto de pesquisa, liderado pelos Estados Unidos, para desenvolvimento de bombas atômicas no período da Segunda Guerra Mundial.

Morre durante a manhã do dia 18 de abril, no Hospital de Princeton à 1h15 da manhã, com 76 anos de idade, tendo continuado a trabalhar até quase o fim de sua vida e deixando a Teoria do Campo Unificado incompleta.

Uma curiosidade é que seu cérebro foi guardado após sua morte, foi dessecado cerca de 240 vezes, sendo objeto de estudo, todos queriam entender como funcionava sua mente brilhante.

3.2 RELATIVIDADE DE EINSTEIN

No início do século XX, vimos nos tópicos anteriores que a comunidade científica da época passava por um período em que se acreditava que a luz tinha natureza corpuscular, se comportando como partícula, como também ondulatória, assumindo o papel de uma onda que se propagava através do éter. Ninguém sabia de certo o que éter era ou quais suas características nem muito menos conseguiam detectá-lo, mas pensavam que toda onda precisava de um meio para se propagar, pois até então o pensamento mecanicista das ondas dominava. Assim, deveria haver algo que servisse como meio material para que a luz se propagasse.

Também, vimos que no fim do século XIX, diversos experimentos tentaram detectar o éter, como o experimento de Michelson e Morley, que usava o movimento de translação da terra tomando o éter como referencial, mas tudo que conseguiram demonstrar foram resultados negativos para a existência do éter. Na prática, o éter era impossível de detectar.

Uma das áreas de maior importância para a Física é sem dúvida a Teoria da Relatividade imaginada por Albert Einstein e lapidada por outros nomes já citados no decorrer dos acontecimentos mostrados nos tópicos anteriores. Nessa teoria da Física, ela vai dedicar-se ao estudo, basicamente, das diferenças que existem entre as medidas físicas realizadas em referenciais diferentes em movimento relativo, inclusive em referenciais que estão se movendo um em relação ao outro, tema bastante discutido no início do ano de 1905 entre os cientistas. A chave aqui é a observação e a relação entre os valores medidos de acordo com cada referencial utilizado, por isso o nome relatividade (HALLIDAY e RESNICK. 2016).

A Teoria da Relatividade é formada a partir de duas outras teorias, a Restrita e a Geral. A Teoria da Relatividade Restrita que se aplica apenas aos referenciais inerciais, isto é, que estão em movimentos relativos retilíneos e uniformes ou em

repouso. Um referencial inercial é, basicamente, aquele em que as leis de Newton são validas, se um corpo não está submetido a ação de forças externas, então, quando ele é observado a partir de um referencial inercial, ele fica parado ou se move em linha reta, com velocidade constante. E a Teoria da Relatividade Geral que se aplica às situações mais amplas e complexas nas quais os referenciais podem estar se movendo de qualquer modo, inclusive, podem estar acelerados ou girando uns em relação aos outros, nesse caso, referenciais não inerciais se aproximado ou se distanciando com uma velocidade qualquer (MARTINS, 2016). A teoria da relatividade restrita foi proposta por Einstein a partir de dois importantes postulados, ou seja, princípios que são tomados como ponto de partida e que não são provados pela própria teoria. Esses dois postulados são:

Postulado 1 – Princípio da Relatividade: as leis da Física são as mesmas em todos os sistemas de referência inercial.

Postulado 2 – Princípio da Constância da Velocidade da luz: a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor para qualquer referencial inercial, $c = 200.792.458 \text{ m/s} \cong 300.000.000 \text{ m/s}$.

Partindo de dois postulados aparentemente simples, Einstein surpreendeu o mundo científico ao mostrar que as velhas ideias a respeito da relatividade estavam erradas, embora todos estivessem tão acostumados com elas que pareciam óbvias. O fato de parecerem óbvias era uma consequência do fato de que estamos acostumados a observar corpos que se movem com velocidades relativamente pequenas. A teoria da relatividade de Einstein, que fornece resultados corretos para todas as velocidades possíveis, previa muitos efeitos que, à primeira vista, pareciam estranhos justamente porque ninguém jamais os havia observado. (HALLIDAY e RESNICK. 2016. p.320)

Einstein revolucionou o mundo ao afirmar que o espaço e o tempo estão conectados, de forma bem simples ele afirmava que o intervalo de tempo entre dois eventos depende do espaço que os separa. O contrário também é verdadeiro, o espaço que separa dois eventos depende do intervalo de tempo os separa. Um evento pode ser qualquer coisa que venha a acontecer. Com isso, pode-se concluir que o tempo não passa em uma taxa fixa, essa taxa é ajustável e se adequa ao movimento relativo. Parece ser algo impossível, mas atualmente se usa a relatividade em inúmeras ferramentas e objetos da vida cotidiana como o GPS e TVs CRTs.

3.3 ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DA TEORIA DA RELATIVIDADE

De acordo com MARTINS (2016), a partir dos dois postulados da Teoria da Relatividade, são deduzidas algumas consequências listadas abaixo como exemplo.

Contração dos Objetos: Se dois corpos de tamanhos iguais estão inicialmente em repouso e depois um deles é colocado em movimento em relação ao outro, suas dimensões já não serão mais iguais. Cada um deles parecerá menor quando medido de um referencial parado em relação ao outro. É importante salientar que a contração só será observada nas dimensões do corpo que são paralelas ao movimento. Esse efeito pode ser representado pela equação (3.1) abaixo, onde l' é o comprimento final do objeto, l é o comprimento inicial, v é velocidade de um referencial em relação ao outro e c é a velocidade da luz. É possível conferir o desenvolvimento desta equação no apêndice D.

$$l' = l \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (3.1)$$

Dilatação do Tempo: Se dois relógios têm o mesmo período, funcionando sincronizadamente, quando estão parados um em relação ao outro e um deles é colocado em movimento em relação ao outro seus períodos já não serão mais iguais. Cada um deles parecerá estar andando mais lentamente quando medido de um referencial parado em relação ao outro. Esse efeito pode ser representado pela equação abaixo (3.2), onde t é o período do relógio parado em relação ao referencial e t' é o período do relógio em movimento. É possível conferir o desenvolvimento desta equação no apêndice E.

$$t' = t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (3.2)$$

Simultaneidade: Dois eventos que ocorrem num mesmo instante em um dado referencial são ditos simultâneos nesse referencial. Entretanto, uma das consequências da relatividade é que esses eventos não são, em geral, simultâneos em outros referenciais. Em outras palavras, a simultaneidade de eventos depende do referencial de observação.

Velocidade Limite: A velocidade da luz não depende do referencial. Ela é a velocidade mais alta que se pode obter.

Violação da causalidade: Se fosse possível enviar sinais controláveis, por exemplo, vozes ou textos codificados, de um ponto para outro com velocidade superior à velocidade da luz no vácuo, os sinais seriam recebidos antes de serem emitidos, em relação a um certo conjunto de referenciais. Ocorreria uma inversão temporal, ou violação da causalidade, porque o efeito de recebimento do sinal ocorreria antes da sua emissão

Aumento da massa com a velocidade: Se dois objetos têm a mesma massa quando estão parados um em relação ao outro e um deles é colocado em movimento em relação ao outro, suas massas já não serão mais iguais. Cada um deles parecerá ter aumentado de massa, quando medido de um referencial parado em relação ao outro. Esse efeito pode ser representado pela equação (3.3), onde m é a massa do objeto parado em relação ao referencial e m' é a massa do objeto em movimento. Consultar o livro Curso de Física Básica Volume 4. Ótica, Relatividade e Física Quântica, H. Moysés Nussenzveig, edição 4, capítulo 6.

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (3.3)$$

Relação entre massa e energia: A massa de um objeto é proporcional à sua energia. Se a energia de um objeto aumentar, como por exemplo, se a temperatura desse objeto aumentar, a sua massa também sofrerá um aumento correspondente. Essa relação é representada pela famosa equação abaixo. Ver apêndice F.

$$E = mc^2 \quad (3.4)$$

Adição de velocidades: A lei de adição de velocidades da física clássica não é mais válida. Suponhamos três objetos A, B, C em movimento sobre uma mesma reta. De acordo com a física clássica, a velocidade v de C em relação a A é igual à soma algébrica da velocidade V de C em relação a B com a velocidade v' de B em relação a A, ou seja: $v = V + v'$. No caso da teoria da relatividade, a adição de velocidades obedece a uma equação mais complexa representada abaixo. Ver apêndice G.

$$v = \frac{V + v'}{1 + \frac{V \cdot v}{c^2}} \quad (3.5)$$

A teoria da relatividade não nasceu do estudo da mecânica, mas sim dos estudos do eletromagnetismo. As equações fundamentais do eletromagnetismo, conhecidas como Equações de Maxwell, foram apresentadas inicialmente como leis

que se aplicavam apenas aos estudos observados de um referencial em repouso em relação ao éter. Com o fracasso das experimentações para detectá-lo, onde se tentava se aproveitar do movimento de translação da terra em relação ao éter para verificar sua existência através de experimentos ópticos, foi necessário tornar o eletromagnetismo independente de um referencial privilegiado como o éter para que suas equações não fossem alteradas. Também, foi necessário introduzir algumas relações entre as grandezas eletromagnéticas medidas em relação a diferentes referenciais.

A relatividade também afeta a Mecânica Clássica, as leis de Newton não sofreram grandes alterações, porém outras equações sofreram. A relatividade afeta todos os outros ramos da física. A existência de uma área da física que não obedecesse a teoria da relatividade, como por exemplo, os estudos dos fenômenos térmicos, seria afirmar que haveria a possibilidade de detectar o éter através dos estudos desse fenômeno. Como não se acredita em nenhuma forma de detectá-lo conclui-se que todas as áreas da física obedecem ao princípio da relatividade, caso não a obedeçam, torna-se necessário alterar suas leis de modo que tenham a mesma forma em todos os referenciais inerciais.

3.4 O FIM DO ÉTER

Vimos anteriormente que o éter era o meio imaginado para que a luz se propagasse, já que o conceito de ondas eletromagnéticas ainda não tinha se estabelecido, assim, a luz era considerada uma onda mecânica. Porém, o termo éter aparece muitas vezes ao longo da história com significados diferentes.

Na Grécia antiga, o próprio Aristóteles já tinha usado o termo éter, ele acreditava que os corpos terrestres eram formados a partir de quatro elementos principais: a água, o fogo, a terra e o ar. Tudo na terra era formado desses elementos de acordo com Aristóteles, mas ele também pensava na existência de um quinto elemento, esse novo elemento seria o responsável por formar os corpos celestes, este que ele chamou de éter.

Depois foi a vez de Descartes, ele também usou o termo éter para nomear a substância que preenchia os espaços entre os corpos celestes e que com isso o éter desempenhou papel fundamental na Mecânica Cartesiana que, mais tarde, veio a ser substituída pela mecânica de Isaac Newton.

Então podemos pensar que o termo éter é utilizado para nomear aquilo que não se sabe o que é, assim, assumindo muitos significados no decorrer da história. O éter apareceu outra vez no decorrer do século XIX, o desenvolvimento da óptica e do eletromagnetismo implanta na Física um novo éter. Com o surgimento da teoria ondulatória da luz, parecia indiscutível que ela deveria ser interpretada como uma onda em um meio inerte de características próprias pois a nova teoria ondulatória da luz exigia a existência de um meio que transportasse as ondas luminosas. Esse éter, segundo Fresnel, preencheria todo o espaço que não contém matéria e também penetraria nos objetos. Para explicar as ondas transversais, o éter era considerado como um sólido elástico, e não um fluido, o que trazia a dificuldade de compreender como os objetos podem se mover através dele (MARTINS, 2010).

Muitas foram as tentativas de detectar esse meio. Como por exemplo, o experimento citado anteriormente de Michelson-Morley foi uma delas, contudo todas elas sem sucesso. Somente em 1905 com a teoria da relatividade de Einstein, o éter se tornou desnecessário, isso porque com a Teoria da Relatividade não precisava mais dele para a compreensão da propagação da luz.

Einstein propôs excluir o éter da física já que esse era impossível de ser detectado. Então, retirou o éter, que suportava as ondas eletromagnéticas e passou a considerar que ele poderia existir no vácuo absoluto, as ondas eletromagnéticas, agora, poderiam assim ser conservadas. A energia dessas ondas estaria suportada pelo nada, em vez de estar armazenada no éter.

À medida que ia desenvolvendo sua teoria, Einstein começou a mudar sua atitude em relação ao espaço. No dia cinco de junho de 1920, Einstein realizou uma palestra em Leyden, Holanda, intitulada *Éter e a Teoria da Relatividade*. Nesta palestra Einstein apresenta o conceito de éter, sua evolução histórica e o impacto das suas Teorias da Relatividade Restrita e Geral nos conceitos clássicos. Ele apresenta uma discussão epistemológica do conceito de éter traçando um paralelo que leva o leitor à apresentação do conceito einsteiniano.

Einstein se contrapõe ao conceito abstrato herdado dos gregos e a visão mecanicista que não se conciliava com a visão eletromagnética ainda incapaz de unificar o entendimento das grandes visões da física do século XIX, a mecânica e o eletromagnetismo. Ao final de sua palestra, ele afirma que o éter é desnecessário, mas este ainda poderia ser citado como *Éter da Teoria da Relatividade*, assumindo

novo conceito para o mesmo, esse passaria a ser as características do espaço-tempo. Assim expressou Albert Einstein:

Recapitulando, podemos dizer que de acordo com a Teoria Geral da Relatividade, o espaço é dotado de qualidades físicas; nesse sentido, portanto, existe um éter. (...) Mas este éter não pode ser pensado como dotado da qualidade característica de meio ponderável, como consistindo de partes que podem ser rastreadas através do tempo. A ideia de movimento pode não ser aplicada a ele (EISTEIN, 1920, p. 380).

Pode-se concluir, então, que Einstein não admite a existência do éter, admite sim sua estrutura espaço-tempo como uma espécie de éter. Em nenhum momento Albert Einstein se desfez das suas teorias, contudo ele afirma que as considerações de um meio como éter devem ser voltadas, com a evolução da ciência, para os conceitos de física quântica. A Teoria da Relatividade Geral fez com que Einstein retrocedesse ao éter, mas apoiou-se em argumentos antigos.

4. MINKOWSKI E A QUARTA DIMENSÃO

Se alguém perguntar à uma pessoa em que direção ela voaria se ela pudesse voar, provavelmente ela responderia em todas direções que ela pudesse ir, isso quer dizer para direita, esquerda, a cima, a baixo e diagonais. Em qualquer direção ela poderia se deslocar, era preciso somente desejar e ir. Essas múltiplas escolhas podem ser representadas de forma simples através de um gráfico que tenha todas as opções de direções que essa pessoa pode tomar, isto é, qualquer lugar no espaço que ela ocupe, vai existir um conjunto de coordenadas que vai localizar sua posição exata no espaço. Para essa situação em partícula, temos três direções possíveis das quais pode-se obter qualquer ponto no espaço, um eixo da esquerda para direita, um de frente para atrás e um de cima para baixo.

Essas três dimensões parecem ser óbvias e as únicas existentes, mas elas não são as únicas. Existe uma quarta dimensão que assim como as outras três tem uma grande importância, embora ela seja pouco conhecida se comparadas com as outras três. A sua compreensão exige um pouco mais de imaginação. Essa dimensão é o tempo.

As pessoas estão a todo momento observando o avançar do tempo, e isso parece claro e fácil de entender, mas o tempo, assim como os exemplos citados acima, também é uma dimensão como as outras. Isso quer dizer que vivemos em um universo de quatro dimensões ou quadrimensional, ou ainda se preferir, três dimensões espaciais mais uma dimensão temporal.

Para entender a dimensão temporal vamos considerar o seguinte, uma pessoa que se encontra na superfície da terra possui apenas duas coordenadas para sua localização, a essas coordenadas damos o nome de longitude e latitude. Para saber sua localização só precisamos dessas duas informações, sua localização que vai do eixo Norte-Sul e sua localização no eixo que vai de Leste-Oeste do planeta. O ponto formado em um gráfico cartesiano entre essas duas coordenadas será a localização da pessoa no solo terrestre.

Também, vale ressaltar que se duas pessoas possuírem as mesmas coordenadas nos dois eixos citados anteriormente, não necessariamente quer dizer que elas estejam ocupando o mesmo ponto na terra, isso por que uma pode estar em cima da outra, em um helicóptero por exemplo, ou abaixo, em um túnel subterrâneo, lembre-se que no momento só temos duas dimensões, Norte-Sul e Leste-Oeste, um sistema bidimensional. Para deixarmos o sistema ainda mais preciso o ideal é colocar mais uma dimensão, outro eixo que vai fazer a função de localizar a posição quando algo estiver “em cima” ou “em baixo”, formando um eixo Cima-Baixo.

Assim, pode-se concluir que dois corpos diferentes que estejam no espaço e que possuem as três coordenadas espaciais iguais estão ocupando o mesmo espaço. Todavia, mesmo tendo as mesmas coordenadas tridimensionais iguais eles podem não estar sobrepostos. Isso, porque para descrever um evento de forma precisa é necessário levar em consideração também o determinado momento que o evento aconteceu.

Dois automóveis que têm as mesmas coordenadas espaciais, e essas forem exatamente as coordenadas de um certo ponto de uma avenida movimentada, não podemos afirmar com certeza se esses automóveis colidiram sem levar em consideração a quarta dimensão do tempo, isso porque o primeiro carro pode ter ocupado esse espaço às 11:33 de uma manhã, e o outro pode ter ocupado esse mesmo espaço às 11:36 da mesma manhã. Desse modo, para descrever precisamente um evento o tempo que ele acontece é necessário.

Embora esse raciocínio pareça um pouco óbvio, ele não se mostrou tão relevante no meio científico até Einstein apresentar a teoria da Relatividade, onde a comunidade científica passou a pensar sobre a simultaneidade. Mencionada anteriormente na sessão 3.2.

Para exemplificar a simultaneidade considera-se uma situação hipotética. Duas pessoas estão prestes a viajar, uma se encontra na cidade X e seu destino é a cidade Y, a outro se encontra na cidade Y e seu destino é a cidade X, sabe-se que existe apenas uma única estrada que liga as duas cidades e que os dois viajantes saíram no mesmo horário rumo a seus destinos, podemos entender que em um determinado trecho do trajeto eles irão encontrar-se e nesse momento eles vão possuir as mesmas coordenadas espaciais, e também, no mesmo tempo, em outras palavras, para que ambos cheguem a seus respectivos destinos será necessário um momento em que cada um dos carros ocupe o mesmo local ao mesmo tempo. Se tratando da Teoria da Relatividade, a esse evento dar-se o nome de simultaneidade, momento que todas as coordenadas espaciais e temporais de dois corpos irão ser iguais.

Apesar de Einstein ser idealizador da teoria da relatividade, não foi ele o responsável por unir espaço e tempo de forma singular e inseparável. Esse feito foi idealizado pelo seu ex-professor, Hermann Minkowski, que descobriu o quão inseparáveis essas duas grandezas são. Minkowski também foi responsável por tornar a teoria da relatividade mais conhecida ao apresentá-la em uma palestra para cientistas de outras áreas como mencionado no capítulo anterior.

Figura 15: Hermann Minkowski.



Fonte: <https://library.ethz>.

Hermann Minkowski foi um matemático alemão de ascendência judia-lituana que nasceu em 22 de junho de 1864, na região de Aleksotas, um subúrbio de Kaunas,

parte do então Império Russo e atual Lituânia. Criou e desenvolveu a geometria dos números e usou métodos geométricos para resolver problemas difíceis em teoria dos números, matemática e Teoria da Relatividade.

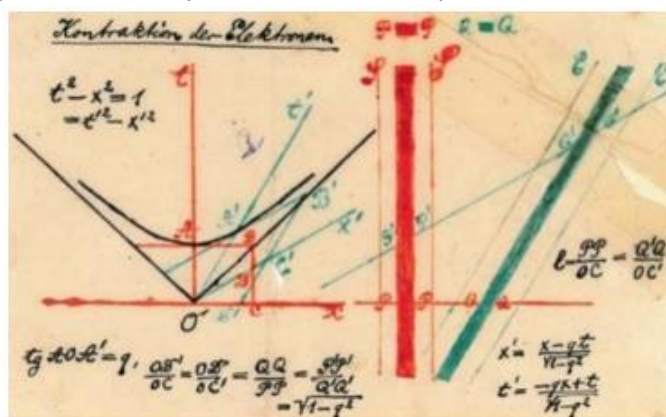
Diferentemente do que se costuma pensar, Einstein não foi o responsável pela introdução da interpretação quadridimensional do espaço com o tempo como a quarta dimensão. Quem introduziu a abordagem quadridimensional da Teoria da Relatividade foi Poincaré, em um trabalho no ano de 1906, e quem a completou brilhantemente foi Hermann Minkowski, em 1907, segundo MARTINS (2015). Tanto Poincaré quanto Minkowski não estavam envolvidos com a teoria de Einstein, de 1905, nessa época, tanto Lorentz quanto Poincaré e outros físicos já estavam buscando uma teoria da relatividade para o eletromagnetismo devido a várias inconsistências teóricas e experimentais ligadas à eletrodinâmica dos corpos.

Minkowski percebeu que a Teoria da Relatividade Especial de Einstein poderia ser melhor compreendida em um espaço de quatro dimensões onde tempo e espaço não são grandezas distintas, mas misturadas em um espaço-tempo de quatro dimensões, no qual a geometria de Lorentz da relatividade especial pode ser representada.

Segundo MILLER (1998), Minkowski havia ficado bastante interessado com o trabalho de Poincaré e dando continuidade as pesquisas, ele interpretou de forma geométrica as transformações de Lorentz, agregando à relatividade do tempo de Einstein aos invariantes em um espaço quadridimensional.

As suas ideias principais foram apresentadas ao mundo pela primeira vez em dois seminários. O Espaço e Tempo em 1908 e publicado em 1909 e o Princípio da Relatividade apresentado em 1907 e publicado em 1915 após sua morte. Foi na palestra de 1907 que ele expôs pela primeira vez sua representação geométrica apresentada na figura 16 abaixo (GALISON, 1979).

Figura 16: Fotocópia do Slide utilizado por Minkowski em 1907.



Fonte: <https://researchgate.net>.

De acordo com MILLER (1998), baseado nos trabalhos de Poincaré e Lorentz juntamente com as contribuições dos trabalhos de Einstein, Minkowski preparou uma estrutura para a imagem do mundo em um plano quadridimensional do espaço tempo. Porém em seu mundo essa estrutura matemática passou a significar bem mais que uma reformulação da relatividade, a geometria do espaço acabou ganhando realidade física (GALISON, 1979). Em seu mundo de quatro dimensões, o éter foi desmaterializado e substituído por pontos no espaço-tempo relativístico. Nessa nova concepção os únicos elementos absolutos são a velocidade da luz e os intervalos de espaço temporais (MILLER, 1997).

Minkowski foi além de sua teoria geométrica da relatividade, indo em direção a uma concepção mais ampla e filosófica de mundo. Seu ponto de vista metafísico da teoria do espaço tempo, conhecida como Teoria do Mundo Absoluto, envolve dois conceitos físicos muito importantes, a covariância e a invariância. A invariância está relacionada com as grandezas escalares que se mantêm constantes em qualquer sistema, como por exemplo a velocidade da luz. Já a covariância, está relacionada a manutenção da forma das equações físicas ao serem transformadas de um referencial para outro, ou seja, a forma de uma equação covariante permanecer a mesma para quaisquer sistemas inerciais de referência (GALISON, 1979).

O próprio Einstein utilizou os trabalhos de Minkowski para desenvolver sua Teoria da Relatividade Geral, seu trabalho foi fundamental para o desenvolvimento dessa teoria. Poincaré também foi ferramenta fundamental, já que Minkowski tomou como partida os trabalhos dele para formular seu estudo do espaço-tempo. Einstein anos depois reconheceu a importância de Minkowski para o desenvolvimento de sua teoria e por seus trabalhos que o ajudaram a desenvolver a relatividade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ciência moderna que conhecemos hoje é fruto do esforço de inúmeros homens e mulheres que dedicaram suas vidas ao conhecimento científico, alguns destes são figuras bastante conhecidas, enquanto outros permanecem no anonimato até os dias de hoje. Neste último século, o conhecimento científico transformou-se em todos os seus aspectos, tanto no sentido do micro quanto no do macro. Teorias como a Relatividade tem-se tornado suporte para a produção de novos trabalhos abrindo os horizontes científicos e ampliando o conhecimento do homem.

A Teoria da Relatividade proposta por Albert Einstein, no ano de 1905, teve suas origens no decorrer do século XVI nas mãos de Galileu Galilei, considerado pai da ciência moderna, e foi uma grande evolução para a ciência de sua época, ela provocou transformações, quebrou paradigmas, mudou conceitos, serviu de base para outras teorias e ajudou a explicar aquilo que parecia, naquele momento da história, inexplicável.

Tais avanços proporcionaram ao ser humano, nas últimas décadas, vivenciar uma enorme evolução científico-tecnológica, onde talvez, nunca na história da humanidade, tenha se acumulado tanto conhecimento como nos últimos 100 anos. Podemos citar, por exemplo, a descoberta de novas partículas e antipartículas, a construção de aceleradores de hádrons cada vez mais potentes, o envio de robôes e sondas a outros planetas, a comprovação das ondas gravitacionais, os avanços que revolucionaram o estudo do DNA dos ancestrais dos seres humanos, a descoberta de novos exoplanetas, fosseis e pinturas antigas são datadas com cada vez mais precisão, a detecção do Bóson de Higgs, os avanços na biologia e inúmeras viagens ao espaço. Até mesmo os fenômenos naturais como a luz do sol e das estrelas, podem ser melhor compreendidos se utilizarmos a ciência moderna.

Entretanto, é importante ressaltar que essas mudanças não se restringem apenas ao campo das ciências teóricas, isto é, elas romperam as barreiras dos laboratórios e tem atingido a sociedade como um todo, assim, transformando-a. É possível notá-las nas tecnologias que se renovam a cada dia que passa. No mundo contemporâneo, pode-se ouvir milhares de músicas em celulares que cabem na palma da mão, é possível encontrar supercomputadores cada vez menores, relógios de pulso com GPS que transmitem sua localização em tempo real, iluminação automatizada por foto sensores, compartilhar o local exato dos lugares que você mais

gosta com amigos e familiares com apenas alguns cliques na tela de seu smartphone, a medicina conta com aparelhos de ressonância magnética tão sofisticados que é possível detectar doenças antes mesmo de se desenvolverem por completo, estamos numa era onde a internet e os lasers estão possibilitando a realização de cirurgias cada vez mais complexas e a distância.

Do século XVI até os anos em que viveu Albert Einstein, a Teoria da Relatividade veio ganhando forma e se desenvolvendo nas mentes de outros autores. Ela teve seu auge nas mãos de Lorentz, Fitzgerald e Poincaré, ela não foi, e nunca será, uma teoria apenas de Einstein como a grande maioria das pessoas pensam ser. Lorentz, Fitzgerald e Poincaré tinham uma visão diferente para abordar o assunto. Eles acreditavam na existência do éter, embora soubessem da impossibilidade de detectá-lo, como foi demonstrado pelos resultados negativos do experimento de Michelson-Morley. Suas formas de abordar o assunto também eram diferentes se comparadas com a de Einstein.

Como apresentado anteriormente, quando a Relatividade é apresentada ao mundo, e estudada pelos demais cientistas de outras áreas após ganhar notoriedade com a palestra de Minkowski em 1908 e pelos esforços de Max Planck em disseminá-la, quase toda a base científica necessária para elaborá-la já estava feita, pensada e publicada na forma de artigos por outros grandes autores que contribuíram para a construção da ciência contemporânea, antes mesmo da publicação de Einstein. Não se pode esquecer também de Mileva, que apesar de pouco lembrada, teve sua parcela de contribuição na teoria de seu marido. A essência do conteúdo da teoria, abordada por todos eles, é idêntica de forma que não se consegue distinguir, por qualquer experimento ou mesmo registros da história, a interpretação de Lorentz e Poincaré da interpretação de Einstein.

Albert Einstein, no entanto, foi o responsável por unir todas as informações que ele tinha disponível e com uma visão única dos fatos elaborou a Teoria da Relatividade restrita e anos mais tarde a completou com a sua Teoria da Relatividade Geral. É importante destacar que o presente trabalho de maneira alguma tenta tirar o mérito de Einstein na formação da teoria, mas sim mostra que ela veio sendo moldada aos poucos, no transcorrer dos anos, por outros grandes autores e que ganhou sua forma final nas mãos de Albert Einstein, que brilhantemente conseguiu reunir todo aquele conhecimento já construído e acrescentou, ainda, aquilo que nele faltava para que a relatividade existisse. Assim, fazendo com que as pessoas possam saber que por trás

da Teoria da Relatividade não se encontra apenas Albert Einstein, mas um conjunto de nomes que serviram de base para que ele a elaborasse.

Os livros de história narram os grandes momentos da humanidade. Os grandes impérios que se estabeleceram no passado e que hoje são lembrados, quase sempre são atribuídos à figura de seus reis e imperadores e são colocados como conquistas ou feitos individuais de seus líderes. Esse pensamento simplista e equivocado, com o passar do tempo, foi sendo substituído por outro que traz em sua essência um ideal voltado para coletividade, em que outros personagens passam a ganhar espaço e a serem reconhecidos por suas contribuições que transformaram o mundo e a sociedade no transcorrer do tempo.

Assim, é necessário que no campo das ciências essa barreira também seja quebrada e que a figura dos grandes gênios seja desmitificada, tirando, com o passar do tempo a ideia de que eles foram os únicos responsáveis pelos grandes feitos. De forma que se faça presente o estudo de todo desenrolar histórico das teorias e de cada passo dado pela humanidade em direção ao conhecimento científico, dando crédito a todos os responsáveis por suas contribuições deixadas para a humanidade, na medida de sua participação.

Logo, o estudo da Física, bem como a história de seu desenvolvimento, deve fazer parte da formação de um cidadão para que este possa ter o pleno entendimento de como atuar no mundo repleto de inovações tecnológicas alcançadas pela ciência. A sociedade deve ter a capacidade de absorver as novidades científicas que tem surgido no decorrer dos anos, tendo o mínimo de entendimento das informações que chegam até ela, seja através de livros ou por qualquer meio de comunicação social. O estudo da Relatividade e das demais teorias, portanto, devem ser elementos básicos de entendimento para quem as pessoas possam compreender a evolução histórica da sociedade e ter um mínimo de discernimento do mundo físico que existiu e que se modificou ao longo do tempo.

Nesse sentido, o estudo da Relatividade deve ser oferecido, logo, no Ensino Médio, para que o aluno possa assimilar as divulgações científicas que chegam até ele fazendo com que o interesse pela ciência seja estimulado ainda quando jovem. Contudo, deve-se fazer uma reavaliação dos conteúdos que são trabalhados ao longo do Ensino Médio, fazendo incluir novos temas referentes a Física Moderna e História da Física. Assim, fazendo com que os alunos, em suas formações iniciais, possam entender a forma de como o conhecimento científico é formado, fazendo com que

conheçam cada etapa do processo, bem como cada autor que contribuiu para sua construção, formando jovens com o mínimo necessário de conhecimento científico que os faça compreender o mundo que os cerca e com um ideal de coletividade.

Assim também, esse trabalho deve servir, nos cursos de formação de professores de Física, como material teórico de apoio para as disciplinas que são voltadas para a Filosofia das Ciências, História da Física e até Física Moderna, para que os professores, quando formados, possam criar meios e ferramentas que auxiliem o aprendizado de seus futuros alunos em sala de aula. Bem como, deve-se estimular a criação de trabalhos voltados para o ensino com intuito de promover a divulgação de teorias científicas de forma simples e acessível a todos, relatando, explicando e dando crédito a todos os envolvidos em sua criação, para que, também, os grandes homens e mulheres da ciência, possam ser lembrados por suas contribuições para sociedade, mudando esse modo de pensar individualista para o coletivo.

Por fim, embora Albert Einstein seja amplamente reconhecido pela Teoria da Relatividade, ela não surgiu de forma espontânea em sua mente, ela veio sendo construída aos poucos por outros autores, que são, muitas vezes, totalmente esquecidos pela sociedade atual. A construção do conhecimento foi, e ainda é feita de forma gradual, coletiva e requer tempo, não é individual e instantânea, então, de fato, é preciso conhecer a história da ciência e cada capítulo dela.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, B. F. **Relatividade geral**. Orientador: Dr. Marco Moriconi. 2018. 81 f. TCC (Graduação) – Curso de bacharel em física, Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/bitstream/1/11224/1/Bernardo%20Fran%C3%A7a%20de%20Aguiar.pdf>.

Acessado em: 20 de abril de 2022.

BARROS, A., MONTE, E.M., ARAÚJO, I.G., OLIVEIRA, J.C.T. e VIEIRA, S. **Sobre a contração de Lorentz-Fitzgerald**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 4, p. 621 - 623, (2005).

BERNSTEIN, J. **Albert Einstein e as fronteiras da física**. 1ª ed. – São Paulo: Claro Enigma, 2011.

CARLESSO, P. F. **Introdução à teoria da relatividade geral**. Orientadora: Maria Emília Xavier Guimarães. 2019. 39 f. TCC (Graduação) – Curso de bacharel em física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/2565/Carlesso_Pablo_Fernando.pdf?sequence=1.

Acessado em: 15 de maio de 2021.

COSTA, F. G. C. F. **Alguns aspectos das teorias da gravidade moderna**. Orientador: Dr. Dionísio Bazeia filho. 2015. 103 f. Tese (Doutorado) – Doutorado em Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9829/2/Arquivototal.pdf>.

Acessado em: 10 de maio de 2021.

COSTA, P. C. S. **Transformações de Lorentz e seus invariantes**. Orientador: Dr. Vicente Pleitez. 2011. 37 f. TCC (Graduação) – Curso de bacharel em física médica, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2011. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/118784/costa_pcs_tcc_botib.pdf?sequence=1.

Acessado em: 23 de março de 2021.

CRAWFORD, P. **Albert Einstein: uma biografia muito breve**. Departamento de Física da FCUL e CAAUL. Ed. C8, Campo Grande, 1749-016 Lisboa, PORTUGA.

CAPPELLETTO, E. ZANOTTA, D. MATSUOKA, M. **O GPS: unindo ciência e tecnologia em aulas de física**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, n. 2, 2011.

EINSTEIN, A. **The Collected Papers of Albert Einstein: The Berlin Years: Writings, 1918-1921**. Volume 7. 1ª edição. Editora: Princeton University Press, 2002.

HALLIDAY, D; RESNICK, R; WALKER, J. **Fundamentos de física**, vol. 4: óptica e física moderna – 10ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016

LIMA, M. S. **Einstein e a teoria da relatividade especial: uma abordagem histórica e introdutória**. Porto Alegre: UFRGS, Instituto de Física, 2013. 50 p. v. 24, n. .

MARICONDA, P. R. **Galileu e a ciência moderna**. Cadernos de Ciências Humanas - Especiaria. v. 9, n.16, jul./dez., 2006, p. 267-29.

MARTINS, R. A. **A Origem Histórica da Relatividade Especial**. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 201.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**, vol. 4 – 1ª ed. São Paulo: Editora Blucher, 199.

PAIS, ABRAHAM. **Sutil é o Senhor. A ciência e a vida de Albert Einstein**. 1ª ed. Rio de Janeiro. Editora Nova Fronteira, 2005.

POINCARÉ, HENRI. **A Ciência e a Hipótese**. Brasília: Brasília. Editora UNB - Universidade de Brasília, 1988.

RAPOSO, W. L.; REIS, J. C. **A cultura da quarta dimensão no final do século XIX e início do século XX**: um conceito para além do espaço-tempo de Einstein-Minkowski. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 37, n. 2, p. 494-530, ago. 202.

RIBEIRO, D. **Galileo Galilei**. *Revista de Ciência Elementar*, vol. 2, nº 04:0094, 201.

RIFFEL, R. A. **Uma introdução a teoria da relatividade especial**. Universidade Federal De Santa Maria, Santa Maria, 2010. Notas de aula. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/rogemar/docs/relatividade.pdf>. Acessado em: 19 de maio de 202.

SALES, J. H., SUZUKI, A. T., POSSIDONIO, D. N. OLIVEIRA, I. G., GIROTTI, P. H. **Transformações de Lorentz na frente de luz**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 42, e20190290 (2020).

SANTOS, A. **Eletromagnetismo de Galileu: Mudanças de referencial no ensino de eletrodinâmica**. Orientador: Dr. Reinaldo de Melo e Souza. 2019. 45 f. TCC (Graduação) – Curso de licenciatura em física. Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2019. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/bitstream/1/13196/1/Aroaldo%20de%20Souza%20Santos.pdf>. Acessado em: 04 de março de 202.

TORT, A. C. **Uma introdução à Relatividade Restrita e Geral para professores do ensino médio – parte I: Relatividade Restrita**. Instituto de Física da Universidade Federal Do Rio De Janeiro, Rio de Janeiro, 2011. Notas de aula. Disponível em: https://www.if.ufrj.br/~pef/producao_academica/material_didatico/2011/introducao_relatividade_1.pdf. Acessado em: 17 de maio de 202.

WOLFF, J. F. S.; MORS, P. M. **Relatividade: a passagem do enfoque galileano para a visão de Einstein**. In: *Textos de apoio ao professor de física*. Programa de Pós Graduação em Ensino de Física; editores Marco Antonio Moreira, Eliane Angela Veit - Vol. 16, n. 5 (2005) – 68 .

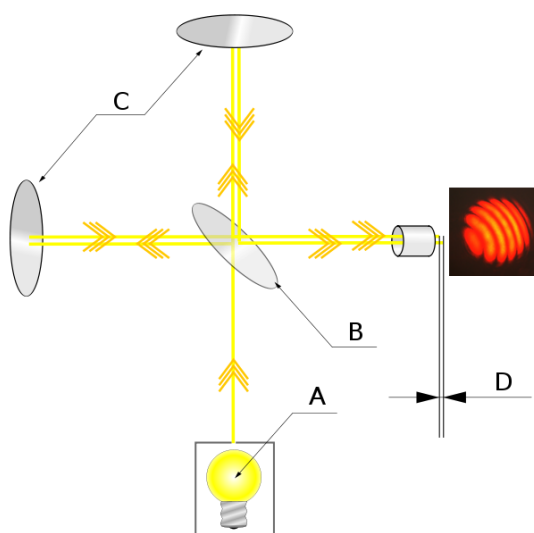
APÊNDICE A

EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY

O experimento consistia em medir a velocidade da luz aproveitando-se do movimento e da velocidade de translação da Terra utilizando-se um aparato que ficou conhecido como interferômetro de Michelson-Morley, contém dois braços de mesmo comprimento, dispostos perpendicularmente entre si.

Na extremidade de um dos braços, uma fonte emissora A de luz, na intersecção dos braços um conjunto de espelhos B semitransparentes posicionados de forma angulada em 45° , nas extremidades dos dois braços espelhos refletores C e um anteparo D que permitia enxergar o feixe de luz refletido.

Figura A.1: Esquema do experimento realizado por Michelson-Morley.



Fonte: www.pngegg.com.

A ideia era separar em dois feixes de menor intensidade o feixe principal, fazendo com que refletissem separadamente e no seu percurso de volta, se unissem novamente exibindo no anteparo o feixe de luz recombinado. Como os braços do interferômetro possuíam mesmo comprimento, a intensidade do feixe quando incidisse sobre o anteparo dependeria apenas das interferências construtivas ou destrutivas.

Se os feixes de luz tivessem diferentes velocidades em ambas as direções, padrões de interferência deveriam ser observados nos anteparos. Era isso que o experimento buscava comprovar.

Vamos considerar que um dos feixes se move paralelamente ao éter, mas em sentido oposto. A velocidade medida para a luz deveria ser, portanto, ao mover-se contra o Éter:

$$u = c - v \quad (\text{A.1})$$

Sendo u a velocidade mediada para luz nessa situação, c a velocidade da luz e v a velocidade do éter. Se considerarmos o comprimento dos braços do aparelho com tamanho L , temos que o intervalo de tempo necessário para o feixe de luz percorrer todo o comprimento do braço, tempo de ida, é dado por:

$$t_1 = \frac{L}{u} \quad (\text{A.2})$$

Substituindo (A.1) em (A.2), obtemos:

$$t_1 = \frac{L}{c - v} \quad (\text{A.3})$$

O tempo de volta do feixe pode ser obtido da mesma forma, porém, o feixe de luz agora se move paralelamente ao éter e no mesmo sentido. Assim, temos que a velocidade medida para a luz deve ser:

$$u = c + v \quad (\text{A.4})$$

Logo, o tempo de volta do feixe de luz pode ser obtido, da mesma forma que para o tempo de ida, substituindo a equação (A.4) na (A.2). Temos que:

$$t_2 = \frac{L}{c + v} \quad (\text{A.5})$$

Então, o tempo total pode ser obtido pela soma do tempo de ida e de volta. A equação fica:

$$\Delta t_1 = \frac{L}{(c - v)} + \frac{L}{(c + v)} \quad (\text{A.6})$$

$$\Delta t_1 = \frac{2Lc}{c^2 + v^2} \quad (\text{A.7})$$

$$\Delta t_1 = \frac{2L}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} \quad (\text{A.8})$$

Agora vamos calcular o tempo total quando o feixe de luz viaja perpendicularmente ao éter. Utilizando o teorema de Pitágoras conseguimos calcular a distância percorrida pelo feixe em função c e v . Olhar figura (A.2).

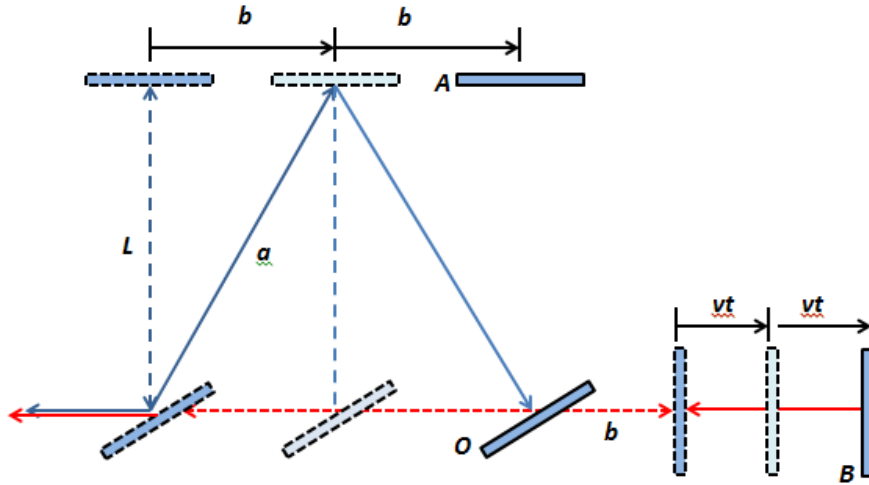
$$a^2 = L^2 + b^2 t_2^2 = \frac{L^2}{c^2 - v^2} \quad (\text{A.9})$$

Sendo:

$$a = ct \quad (\text{A.10})$$

$$b = vt \quad (\text{A.11})$$

Figura A.2: Esquema do desenho do trajeto percorrido pela luz.



Fonte: Figura do autor.

Substituindo (A.10) e (A.11) em (A.9), temos que:

$$(ct)^2 = L^2 + (vt)^2 \quad (\text{A.12})$$

$$L^2 = (ct)^2 - (vt)^2 \quad (\text{A.13})$$

$$L = t\sqrt{c^2 - v^2} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{L}{t} = \sqrt{c^2 - v^2} \quad (\text{A.15})$$

$$u = \sqrt{c^2 - v^2} \quad (\text{A.16})$$

O tempo total então é:

$$\Delta t_2 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (\text{A.17})$$

$$\Delta t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (\text{A.18})$$

$$\Delta t_2 = \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.19})$$

A diferença de tempo para que os dois feixes percorram os seus respectivos caminhos, deverá ser dada pela diferença entre as expressões para cada braço. Logo, Tem-se:

$$\Delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.20})$$

$$\Delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{2L}{c} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{A.21})$$

Pelo fato de termos $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, usaremos uma expansão binomial descartando os termos de grau maior do que 2. Da seguinte forma:

$$(1 - x)^n \approx 1 - nx \quad (\text{A.22})$$

Usando a relação de (A.22) em (A.21), temos o seguinte:

$$\Delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{2L}{c} \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) - \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \right] \quad (\text{A.23})$$

$$\Delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{2L}{c} \left[1 + \frac{v^2}{c^2} - 1 - \frac{v^2}{2c^2} \right] \quad (\text{A.24})$$

$$\Delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{2L}{c} \left[\frac{v^2}{2c^2} \right] \approx \frac{Lv^2}{c^3} \quad (\text{A.25})$$

$$\Delta t \approx \frac{Lv^2}{c^3} \quad (\text{A.26})$$

A equação (A.26) é a diferença de tempo entre a chegada ao anteparo dos dois feixes de luz. A diferença de tempo entre os dois instantes no qual os feixes refletidos chegam ao detector produzem uma diferença de fase entre esses feixes, ocasionando um padrão de interferência quando esses se recombinam no anteparo.

Uma rotação de 90° sobre o interferômetro no plano horizontal, faria com que os dois feixes cheguem ao detector em posições alternadas. Essa rotação sobre o interferômetro resulta numa diferença de tempo que corresponde ao dobro do valor calculado acima. Por conta disso a diferença de caminho corresponde ao dobro da expressão obtida fica:

$$\Delta d = 2\Delta t c \quad (\text{A.27})$$

Substituindo (A.26) em (A.27) temos.

$$\Delta d = 2c \left(\frac{Lv^2}{c^3} \right) \quad (\text{A.28})$$

$$\Delta d = 2 \frac{Lv^2}{c^2} \quad (\text{A.29})$$

Essa diferença de caminho percorrida pelos dois feixes poderia ser representada na forma de uma mudança na posição das franjas formadas no anteparo, por conta da interferência devido à diferença de caminho. Assim, poderíamos escrever a expressão na forma representada a baixo. Onde λ é comprimento de onda da radiação emitida.

$$Desvio = \frac{\Delta d}{\lambda} = 2 \frac{Lv^2}{\lambda c^2} \quad (A.30)$$

O experimento foi repetido em diferentes estações do ano, pois sabemos que o sentido do movimento orbital da Terra se inverte a cada seis meses. Quando no verão a Terra viaja em uma direção e sentido, seis meses depois, no inverno, seu movimento é na mesma direção, mas com sentido contrário. Assim se eventualmente o éter estivesse movimentando-se em relação à Terra em determinada época do ano, nos meses seguintes esse cenário seria diferente.

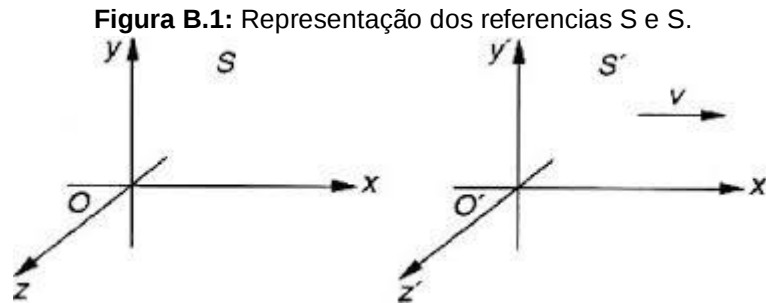
Michelson e Morley esperavam encontrar um padrão de interferência destrutiva. Em outras palavras, se houvesse uma velocidade relativa do aparato que viajava junto com a Terra, em relação à velocidade da luz, padrões de interferência destrutiva seriam observados.

A precisão do instrumento utilizado por Michelson e Morley podia detectar desvios da ordem de 0,01 metros, muito menores, portanto, do que o desvio que se esperava obter. O resultado obtido para o valor do desvio foi de zero, que foi observado pela falta de um padrão de interferência destrutiva entre as ondas. Ainda assim a hipótese do Éter não foi descartada.

APÊNDICE B

TRANSFORMAÇÕES DE LORENTEZ

Dados os sistemas de coordenadas abaixo:



Fonte: Figura do autor.

$S' (x', y', z', t')$ se move com velocidade constante v , na direção do eixo x , e o referencial $S (x, y, z, t)$ está em repouso, como está ilustrado na Figura B.1. Vamos obter as transformações de Lorentz, que estabelecem a relação entre as coordenadas de S' em relação a S .

A transformação de coordenadas (x, y, z, t) para (x', y', z', t') deve satisfazer as seguintes condições:

- Um movimento retilíneo uniforme em S também será em S' . Ambos os referenciais são inerciais e a mudança de coordenadas espaciais não produz aceleração.
- Para $v = 0$, as transformações devem reduzir-se a identidade, ou seja, as coordenadas nos dois referenciais são equivalentes.
- Se um sinal luminoso for enviado da origem dos referenciais no instante inicial $t = t' = 0$ em que as origens O e O' são coincidentes, a sua frente de onda deve propagar-se como uma onda esférica com velocidade c em ambos os referenciais, consequência dos postulados da Relatividade Restrita, de modo que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \leftrightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (\text{B.1})$$

Essas condições devem ser obedecidas para que tenhamos um novo conjunto de transformações de coordenadas linear. Pela Figura A.1 temos de imediato que:

$$y' = y \quad \text{e} \quad z' = z \quad (\text{B.2})$$

Vamos incluir fatores de correção (α, σ, ρ) nas transformações de Galileu que serão determinados aplicando as condições (B.1) e (B.2) que estabelecemos no início, assim:

$$x' = \alpha(x - vt) \quad (\text{B.3})$$

$$t' = \sigma t + \rho x \quad (\text{B.4})$$

Notem que na equação (B.4) adicionamos um fator de correção temporal associado a coordenada espacial $x(\rho x)$, isso é feito pois estamos considerando que o tempo na Relatividade Restrita não é mais absoluto e depende do referencial, da posição da partícula, ou seja, a mudança de coordenada entre referencias afeta a medição dos intervalos de tempo. Caso nossa consideração seja equivocada obteremos após os cálculos o fator de correção ρ igual a zero. Vamos aplicar a condição (B.3). No referencial S' temos:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (\text{B.5})$$

Substituindo as equações (B.2), (B.3) e (B.4) na equação (B.5), obtemos:

$$[\alpha(x - vt)]^2 + y^2 + z^2 - c^2(\sigma t + \rho x)^2 = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\alpha^2(x^2 - 2vxt + v^2t^2) + y^2 + z^2 - c^2(\sigma^2t^2 + 2\sigma t\rho x + \rho^2x^2) = 0 \quad (\text{B.7})$$

No referencial S temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$y^2 + z^2 = c^2t^2 - x^2 \quad (\text{B.9})$$

Substituindo a equação (B.9) na equação (B.7) encontramos:

$$\alpha^2(x^2 - 2vxt + v^2t^2) + c^2t^2 - x^2 - c^2(\sigma^2t^2 + 2\sigma t\rho x + \rho^2x^2) = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\alpha^2x^2 - 2\alpha^2vxt + \alpha^2v^2t^2 + c^2t^2 - x^2 - c^2\sigma^2t^2 - 2c^2\sigma t\rho x - c^2\rho^2x^2 = 0 \quad (\text{B.11})$$

Agrupando os termos que possuem x^2 , xt e t^2 na equação (B.11) e depois colocando em evidência obtemos:

$$(\alpha^2 - c^2\rho^2 - 1)x^2 - (2\alpha^2v + 2c^2\sigma\rho)xt + (\alpha^2v^2 + c^2 - c^2\sigma^2)t^2 = 0 \quad (\text{B.12})$$

Para que tenhamos um polinômio identicamente nulo os termos entre parênteses na equação (B.12) devem ser iguais a zero. Assim montamos um sistema de equações dadas por:

$$\begin{cases} 2\alpha^2v + 2c^2\sigma\rho = 0 \\ \alpha^2 - c^2\rho^2 - 1 = 0 \\ \alpha^2v^2 + c^2 - c^2\sigma^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Fazendo algumas simplificações e manipulações algébricas obtemos:

$$\begin{cases} \alpha^2 v + c^2 \sigma \rho = 0 & \text{(B.14.1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - c^2 \rho^2 = 1 & \text{(B.14.2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma^2 - \frac{v^2}{c^2} \alpha^2 = 1 & \text{(B.14.3)} \end{cases}$$

Nota: na terceira equação em (B.13) dividimos tudo por c^2 e depois invertemos o sinal de modo a encontrar a equação (B.14.3).

Usando a equação (B.14.1) temos:

$$\alpha^2 = -\frac{c^2}{v} \sigma \rho \quad \text{(B.15)}$$

Substituindo a equação (B.15) na equação (B.14.2) encontramos:

$$-\frac{c^2}{v} \sigma \rho - c^2 \rho^2 = 1 \quad \text{(B.16)}$$

$$-\frac{c^2}{v} \rho (\sigma + v \rho) = 1 \quad \text{(B.17)}$$

Substituindo a equação (B.15) na equação (B.14.3) obtemos:

$$\sigma^2 - \frac{v^2}{c^2} \left(-\frac{c^2}{v} \sigma \rho \right) = 1 \quad \text{(B.18)}$$

$$\sigma^2 + v \sigma \rho = 1 \quad \text{(B.19)}$$

$$\sigma (\sigma + v \rho) = 1 \quad \text{(B.20)}$$

Igualando as equações (B.17) e (B.20) temos:

$$-\frac{c^2}{v} \rho (\sigma + v \rho) = \sigma (\sigma + v \rho) \quad \text{(B.21)}$$

$$\sigma = -\frac{c^2}{v} \rho \quad \text{(B.22)}$$

$$\rho = -\frac{v}{c^2} \sigma \quad \text{(B.23)}$$

Substituindo a equação (B.23) na equação (B.15) encontramos:

$$\alpha^2 = -\frac{c^2}{v} \sigma \left(-\frac{v}{c^2} \sigma \right) \quad \text{(B.24)}$$

$$\alpha^2 = \sigma^2 \quad \text{(B.25)}$$

Com o resultado da equação (B.25) podemos reescrever a equação (B.14.3) de modo a obter:

$$\alpha^2 - \frac{v^2}{c^2} \alpha^2 = 1 \quad \text{(B.26)}$$

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \quad (\text{B.27})$$

$$\alpha = \sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{B.28})$$

Fazendo $\alpha = \sigma = \gamma$, sendo que γ é chamado de fator de Lorentz, temos:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (\text{B.29})$$

Substituindo a equação (B.29) na equação (B.23) encontramos o valor de ρ :

$$\rho = -\frac{v}{c^2} \gamma \quad (\text{B.30})$$

Colocando os valores de α, σ e ρ obtidos nas equações (B.29) e (B.30) nas equações (B.3) e (B.4) determinamos as Transformações de Lorentz:

$$x' = \gamma(x - vt) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) \quad (\text{B.31})$$

$$t' = \gamma t - \frac{v}{c^2} \gamma x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t - \frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x \quad (\text{B.32})$$

De forma mais organizada e compacta temos:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{cases} \quad (\text{B.33})$$

APÊNDICE C

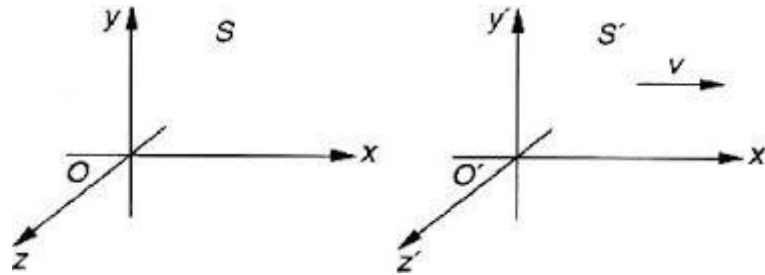
TRANSFORMAÇÕES DE LORENTEZ INVERSAS

Sejam as transformações de Lorentz dadas por:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Estas transformações estabelecem a relação entre as coordenadas de um referencial $S'(x', y', z', t')$, que se move com velocidade constante v , na direção do eixo x , e as coordenadas de um referencial em repouso $S(x, y, z, t)$, como está ilustrado na Figura C.1. Vamos obter as transformações de Lorentz inversas, que estabelecem a relação entre as coordenadas de S em relação a S' .

Figura C.1: Representação dos referenciais S e S' .



Fonte: Figura do autor.

Vamos isolar x' e t' nas transformações de Lorentz, a equivalência nos eixos y e z permanece a mesma. Assim obtemos para x :

$$x - vt = \frac{x'}{\gamma} \quad (\text{C.2})$$

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt \quad (\text{C.3})$$

Para t temos:

$$t - \frac{v}{c^2}x = \frac{t'}{\gamma} \quad (\text{C.4})$$

$$t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{v}{c^2}x \quad (\text{C.5})$$

Substituindo o valor de t , obtido em (C.5), na equação (C.3) para x , encontramos:

$$x = \frac{x'}{\gamma} + v \left(\frac{t'}{\gamma} + \frac{v}{c^2} x' \right) \rightarrow x = \frac{x'}{\gamma} + v \frac{t'}{\gamma} + \frac{v^2}{c^2} x' \quad (\text{C.6})$$

$$x - \frac{v^2}{c^2} x' = \frac{1}{\gamma} (x' + vt') \quad (\text{C.7})$$

$$x \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{\gamma} (x' + vt') \quad (\text{C.8})$$

Sabemos que:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{C.9})$$

Elevando expressão (C.9) ao quadrado:

$$\gamma^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \quad (\text{C.10})$$

Invertendo este resultado:

$$\frac{1}{\gamma^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (\text{C.11})$$

Substituindo a expressão (C.11) na equação (C.8) obtemos:

$$\frac{x}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma} (x' + vt') \rightarrow x = \frac{\gamma^2}{\gamma} (x' + vt') \quad (\text{C.12})$$

$$x = \gamma (x' + vt') \quad (\text{C.13})$$

Agora que sabemos a transformação para x dada pela equação (C.13), vamos substituir este resultado na equação (C.5) para o tempo, de modo que teremos:

$$t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{v}{c^2} \gamma (x' + vt') \rightarrow t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{v}{c^2} \gamma x' + \frac{v}{c^2} \gamma vt' \quad (\text{C.14})$$

$$t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{v}{c^2} \gamma x' + \frac{v^2}{c^2} \gamma t' \rightarrow t = t' \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{v}{c^2} \gamma x' \quad (\text{C.15})$$

$$t = \gamma t' \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{v}{c^2} \gamma x' \quad (\text{C.16})$$

Substituindo o valor de $\frac{1}{\gamma^2}$, dado por (C.11), na equação (C.16), encontramos:

$$t = \gamma t' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{v}{c^2} \gamma x' \quad (\text{C.17})$$

$$t = \gamma t' + \frac{v}{c^2} \gamma x' \quad (\text{C.18})$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (\text{C.19})$$

Assim com base nos resultados (C.13) e (C.19) podemos escrever as transformações de Lorentz inversas como:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' - vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' - \frac{v}{c^2}x'\right) \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

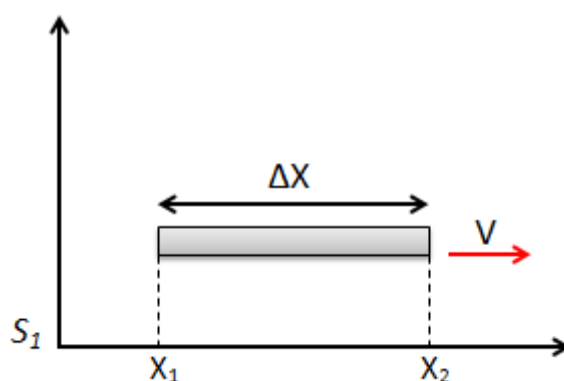
Estas transformações estabelecem a relação entre as coordenadas de um referencial $S(x, y, z, t)$ que está em repouso e as coordenadas de um referencial $S' (x', y', z', t')$ que se move com velocidade constante v , na direção do eixo x , em relação a S .

APÊNDICE D

CONTRAÇÃO DO ESPAÇO

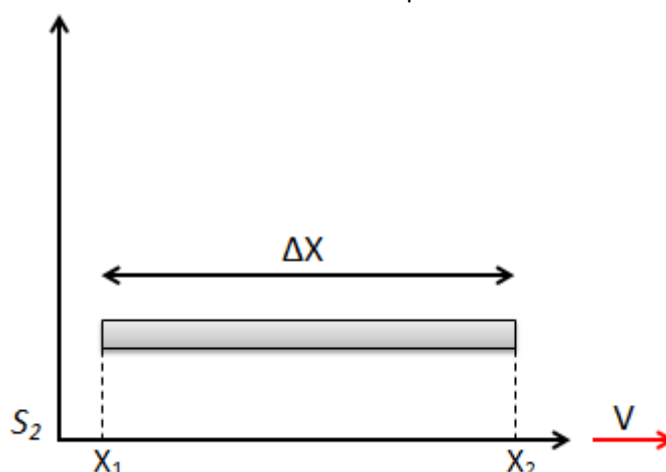
A luz viaja com velocidade igual pra qualquer observador. Consideremos um observador portando um objeto de dimensões semelhantes às de uma régua, disposta paralelamente a direção da velocidade, viajando a uma velocidade próxima da velocidade da luz, conforme a figura a seguir.

Figura D.1: Observador em repouso. Em seu referencial, ele observa o objeto com um comprimento menor que aquele medido dom o referencial e movimento.



Fonte: Figura do autor

Figura D.2: Observador em movimento. Ele observa o objeto com o comprimento próprio, medido no referencial em repouso.



Fonte: Figura do autor.

Chamaremos de t o tempo que transcorre pra este observador em movimento, e para o observador em repouso chamaremos o tempo de t' . Em decorrência disso, o tempo se dilata segundo o fator:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{D.1})$$

Onde:

- t' é o tempo para o observador em repouso;
- t é o tempo para o observador em movimento;
- v é a velocidade do observador em movimento;
- c é a velocidade da luz.

A partir da expressão anterior, façamos a seguinte análise:

1. Tomando dois pontos do objeto em movimento: x_1 e x_2 , que são as posições das extremidades inicial e final do objeto em movimento.
2. Aplicando as equações de transformação de Lorentz:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x'_1 - vt) \quad (\text{D.2})$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x'_2 - vt) \quad (\text{D.3})$$

3. Subtraindo a equação (D.3) da (D.1), Obtemos:

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x'_2 - vt) - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x'_1 - vt) \quad (\text{D.4})$$

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x'_2 - vt - x'_1 - (-vt)) \quad (\text{D.5})$$

4. Da equação (D.5) obtemos:

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x'_2 - x'_1) \quad (\text{D.6})$$

5. Obtemos por fim (D.7):

$$(x'_2 - x'_1) = (x_2 - x_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{D.7})$$

6. Podemos escrever a equação (D.7) da seguinte form:

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Onde:

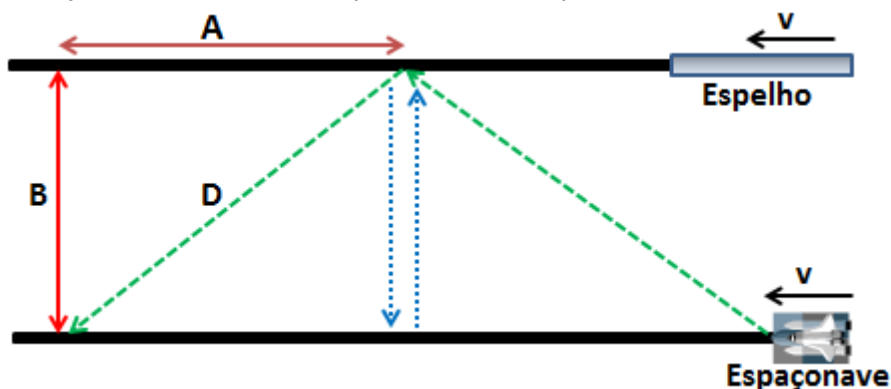
- Δx é o comprimento do objeto em movimento, visto pelo observador em repouso;
- $\Delta x'$ é o comprimento do objeto em repouso.

APÊNDICE E

DILATAÇÃO DO TEMPO

Esse fenômeno é uma consequência da invariância da velocidade da luz. Considere o exemplo: uma pessoa viaja numa espaçonave e passa por outra pessoa em um determinado ponto P, a nave viaja paralelamente a um espelho de modo que o pulso luminoso emitido retorne para o observador de dentro da nave. Observe a figura E.1:

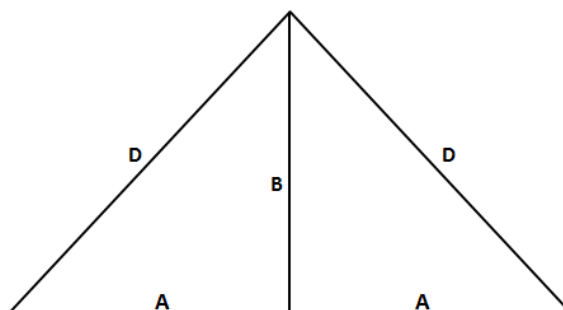
Figura E.1: Na diagonal a trajetória vista pelo observador que está fora da nave e na vertical a trajetória conforme é vista pelo observador que está dentro da nave.



Fonte: Fiura do autor.

O observador de dentro da nave vê a luz ir e voltar ao longo de uma linha reta perpendicular ao deslocamento da nave. Já o observador que está fora da nave vê a luz se propagar na diagonal, sendo que o pulso luminoso vai em direção ao espelho e depois é refletido pelo mesmo em direção à nave.

Figura E.2: Figura geométrica formada pela trajetória dos pulsos luminosos vistos pelos observadores: em repouso e em movimento.



Fonte: Fiura do autor.

Para os dois observadores a velocidade da luz é a mesma. Com base nisto, podemos deduzir a equação que mostra a dilatação do tempo, analisando um dos dois triângulos da figura E.2.

Usamos Δt_1 para a luz percorrer metade do seu caminho ao longo da linha D, segundo o observador em repouso, fora da nave. Este mesmo intervalo de tempo será usado pra medir o tempo gasto pela nave pra percorrer a distância A.

Será usado Δt_2 para o intervalo de tempo gasto para a luz percorrer a distância B, que corresponde à altura do triângulo, segundo o observador em movimento, dentro da nave.

Podemos deduzir que a distância A, percorrida pela nave conforme figura E.2, é dada por:

$$A = v\Delta t_1 \quad (\text{E.1})$$

Para o observador de dentro da nave conforme figura E.2, o caminho B percorrido pelo pulso luminoso é:

$$B = c\Delta t_2 \quad (\text{E.2})$$

E para o observador de fora da nave conforme figura E.2, a distância D percorrida pela luz é:

$$D = c\Delta t_1 \quad (\text{E.3})$$

Onde:

v é a velocidade do observador em movimento;

c é a velocidade da luz;

Δt_2 é o intervalo de tempo que passa para o observador em movimento, que será denominado tempo dilatado.

Δt_1 é o intervalo de tempo transcorrido para o observador em repouso, também chamado tempo próprio.

Aplicando Teorema de Pitágoras:

$$A^2 + B^2 = D^2 \quad (\text{E.4})$$

Substituindo (E.1), (E.2) e (E.3) em (E.4) temos:

$$\begin{aligned} v^2\Delta t_1^2 + c^2\Delta t_2^2 &= c^2\Delta t_1^2 \\ c^2\Delta t_2^2 &= c^2\Delta t_1^2 - v^2\Delta t_1^2 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Dividindo toda equação (E.5) por c^2 :

$$\Delta t_2^2 = \Delta t_1^2 - \frac{v^2}{c^2}\Delta t_1^2 \quad (\text{E.6})$$

$$\Delta t_2^2 = \Delta t_1^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (\text{E.7})$$

Extraindo a raiz quadrada de (E.7) obtemos o resultado final na equação (E.8) a seguir:

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{E.8})$$

Este resultado mostra que o tempo medido pelo observador de dentro da nave é menor, o que nos leva a concluir que ele teria sofrido uma dilatação, ou seja, como se cada unidade sofresse uma expansão em relação às unidades do tempo próprio. Lembrando que este último é o intervalo de tempo medido pelo observador considerado em repouso.

APÊNDICE F

ENERGIA

Assim como na Mecânica de Newton a energia cinética de uma partícula é igual ao trabalho na dinâmica relativística, logo:

$$K = \tau \quad (\text{F.1})$$

$$\tau = F \cdot d \quad (\text{F.2})$$

Logo:

$$K = F \cdot d \quad (\text{F.3})$$

Integrando (F.3) em relação ao espaço, obtemos:

$$K = \int F \, dx \quad (\text{F.4})$$

Quando analisamos a segunda lei de Newton, consideramos a hipótese de que a massa m no produto $F = m \cdot a$ permanece constante. Entretanto, quando a velocidade da partícula é comparável à velocidade da luz a hipótese de massa constante não é válida. Então, conceitua-se força a partir da quantidade de movimento. A força é a derivada em relação ao tempo da quantidade de movimento.

$$F = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{F.5})$$

Substituindo (F.5) em (F.4), tem-se:

$$K = \int \frac{dQ}{dt} \, dx \quad (\text{F.6})$$

Fazendo $Q = mv$, e substituindo em (F.6):

$$K = \int \frac{d(mv)}{dt} \, dx \quad (\text{F.7})$$

$$K = \int d(mv) \frac{dx}{dt} \quad (\text{F.8})$$

A derivada do espaço em relação a tempo é a velocidade, adotando em (F.8), temos:

$$K = \int (dm \, v + m \, dv) v \quad (\text{F.9})$$

$$K = \int (v^2 \, dm + mv \, dv) \quad (\text{F.10})$$

Usando:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{F.11})$$

Elevando toda equação (F.11) ao quadrado, obtemos:

$$m^2 = \frac{m_0^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2})} \quad (\text{F.12})$$

$$m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 \quad (\text{F.13})$$

$$m^2 \left(\frac{c^2 - v^2}{c^2}\right) = m_0^2 \quad (\text{F.14})$$

$$m^2(c^2 - v^2) = c^2 m_0^2 \quad (\text{F.15})$$

$$m^2 c^2 - m^2 v^2 = c^2 m_0^2 \quad (\text{F.16})$$

Diferenciando a equação (F.16) em relação à m e v :

$$2mc^2 dm - 2mv^2 dm - 2vm^2 dv = 0 \quad (\text{F.17})$$

Dividindo a equação (F.17) por $2m$:

$$c^2 dm - v^2 dm - mv dv = 0 \quad (\text{F.18})$$

$$mv dv = c^2 dm - v^2 dm \quad (\text{F.19})$$

Substituindo a equação (F.19) em (F.10):

$$K = \int (v^2 dm + c^2 dm - v^2 dm) \quad (\text{F.20})$$

$$K = \int c^2 dm \quad (\text{F.21})$$

Integrando (F.21) de m_0 até $m(v)$:

$$K = \int_{m_0}^{m(v)} c^2 dm \quad (\text{F.22})$$

$$K = c^2 \int_{m_0}^{m(v)} dm \quad (\text{F.23})$$

$$K = c^2 m \Big|_{m_0}^{m(v)} \quad (\text{F.24})$$

$$K = c^2(m(v) - m_0) \quad (\text{F.25})$$

$$K = c^2 m - c^2 m_0 \quad (\text{F.26})$$

Como já conhecemos m na equação (F.11), podemos substituir e escrever a Energia Cinética Relativística como:

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \quad (\text{F.27})$$

$$K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (\text{F.28})$$

A equação (F.26) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$c^2 m = K + c^2 m_0 \quad (\text{F.29})$$

Em (F.29) temos a Energia Cinética Relativística K , Energia Relativística de repouso E_0 que é dada por:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (\text{F.30})$$

E a famosa equação da Energia Total Relativística E dada por:

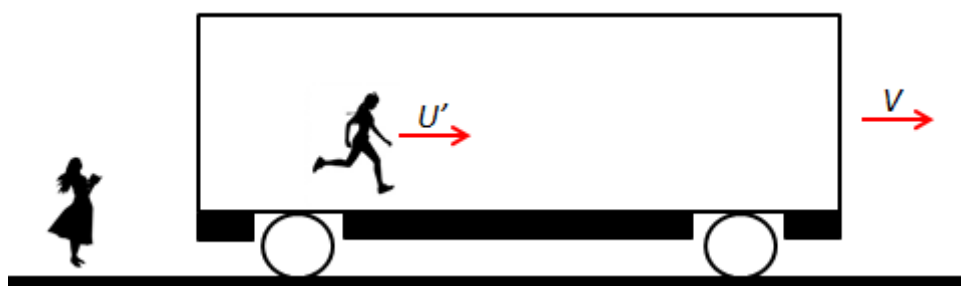
$$E = mc^2 \quad (\text{F.31})$$

APÊNDICE G

ADIÇÃO DE VELOCIDADE

Na mecânica clássica, se um trem se movimenta com velocidade v em relação à uma pessoa na plataforma e um passageiro se movimenta com velocidade u' em relação ao trem, a velocidade do passageiro em relação à essa pessoa que se encontra na plataforma é $u = v + u'$. Isto pode ser derivado a partir das transformações de Galileu.

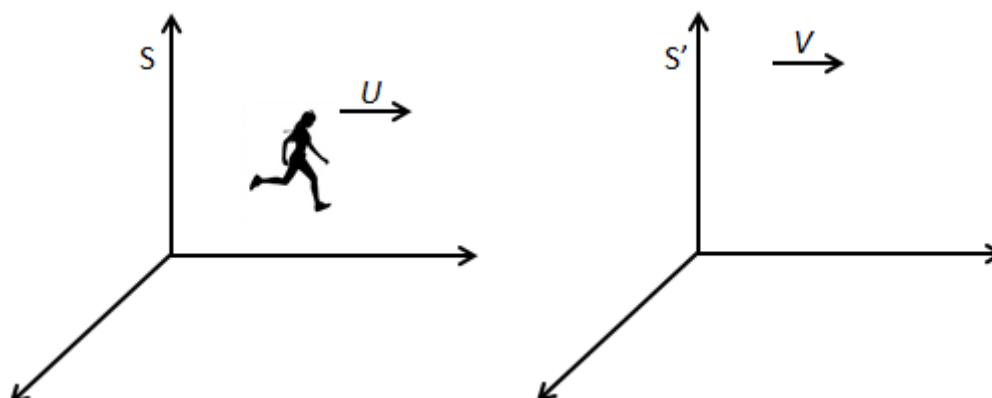
Figura G.1: Representação de passageiro se movendo com velocidade u' dentro de um vagão de trem que se movimenta com velocidade V em relação a uma pessoa parada na estação.



Fonte: Figura do autor.

Da mesma maneira usaremos as transformações de Lorentz para derivar a fórmula de adição relativística de velocidades. Vamos chamar de v a velocidade de S' em relação a S e u a velocidade do passageiro em S . A velocidade é paralela ao eixo x .

Figura G.2: Representação esquemática dos referenciais S , S' e passageiro.



Fonte: Figura do autor.

Queremos calcular u , a velocidade do passageiro em relação a S' . Usando as transformações de Lorentz temos:

$$dx' = \gamma(dx - vdt) \quad (G.1)$$

$$dy' = dy \quad (G.2)$$

$$dz' = dz \quad (G.3)$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right) \quad (G.4)$$

Então para u_x' temos que:

$$u_x = \frac{dx'}{dt'} \quad (G.5)$$

$$u'_x = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} \quad (G.6)$$

$$u'_x = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \left(\frac{v}{c^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)} \quad (G.7)$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (G.8)$$

Para u_y temos:

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad (G.9)$$

$$u'_y = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} \quad (G.10)$$

$$u'_y = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \left(\frac{v}{c^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)} \quad (G.11)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \quad (G.12)$$

E analogamente para u_z :

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \quad (G.13)$$

Esses resultados podem ser escritos na forma:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (G.14)$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad (G.15)$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad (\text{G.16})$$

A transformação inversa para a velocidade seria:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \quad (\text{G.17})$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \quad (\text{G.18})$$

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \quad (\text{G.19})$$

Considerando $v \ll c$ e $(1 + x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + O(x^3)$, temos que:

$$u'_x = (u_x - v) \left(1 + \frac{vu_x}{c^2}\right) \approx u_x - v \quad (\text{G.20})$$

$$u'_y = u_y \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \left(1 + \frac{vu_x}{c^2}\right) \approx u_y \quad (\text{G.21})$$

$$u'_z = u_z \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \left(1 + \frac{vu_x}{c^2}\right) \approx u_z \quad (\text{G.22})$$

Que é a formula de adição de velocidades não relativísticas.

Se o objeto em movimento for um pulso de luz na direção X com velocidade v .
adicionando nas equações de adição de velocidades (G.14), (G.15) e (G.16) temos;

$$u_x = c \quad (\text{G.23})$$

$$u_y = u_z = 0 \quad (\text{G.24})$$

$$u'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{vc}{c^2}} = c \quad (\text{G.25})$$

$$u'_y = u'_z = 0 \quad (\text{G.26})$$

O resultado obtido está em acordo com a teoria da relatividade.

ANEXO 3

Cópia do Artigo escrito em alemão por Albert Einstein.

3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;*
von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhafien scheinen; ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium“ zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität“ genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

Voraussetzung einführen, daß sich das Licht im leeren Raume stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustande des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit V fortpflanze. Diese beiden Voraussetzungen genügen, um zu einer einfachen und widerspruchsfreien Elektrodynamik bewegter Körper zu gelangen unter Zugrundelegung der Maxwell'schen Theorie für ruhende Körper. Die Einführung eines „Lichtäthers“ wird sich insofern als überflüssig erweisen, als nach der zu entwickelnden Auffassung weder ein mit besonderen Eigenschaften ausgestatteter „absolut ruhender Raum“ eingeführt, noch einem Punkte des leeren Raumes, in welchem elektromagnetische Prozesse stattfinden, ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet wird.

Die zu entwickelnde Theorie stützt sich — wie jede andere Elektrodynamik — auf die Kinematik des starren Körpers, da die Aussagen einer jeden Theorie Beziehungen zwischen starren Körpern (Koordinatensystemen), Uhren und elektromagnetischen Prozessen betreffen. Die nicht genügende Berücksichtigung dieses Umstandes ist die Wurzel der Schwierigkeiten, mit denen die Elektrodynamik bewegter Körper gegenwärtig zu kämpfen hat.

I. Kinematischer Teil.

§ 1. Definition der Gleichzeitigkeit.

Es liege ein Koordinatensystem vor, in welchem die Newton'schen mechanischen Gleichungen gelten. Wir nennen dies Koordinatensystem zur sprachlichen Unterscheidung von später einzuführenden Koordinatensystemen und zur Präzisierung der Vorstellung das „ruhende System“.

Ruht ein materieller Punkt relativ zu diesem Koordinatensystem, so kann seine Lage relativ zu letzterem durch starre Maßstäbe unter Benutzung der Methoden der euklidischen Geometrie bestimmt und in kartesischen Koordinaten ausgedrückt werden.

Wollen wir die *Bewegung* eines materiellen Punktes beschreiben, so geben wir die Werte seiner Koordinaten in Funktion der Zeit. Es ist nun wohl im Auge zu behalten, daß eine derartige mathematische Beschreibung erst dann einen physikalischen Sinn hat, wenn man sich vorher darüber klar geworden ist, was hier unter „Zeit“ verstanden wird.

Wir haben zu berücksichtigen, daß alle unsere Urteile, in welchen die Zeit eine Rolle spielt, immer Urteile über *gleichzeitige Ereignisse* sind. Wenn ich z. B. sage: „Jener Zug kommt hier um 7 Uhr an,“ so heißt dies etwa: „Das Zeigen des kleinen Zeigers meiner Uhr auf 7 und das Ankommen des Zuges sind gleichzeitige Ereignisse.“¹⁾

Es könnte scheinen, daß alle die Definition der „Zeit“ betreffenden Schwierigkeiten dadurch überwunden werden könnten, daß ich an Stelle der „Zeit“ die „Stellung des kleinen Zeigers meiner Uhr“ setze. Eine solche Definition genügt in der Tat, wenn es sich darum handelt, eine Zeit zu definieren ausschließlich für den Ort, an welchem sich die Uhr eben befindet; die Definition genügt aber nicht mehr, sobald es sich darum handelt, an verschiedenen Orten stattfindende Ereignisreihen miteinander zeitlich zu verknüpfen, oder — was auf dasselbe hinausläuft — Ereignisse zeitlich zu werten, welche in von der Uhr entfernten Orten stattfinden.

Wir könnten uns allerdings damit begnügen, die Ereignisse dadurch zeitlich zu werten, daß ein samt der Uhr im Koordinatenursprung befindlicher Beobachter jedem von einem zu wertenden Ereignis Zeugnis gebenden, durch den leeren Raum zu ihm gelangenden Lichtzeichen die entsprechende Uhrzeigerstellung zuordnet. Eine solche Zuordnung bringt aber den Übelstand mit sich, daß sie vom Standpunkte des mit der Uhr versehenen Beobachters nicht unabhängig ist, wie wir durch die Erfahrung wissen. Zu einer weit praktischeren Festsetzung gelangen wir durch folgende Betrachtung.

Befindet sich im Punkte A des Raumes eine Uhr, so kann ein in A befindlicher Beobachter die Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung von A zeitlich werten durch Aufsuchen der mit diesen Ereignissen gleichzeitigen Uhrzeigerstellungen. Befindet sich auch im Punkte B des Raumes eine Uhr — wir wollen hinzufügen, „eine Uhr von genau derselben Beschaffenheit wie die in A befindliche“ — so ist auch eine zeitliche Wertung der Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung von

1) Die Ungenauigkeit, welche in dem Begriffe der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an (annähernd) demselben Orte steckt und gleichfalls durch eine Abstraktion überbrückt werden muß, soll hier nicht erörtert werden.

B durch einen in B befindlichen Beobachter möglich. Es ist aber ohne weitere Festsetzung nicht möglich, ein Ereignis in A mit einem Ereignis in B zeitlich zu vergleichen; wir haben bisher nur eine „ A -Zeit“ und eine „ B -Zeit“, aber keine für A und B gemeinsame „Zeit“ definiert. Die letztere Zeit kann nun definiert werden, indem man *durch Definition* festsetzt, daß die „Zeit“, welche das Licht braucht, um von A nach B zu gelangen, gleich ist der „Zeit“, welche es braucht, um von B nach A zu gelangen. Es gehe nämlich ein Lichtstrahl zur „ A -Zeit“ t_A von A nach B ab, werde zur „ B -Zeit“ t_B in B gegen A zu reflektiert und gelange zur „ A -Zeit“ t'_A nach A zurück. Die beiden Uhren laufen definitionsgemäß synchron, wenn

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Wir nehmen an, daß diese Definition des Synchronismus in widerspruchsfreier Weise möglich sei, und zwar für beliebig viele Punkte, daß also allgemein die Beziehungen gelten:

1. Wenn die Uhr in B synchron mit der Uhr in A läuft, so läuft die Uhr in A synchron mit der Uhr in B .

2. Wenn die Uhr in A sowohl mit der Uhr in B als auch mit der Uhr in C synchron läuft, so laufen auch die Uhren in B und C synchron relativ zueinander.

Wir haben so unter Zuhilfenahme gewisser (gedachter) physikalischer Erfahrungen festgelegt, was unter synchron laufenden, an verschiedenen Orten befindlichen, ruhenden Uhren zu verstehen ist und damit offenbar eine Definition von „gleichzeitig“ und „Zeit“ gewonnen. Die „Zeit“ eines Ereignisses ist die mit dem Ereignis gleichzeitige Angabe einer am Orte des Ereignisses befindlichen, ruhenden Uhr, welche mit einer bestimmten, ruhenden Uhr, und zwar für alle Zeitbestimmungen mit der nämlichen Uhr, synchron läuft.

Wir setzen noch der Erfahrung gemäß fest, daß die Größe

$$\frac{2 \overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

eine universelle Konstante (die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume) sei.

Wesentlich ist, daß wir die Zeit mittels im ruhenden System

ruhender Uhren definiert haben; wir nennen die eben definierte Zeit wegen dieser Zugehörigkeit zum ruhenden System „die Zeit des ruhenden Systems“.

§ 2. Über die Relativität von Längen und Zeiten.

Die folgenden Überlegungen stützen sich auf das Relativitätsprinzip und auf das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, welche beiden Prinzipien wir folgendermaßen definieren.

1. Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden.

2. Jeder Lichtstrahl bewegt sich im „ruhenden“ Koordinatensystem mit der bestimmten Geschwindigkeit V , unabhängig davon, ob dieser Lichtstrahl von einem ruhenden oder bewegten Körper emittiert ist. Hierbei ist

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Lichtweg}}{\text{Zeitdauer}},$$

wobei „Zeitdauer“ im Sinne der Definition des § 1 aufzufassen ist.

Es sei ein ruhender starrer Stab gegeben; derselbe besitze, mit einem ebenfalls ruhenden Maßstabe gemessen, die Länge L . Wir denken uns nun die Stabachse in die X -Achse des ruhenden Koordinatensystems gelegt und dem Stabe hierauf eine gleichförmige Paralleltranslationsbewegung (Geschwindigkeit v) längs der X -Achse im Sinne der wachsenden x erteilt. Wir fragen nun nach der Länge des *bewegten* Stabes, welche wir uns durch folgende zwei Operationen ermittelt denken:

a) Der Beobachter bewegt sich samt dem vorher genannten Maßstabe mit dem auszumessenden Stabe und mißt direkt durch Anlegen des Maßstabes die Länge des Stabes, ebenso, wie wenn sich auszumessender Stab, Beobachter und Maßstab in Ruhe befänden.

b) Der Beobachter ermittelt mittels im ruhenden Systeme aufgestellter, gemäß § 1 synchroner, ruhender Uhren, in welchen Punkten des ruhenden Systems sich Anfang und Ende des auszumessenden Stabes zu einer bestimmten Zeit t befinden.

Die Entfernung dieser beiden Punkte, gemessen mit dem schon benutzten, in diesem Falle ruhenden Maßstabe ist ebenfalls eine Länge, welche man als „Länge des Stabes“ bezeichnen kann.

Nach dem Relativitätsprinzip muß die bei der Operation a) zu findende Länge, welche wir „die Länge des Stabes im bewegten System“ nennen wollen, gleich der Länge l des ruhenden Stabes sein.

Die bei der Operation b) zu findende Länge, welche wir „die Länge des (bewegten) Stabes im ruhenden System“ nennen wollen, werden wir unter Zugrundelegung unserer beiden Prinzipien bestimmen und finden, daß sie von l verschieden ist.

Die allgemein gebrauchte Kinematik nimmt stillschweigend an, daß die durch die beiden erwähnten Operationen bestimmten Längen einander genau gleich seien, oder mit anderen Worten, daß ein bewegter starrer Körper in der Zeitepoche t in geometrischer Beziehung vollständig durch denselben Körper, wenn er in bestimmter Lage ruht, ersetzbar sei.

Wir denken uns ferner an den beiden Stabenden (A und B) Uhren angebracht, welche mit den Uhren des ruhenden Systems synchron sind, d. h. deren Angaben jeweilen der „Zeit des ruhenden Systems“ an den Orten, an welchen sie sich gerade befinden, entsprechen; diese Uhren sind also „synchron im ruhenden System“.

Wir denken uns ferner, daß sich bei jeder Uhr ein mit ihr bewegter Beobachter befinde, und daß diese Beobachter auf die beiden Uhren das im § 1 aufgestellte Kriterium für den synchronen Gang zweier Uhren anwenden. Zur Zeit¹⁾ t_A gehe ein Lichtstrahl von A aus, werde zur Zeit t_B in B reflektiert und gelange zur Zeit t'_A nach A zurück. Unter Berücksichtigung des Prinzipes von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit finden wir:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

1) „Zeit“ bedeutet hier „Zeit des ruhenden Systems“ und zugleich „Zeigerstellung der bewegten Uhr, welche sich an dem Orte, von dem die Rede ist, befindet“.

und

$$t_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

wobei r_{AB} die Länge des bewegten Stabes — im ruhenden System gemessen — bedeutet. Mit dem bewegten Stabe bewegte Beobachter würden also die beiden Uhren nicht synchron gehend finden, während im ruhenden System befindliche Beobachter die Uhren als synchron laufend erklären würden.

Wir sehen also, daß wir dem Begriffe der Gleichzeitigkeit keine *absolute* Bedeutung beimessen dürfen, sondern daß zwei Ereignisse, welche, von einem Koordinatensystem aus betrachtet, gleichzeitig sind, von einem relativ zu diesem System bewegten System aus betrachtet, nicht mehr als gleichzeitige Ereignisse aufzufassen sind.

§ 3. Theorie der Koordinaten- und Zeittransformation von dem ruhenden auf ein relativ zu diesem in gleichförmiger Translationsbewegung befindliches System.

Seien im „ruhenden“ Raume zwei Koordinatensysteme, d. h. zwei Systeme von je drei von einem Punkte ausgehenden, aufeinander senkrechten starren materiellen Linien, gegeben. Die X -Achsen beider Systeme mögen zusammenfallen, ihre Y - und Z -Achsen bezüglich parallel sein. Jedem Systeme sei ein starrer Maßstab und eine Anzahl Uhren beigegeben, und es seien beide Maßstäbe sowie alle Uhren beider Systeme einander genau gleich.

Es werde nun dem Anfangspunkte des einen der beiden Systeme (k) eine (konstante) Geschwindigkeit v in Richtung der wachsenden x des anderen, ruhenden Systems (K) erteilt, welche sich auch den Koordinatenachsen, dem betreffenden Maßstabe sowie den Uhren mitteilen möge. Jeder Zeit t des ruhenden Systems K entspricht dann eine bestimmte Lage der Achsen des bewegten Systems und wir sind aus Symmetriegründen befugt anzunehmen, daß die Bewegung von k so beschaffen sein kann, daß die Achsen des bewegten Systems zur Zeit t (es ist mit „ t “ immer eine Zeit des ruhenden Systems bezeichnet) den Achsen des ruhenden Systems parallel seien.

Wir denken uns nun den Raum sowohl vom ruhenden System K aus mittels des ruhenden Maßstabes als auch vom

bewegten System k mittels des mit ihm bewegten Maßstabes ausgemessen und so die Koordinaten x, y, z bez. ξ, η, ζ ermittelt. Es werde ferner mittels der im ruhenden System befindlichen ruhenden Uhren durch Lichtsignale in der in § 1 angegebenen Weise die Zeit t des ruhenden Systems für alle Punkte des letzteren bestimmt, in denen sich Uhren befinden; ebenso werde die Zeit τ des bewegten Systems für alle Punkte des bewegten Systems, in welchen sich relativ zu letzterem ruhende Uhren befinden, bestimmt durch Anwendung der in § 1 genannten Methode der Lichtsignale zwischen den Punkten, in denen sich die letzteren Uhren befinden.

Zu jedem Wertsystem x, y, z, t , welches Ort und Zeit eines Ereignisses im ruhenden System vollkommen bestimmt, gehört ein jenes Ereignis relativ zum System k festlegendes Wertsystem ξ, η, ζ, τ , und es ist nun die Aufgabe zu lösen, das diese Größen verknüpfende Gleichungssystem zu finden.

Zunächst ist klar, daß die Gleichungen *linear* sein müssen wegen der Homogenitätseigenschaften, welche wir Raum und Zeit beilegen.

Setzen wir $x' = x - vt$, so ist klar, daß einem im System k ruhenden Punkte ein bestimmtes, von der Zeit unabhängiges Wertsystem x', y, z zukommt. Wir bestimmen zuerst τ als Funktion von x', y, z und t . Zu diesem Zwecke haben wir in Gleichungen auszudrücken, daß τ nichts anderes ist als der Inbegriff der Angaben von im System k ruhenden Uhren, welche nach der im § 1 gegebenen Regel synchron gemacht worden sind.

Vom Anfangspunkt des Systems k aus werde ein Lichtstrahl zur Zeit τ_0 längs der X -Achse nach x' gesandt und von dort zur Zeit τ_1 nach dem Koordinatenursprung reflektiert, wo er zur Zeit τ_2 anlange; so muß dann sein:

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$$

oder, indem man die Argumente der Funktion τ beifügt und das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im ruhenden Systeme anwendet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\tau(0, 0, 0, t) + \tau \left(0, 0, 0, \left\{ t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v} \right\} \right) \right] \\ = \tau \left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v} \right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, wenn man x' unendlich klein wählt:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v} \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

oder

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

Es ist zu bemerken, daß wir statt des Koordinatenursprunges jeden anderen Punkt als Ausgangspunkt des Lichtstrahles hätten wählen können und es gilt deshalb die eben erhaltene Gleichung für alle Werte von x', y, z .

Eine analoge Überlegung — auf die H - und Z -Achse angewandt — liefert, wenn man beachtet, daß sich das Licht längs dieser Achsen vom ruhenden System aus betrachtet stets mit der Geschwindigkeit $\sqrt{V^2 - v^2}$ fortpflanzt:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, da τ eine *lineare* Funktion ist:

$$\tau = a \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right),$$

wobei a eine vorläufig unbekannte Funktion $\varphi(v)$ ist und der Kürze halber angenommen ist, daß im Anfangspunkte von k für $\tau = 0$ $t = 0$ sei.

Mit Hilfe dieses Resultates ist es leicht, die Größen ξ, η, ζ zu ermitteln, indem man durch Gleichungen ausdrückt, daß sich das Licht (wie das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in Verbindung mit dem Relativitätsprinzip verlangt) auch im bewegten System gemessen mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt. Für einen zur Zeit $\tau = 0$ in Richtung der wachsenden ξ ausgesandten Lichtstrahl gilt:

$$\xi = V \tau,$$

oder

$$\xi = a V \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right).$$

Nun bewegt sich aber der Lichtstrahl relativ zum Anfangs-

900

A. Einstein.

punkt von k im ruhenden System gemessen mit der Geschwindigkeit $V-v$, so daß gilt:

$$\frac{x'}{V-v} = t.$$

Setzen wir diesen Wert von t in die Gleichung für ξ ein, so erhalten wir:

$$\xi = a \frac{V^2}{V^2 - v^2} x'.$$

Auf analoge Weise finden wir durch Betrachtung von längs den beiden anderen Achsen bewegte Lichtstrahlen:

$$\eta = V\tau = aV \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right),$$

wobei

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t; \quad x' = 0;$$

also

$$\eta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} y$$

und

$$\zeta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} z.$$

Setzen wir für x' seinen Wert ein, so erhalten wir:

$$\tau = \varphi(v) \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x \right),$$

$$\xi = \varphi(v) \beta (x - vt),$$

$$\eta = \varphi(v) y,$$

$$\zeta = \varphi(v) z,$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

und φ eine vorläufig unbekannte Funktion von v ist. Macht man über die Anfangslage des bewegten Systems und über den Nullpunkt von τ keinerlei Voraussetzung, so ist auf den rechten Seiten dieser Gleichungen je eine additive Konstante zuzufügen.

Wir haben nun zu beweisen, daß jeder Lichtstrahl sich, im bewegten System gemessen, mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt, falls dies, wie wir angenommen haben, im ruhenden

System der Fall ist; denn wir haben den Beweis dafür noch nicht geliefert, daß das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mit dem Relativitätsprinzip vereinbar sei.

Zur Zeit $t = \tau = 0$ werde von dem zu dieser Zeit gemeinsamen Koordinatenursprung beider Systeme aus eine Kugelwelle ausgesandt, welche sich im System K mit der Geschwindigkeit V ausbreitet. Ist (x, y, z) ein eben von dieser Welle ergriffener Punkt, so ist also

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2.$$

Diese Gleichung transformieren wir mit Hilfe unserer Transformationsgleichungen und erhalten nach einfacher Rechnung:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2.$$

Die betrachtete Welle ist also auch im bewegten System betrachtet eine Kugelwelle von der Ausbreitungsgeschwindigkeit V . Hiermit ist gezeigt, daß unsere beiden Grundprinzipien miteinander vereinbar sind.

In den entwickelten Transformationsgleichungen tritt noch eine unbekannte Funktion φ von v auf, welche wir nun bestimmen wollen.

Wir führen zu diesem Zwecke noch ein drittes Koordinatensystem K' ein, welches relativ zum System K derart in Paralleltranslationsbewegung parallel zur Ξ -Achse begriffen sei, daß sich dessen Koordinatenursprung mit der Geschwindigkeit $-v$ auf der Ξ -Achse bewege. Zur Zeit $t = 0$ mögen alle drei Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen und es sei für $t = x = y = z = 0$ die Zeit t' des Systems K' gleich Null. Wir nennen x', y', z' die Koordinaten, im System K' gemessen, und erhalten durch zweimalige Anwendung unserer Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} t &= \varphi(-v) \beta(-v) \left\{ \tau + \frac{v}{V^2} \xi \right\} = \varphi(v) \varphi(-v) t, \\ x' &= \varphi(-v) \beta(-v) \left\{ \xi + v \tau \right\} = \varphi(v) \varphi(-v) x, \\ y' &= \varphi(-v) \eta = \varphi(v) \varphi(-v) y, \\ z' &= \varphi(-v) \zeta = \varphi(v) \varphi(-v) z. \end{aligned}$$

Da die Beziehungen zwischen x', y', z' und x, y, z die Zeit t nicht enthalten, so ruhen die Systeme K und K' gegeneinander,

und es ist klar, daß die Transformation von K auf K' die identische Transformation sein muß. Es ist also:

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Wir fragen nun nach der Bedeutung von $\varphi(v)$. Wir fassen das Stück der H -Achse des Systems k ins Auge, das zwischen $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ und $\xi = l, \eta = 0, \zeta = 0$ gelegen ist. Dieses Stück der H -Achse ist ein relativ zum System K mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu seiner Achse bewegter Stab, dessen Enden in K die Koordinaten besitzen:

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0$$

und

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Die Länge des Stabes, in K gemessen, ist also $l/\varphi(v)$; damit ist die Bedeutung der Funktion φ gegeben. Aus Symmetriegründen ist nun einleuchtend, daß die im ruhenden System gemessene Länge eines bestimmten Stabes, welcher senkrecht zu seiner Achse bewegt ist, nur von der Geschwindigkeit, nicht aber von der Richtung und dem Sinne der Bewegung abhängig sein kann. Es ändert sich also die im ruhenden System gemessene Länge des bewegten Stabes nicht, wenn v mit $-v$ vertauscht wird. Hieraus folgt:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

oder

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Aus dieser und der vorhin gefundenen Relation folgt, daß $\varphi(v) = 1$ sein muß, so daß die gefundenen Transformationsgleichungen übergehen in:

$$\tau = \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x \right),$$

$$\xi = \beta (x - vt),$$

$$\eta = y,$$

$$\zeta = z,$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

§ 4. Physikalische Bedeutung der erhaltenen Gleichungen,
bewegte starre Körper und bewegte Uhren betreffend.

Wir betrachten eine starre Kugel¹⁾ vom Radius R , welche relativ zum bewegten System k ruht, und deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung von k liegt. Die Gleichung der Oberfläche dieser relativ zum System K mit der Geschwindigkeit v bewegten Kugel ist:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

Die Gleichung dieser Oberfläche ist in x, y, z ausgedrückt zur Zeit $t=0$:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Ein starrer Körper, welcher in ruhendem Zustande ausgemessen die Gestalt einer Kugel hat, hat also in bewegtem Zustande — vom ruhenden System aus betrachtet — die Gestalt eines Rotationsellipsoides mit den Achsen

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, R, R.$$

Während also die Y - und Z -Dimension der Kugel (also auch jedes starren Körpers von beliebiger Gestalt) durch die Bewegung nicht modifiziert erscheinen, erscheint die X -Dimension im Verhältnis $1:\sqrt{1 - (v/V)^2}$ verkürzt, also um so stärker, je größer v ist. Für $v=V$ schrumpfen alle bewegten Objekte — vom „ruhenden“ System aus betrachtet — in flächenhafte Gebilde zusammen. Für Überlichtgeschwindigkeiten werden unsere Überlegungen sinnlos; wir werden übrigens in den folgenden Betrachtungen finden, daß die Lichtgeschwindigkeit in unserer Theorie physikalisch die Rolle der unendlich großen Geschwindigkeiten spielt.

Es ist klar, daß die gleichen Resultate von im „ruhenden“ System ruhenden Körpern gelten, welche von einem gleichförmig bewegten System aus betrachtet werden. —

Wir denken uns ferner eine der Uhren, welche relativ zum ruhenden System ruhend die Zeit t , relativ zum bewegten

1) Das heißt einen Körper, welcher ruhend untersucht Kugelgestalt besitzt.

System ruhend die Zeit τ anzugeben befähigt sind, im Koordinatenursprung von K gelegen und so gerichtet, daß sie die Zeit τ angibt. Wie schnell geht diese Uhr, vom ruhenden System aus betrachtet?

Zwischen die Größen x , t und τ , welche sich auf den Ort dieser Uhr beziehen, gelten offenbar die Gleichungen:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \left(t - \frac{v}{V^2} x \right)$$

und

$$x = vt.$$

Es ist also

$$\tau = t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right) t,$$

woraus folgt, daß die Angabe der Uhr (im ruhenden System betrachtet) pro Sekunde um $(1 - \sqrt{1 - (v/V)^2})$ Sek. oder — bis auf Größen vierter und höherer Ordnung um $\frac{1}{2}(v/V)^2$ Sek. zurückbleibt.

Hieraus ergibt sich folgende eigentümliche Konsequenz. Sind in den Punkten A und B von K ruhende, im ruhenden System betrachtet, synchron gehende Uhren vorhanden, und bewegt man die Uhr in A mit der Geschwindigkeit v auf der Verbindungslinie nach B , so gehen nach Ankunft dieser Uhr in B die beiden Uhren nicht mehr synchron, sondern die von A nach B bewegte Uhr geht gegenüber der von Anfang an in B befindlichen um $\frac{1}{2}tv^2/V^2$ Sek. (bis auf Größen vierter und höherer Ordnung) nach, wenn t die Zeit ist, welche die Uhr von A nach B braucht.

Man sieht sofort, daß dies Resultat auch dann noch gilt, wenn die Uhr in einer beliebigen polygonalen Linie sich von A nach B bewegt, und zwar auch dann, wenn die Punkte A und B zusammenfallen.

Nimmt man an, daß das für eine polygonale Linie bewiesene Resultat auch für eine stetig gekrümmte Kurve gelte, so erhält man den Satz: Befinden sich in A zwei synchron gehende Uhren und bewegt man die eine derselben auf einer geschlossenen Kurve mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie wieder nach A zurückkommt, was t Sek. dauern möge, so geht die letztere Uhr bei ihrer Ankunft in A gegenüber der un-

bewegt gebliebenen um $\frac{1}{2} t (v/F)^2$ Sek. nach. Man schließt daraus, daß eine am Erdäquator befindliche Unruhr um einen sehr kleinen Betrag langsamer laufen muß als eine genau gleich beschaffene, sonst gleichen Bedingungen unterworfen, an einem Erdpole befindliche Uhr.

§ 5. Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

In dem längs der X -Achse des Systems K mit der Geschwindigkeit v bewegten System k bewege sich ein Punkt gemäß den Gleichungen:

$$\xi = w_{\xi} \tau,$$

$$\eta = w_{\eta} \tau,$$

$$\zeta = 0,$$

wobei w_{ξ} und w_{η} Konstanten bedeuten.

Gesucht ist die Bewegung des Punktes relativ zum System K . Führt man in die Bewegungsgleichungen des Punktes mit Hilfe der in § 3 entwickelten Transformationsgleichungen die Größen x, y, z, t ein, so erhält man:

$$x = \frac{w_{\xi} + v}{1 + \frac{v w_{\xi}}{V^2}} t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_{\xi}}{V^2}} w_{\eta} t,$$

$$z = 0.$$

Das Gesetz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten gilt also nach unserer Theorie nur in erster Annäherung. Wir setzen:

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_{\xi}^2 + w_{\eta}^2$$

und

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{w_{\eta}}{w_{\xi}};$$

α ist dann als der Winkel zwischen den Geschwindigkeiten v und w anzusehen. Nach einfacher Rechnung ergibt sich:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw \cos \alpha) - \left(\frac{vw \sin \alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw \cos \alpha}{V^2}}.$$

Es ist bemerkenswert, daß v und w in symmetrischer Weise in den Ausdruck für die resultierende Geschwindigkeit eingehen. Hat auch w die Richtung der X -Achse (Ξ -Achse), so erhalten wir:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß aus der Zusammensetzung zweier Geschwindigkeiten, welche kleiner sind als V , stets eine Geschwindigkeit kleiner als V resultiert. Setzt man nämlich $v = V - \kappa$, $w = V - \lambda$, wobei κ und λ positiv und kleiner als V seien, so ist:

$$U = V \frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V.$$

Es folgt ferner, daß die Lichtgeschwindigkeit V durch Zusammensetzung mit einer „Unterlichtgeschwindigkeit“ nicht geändert werden kann. Man erhält für diesen Fall:

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

Wir hätten die Formel für U für den Fall, daß v und w gleiche Richtung besitzen, auch durch Zusammensetzen zweier Transformationen gemäß § 3 erhalten können. Führen wir neben den in § 3 figurierenden Systemen K und k noch ein drittes, zu k in Parallelbewegung begriffenes Koordinatensystem k' ein, dessen Anfangspunkt sich auf der Ξ -Achse mit der Geschwindigkeit w bewegt, so erhalten wir zwischen den Größen x, y, z, t und den entsprechenden Größen von k' Gleichungen, welche sich von den in § 3 gefundenen nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle von „ v “ die Größe

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}$$

tritt; man sieht daraus, daß solche Paralleltransformationen — wie dies sein muß — eine Gruppe bilden.

Wir haben nun die für uns notwendigen Sätze der unseren zwei Prinzipien entsprechenden Kinematik hergeleitet und gehen dazu über, deren Anwendung in der Elektrodynamik zu zeigen.

II. Elektrodynamischer Teil.

§ 6. Transformation der Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum. Über die Natur der bei Bewegung in einem Magnetfeld auftretenden elektromotorischen Kräfte.

Die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum mögen gültig sein für das ruhende System K , so daß gelten möge:

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial z}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},\end{aligned}$$

wobei (X, Y, Z) den Vektor der elektrischen, (L, M, N) den der magnetischen Kraft bedeutet.

Wenden wir auf diese Gleichungen die in § 3 entwickelte Transformation an, indem wir die elektromagnetischen Vorgänge auf das dort eingeführte, mit der Geschwindigkeit v bewegte Koordinatensystem beziehen, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right)}{\partial \xi}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right)}{\partial \xi}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right)}{\partial \xi} - \frac{\partial \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right)}{\partial \eta},\end{aligned}$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right)}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right)}{\partial \xi},$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V} \right)^2}}.$$

Das Relativitätsprinzip fordert nun, daß die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum auch im System k gelten, wenn sie im System K gelten, d. h. daß für die im bewegten System k durch ihre ponderomotorischen Wirkungen auf elektrische bez. magnetische Massen definierten Vektoren der elektrischen und magnetischen Kraft $((X', Y' Z')$ und (L', M', N')) des bewegten Systems k die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{\partial X'}{\partial \tau} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Y'}{\partial \tau} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Z'}{\partial \tau} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Offenbar müssen nun die beiden für das System k gefundenen Gleichungssysteme genau dasselbe ausdrücken, da beide Gleichungssysteme den Maxwell-Hertzschen Gleichungen für das System K äquivalent sind. Da die Gleichungen beider Systeme ferner bis auf die die Vektoren darstellenden Symbole übereinstimmen, so folgt, daß die in den Gleichungssystemen an entsprechenden Stellen auftretenden Funktionen bis auf einen für alle Funktionen des einen Gleichungssystems gemeinsamen, von ξ , η , ζ und τ unabhängigen, eventuell von v abhängigen Faktor $\psi(v)$ übereinstimmen müssen. Es gelten also die Beziehungen:

$$\begin{aligned} X' &= \psi(v) X, & L' &= \psi(v) L, \\ Y' &= \psi(v) \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right), & M' &= \psi(v) \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right), \\ Z' &= \psi(v) \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right), & N' &= \psi(v) \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right). \end{aligned}$$

Bildet man nun die Umkehrung dieses Gleichungssystems, erstens durch Auflösen der soeben erhaltenen Gleichungen, zweitens durch Anwendung der Gleichungen auf die inverse Transformation (von k auf K), welche durch die Geschwindigkeit $-v$ charakterisiert ist, so folgt, indem man berücksichtigt, daß die beiden so erhaltenen Gleichungssysteme identisch sein müssen:

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1.$$

Ferner folgt aus Symmetriegründen¹⁾

$$\varphi(v) = \varphi(-v);$$

es ist also

$$\varphi(v) = 1,$$

und unsere Gleichungen nehmen die Form an:

$$\begin{aligned} X &= X, & L &= L, \\ Y &= \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right), & M &= \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right), \\ Z &= \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right), & N &= \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right). \end{aligned}$$

Zur Interpretation dieser Gleichungen bemerken wir folgendes. Es liegt eine punktförmige Elektrizitätsmenge vor, welche im ruhenden System K gemessen von der Größe „eins“ sei, d. h. im ruhenden System ruhend auf eine gleiche Elektrizitätsmenge im Abstand 1 cm die Kraft 1 Dyn ausübe. Nach dem Relativitätsprinzip ist diese elektrische Masse auch im bewegten System gemessen von der Größe „eins“. Ruht diese Elektrizitätsmenge relativ zum ruhenden System, so ist definitionsgemäß der Vektor (X, Y, Z) gleich der auf sie wirkenden Kraft. Ruht die Elektrizitätsmenge gegenüber dem bewegten System (wenigstens in dem betreffenden Augenblick), so ist die auf sie wirkende, in dem bewegten System gemessene Kraft gleich dem Vektor (X', Y', Z') . Die ersten drei der obigen Gleichungen lassen sich mithin auf folgende zwei Weisen in Worte kleiden:

1. Ist ein punktförmiger elektrischer Einheitspol in einem elektromagnetischen Felde bewegt, so wirkt auf ihn außer der

1) Ist z. B. $X = Y = Z = L = M = 0$ und $N \neq 0$, so ist aus Symmetriegründen klar, daß bei Zeichenwechsel von v ohne Änderung des numerischen Wertes auch Y' sein Vorzeichen ändern muß, ohne seinen numerischen Wert zu ändern.

elektrischen Kraft eine „elektromotorische Kraft“, welche unter Vernachlässigung von mit der zweiten und höheren Potenzen von v/V multiplizierten Gliedern gleich ist dem mit der Lichtgeschwindigkeit dividierten Vektorprodukt der Bewegungsgeschwindigkeit des Einheitspoles und der magnetischen Kraft. (Alte Ausdrucksweise.)

2. Ist ein punktförmiger elektrischer Einheitspol in einem elektromagnetischen Felde bewegt, so ist die auf ihn wirkende Kraft gleich der an dem Orte des Einheitspoles vorhandenen elektrischen Kraft, welche man durch Transformation des Feldes auf ein relativ zum elektrischen Einheitspol ruhendes Koordinatensystem erhält. (Neue Ausdrucksweise.)

Analoges gilt über die „magnetomotorischen Kräfte“. Man sieht, daß in der entwickelten Theorie die elektromotorische Kraft nur die Rolle eines Hilfsbegriffes spielt, welcher seine Einführung dem Umstande verdankt, daß die elektrischen und magnetischen Kräfte keine von dem Bewegungszustande des Koordinatensystems unabhängige Existenz besitzen.

Es ist ferner klar, daß die in der Einleitung angeführte Asymmetrie bei der Betrachtung der durch Relativbewegung eines Magneten und eines Leiters erzeugten Ströme verschwindet. Auch werden die Fragen nach dem „Sitz“ der elektrodynamischen elektromotorischen Kräfte (Unipolarmaschinen) gegenstandslos.

§ 7. Theorie des Doppellerschen Prinzips und der Aberration.

Im Systeme K befinde sich sehr ferne vom Koordinatenursprung eine Quelle elektrodynamischer Wellen, welche in einem den Koordinatenursprung enthaltenden Raumteil mit genügender Annäherung durch die Gleichungen dargestellt sei:

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin \Phi, & L &= L_0 \sin \Phi, \\ Y &= Y_0 \sin \Phi, & M &= M_0 \sin \Phi, & \Phi &= \omega \left(t - \frac{ax + by + cz}{V} \right), \\ Z &= Z_0 \sin \Phi, & N &= N_0 \sin \Phi, \end{aligned}$$

Hierbei sind (X_0, Y_0, Z_0) und (L_0, M_0, N_0) die Vektoren, welche die Amplitude des Wellenzuges bestimmen, a, b, c die Richtungskosinus der Wellennormalen.

Wir fragen nach der Beschaffenheit dieser Wellen, wenn dieselben von einem in dem bewegten System k ruhenden

Beobachter untersucht werden. — Durch Anwendung der in § 6 gefundenen Transformationsgleichungen für die elektrischen und magnetischen Kräfte und der in § 3 gefundenen Transformationsgleichungen für die Koordinaten und die Zeit erhalten wir unmittelbar:

$$X' = X_0 \sin \Phi', \quad L' = L_0 \sin \Phi',$$

$$Y' = \beta \left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0 \right) \sin \Phi', \quad M' = \beta \left(M_0 + \frac{v}{V} Z_0 \right) \sin \Phi',$$

$$Z' = \beta \left(Z_0 + \frac{v}{V} M_0 \right) \sin \Phi', \quad N' = \beta \left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0 \right) \sin \Phi',$$

$$\Phi' = \omega' \left(\tau - \frac{a' \xi + b' \eta + c' \zeta}{V} \right),$$

wobei

$$\omega' = \omega \beta \left(1 - a \frac{v}{V} \right),$$

$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a \frac{v}{V}},$$

$$b' = \frac{b}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V} \right)},$$

$$c' = \frac{c}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V} \right)}$$

gesetzt ist.

Aus der Gleichung für ω' folgt: Ist ein Beobachter relativ zu einer unendlich fernen Lichtquelle von der Frequenz ν mit der Geschwindigkeit v derart bewegt, daß die Verbindungslinie „Lichtquelle–Beobachter“ mit der auf ein relativ zur Lichtquelle ruhendes Koordinatensystem bezogenen Geschwindigkeit des Beobachters den Winkel φ bildet, so ist die von dem Beobachter wahrgenommene Frequenz ν' des Lichtes durch die Gleichung gegeben:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos \varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V} \right)^2}}.$$

Dies ist das Doppeltersche Prinzip für beliebige Geschwindig-

keiten. Für $\varphi = 0$ nimmt die Gleichung die übersichtliche Form an:

$$v' = v \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Man sieht, daß — im Gegensatz zu der üblichen Auffassung — für $v = -\infty$, $v' = \infty$ ist.

Nennt man φ' den Winkel zwischen Wellennormale (Strahlrichtung) im bewegten System und der Verbindungslinie „Lichtquelle—Beobachter“, so nimmt die Gleichung für α' die Form an:

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}.$$

Diese Gleichung drückt das Aberrationsgesetz in seiner allgemeinsten Form aus. Ist $\varphi = \pi/2$, so nimmt die Gleichung die einfache Gestalt an:

$$\cos \varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Wir haben nun noch die Amplitude der Wellen, wie dieselbe im bewegten System erscheint, zu suchen. Nennt man A bez. A' die Amplitude der elektrischen oder magnetischen Kraft im ruhenden bez. im bewegten System gemessen, so erhält man:

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V} \cos \varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

welche Gleichung für $\varphi = 0$ in die einfachere übergeht:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Es folgt aus den entwickelten Gleichungen, daß für einen Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit V einer Lichtquelle näherte, diese Lichtquelle unendlich intensiv erscheinen müßte.

§ 8. Transformation der Energie der Lichtstrahlen. Theorie des auf vollkommene Spiegel ausgeübten Strahlungsdruckes.

Da $A^2/8\pi$ gleich der Lichtenergie pro Volumeneinheit ist, so haben wir nach dem Relativitätsprinzip $A'^2/8\pi$ als die Lichtenergie im bewegten System zu betrachten. Es wäre daher A'^2/A^2 das Verhältnis der „bewegt gemessenen“ und „ruhend gemessenen“ Energie eines bestimmten Lichtkomplexes, wenn das Volumen eines Lichtkomplexes in K gemessen und in K' gemessen das gleiche wäre. Dies ist jedoch nicht der Fall. Sind a, b, c die Richtungskosinus der Wellennormalen des Lichtes im ruhenden System, so wandert durch die Oberflächenelemente der mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Kugel-
fläche

$$(x - V a t)^2 + (y - V b t)^2 + (z - V c t)^2 = R^2$$

keine Energie hindurch; wir können daher sagen, daß diese Fläche dauernd denselben Lichtkomplex umschließt. Wir fragen nach der Energiemenge, welche diese Fläche im System K' betrachtet umschließt, d. h. nach der Energie des Lichtkomplexes relativ zum System K' .

Die Kugelfläche ist — im bewegten System betrachtet — eine Ellipsoidfläche, welche zur Zeit $\tau = 0$ die Gleichung besitzt:

$$\left(\beta \xi - a \beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 + \left(\eta - b \beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 + \left(\zeta - c \beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 = R^2.$$

Nennt man S das Volumen der Kugel, S' dasjenige dieses Ellipsoides, so ist, wie eine einfache Rechnung zeigt:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}.$$

Nennt man also E die im ruhenden System gemessene, E' die im bewegten System gemessene Lichtenergie, welche von der betrachteten Fläche umschlossen wird, so erhält man:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi} S'}{\frac{A^2}{8\pi} S} = \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

welche Formel für $\varphi = 0$ in die einfachere übergeht:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Es ist bemerkenswert, daß die Energie und die Frequenz eines Lichtkomplexes sich nach demselben Gesetze mit dem Bewegungszustande des Beobachters ändern.

Es sei nun die Koordinatenebene $\xi = 0$ eine vollkommen spiegelnde Fläche, an welcher die im letzten Paragraph betrachteten ebenen Wellen reflektiert werden. Wir fragen nach dem auf die spiegelnde Fläche ausgeübten Lichtdruck und nach der Richtung, Frequenz und Intensität des Lichtes nach der Reflexion.

Das einfallende Licht sei durch die Größen A , $\cos \varphi$, v (auf das System K bezogen) definiert. Von K aus betrachtet sind die entsprechenden Größen:

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi},$$

$$v' = v \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Für das reflektierte Licht erhalten wir, wenn wir den Vorgang auf das System K beziehen:

$$A'' = A',$$

$$\cos \varphi'' = -\cos \varphi',$$

$$v'' = v'.$$

Endlich erhält man durch Rücktransformieren aufs ruhende System K für das reflektierte Licht:

$$A''' = A'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2 \frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos \varphi''' = \frac{\cos \varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''} = - \frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right) \cos \varphi - 2 \frac{v}{V}}{1 - 2 \frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$v''' = v'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = v \frac{1 - 2 \frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}.$$

Die auf die Flächeneinheit des Spiegels pro Zeiteinheit auftreffende (im ruhenden System gemessene) Energie ist offenbar $A^2/8\pi (V \cos \varphi - v)$. Die von der Flächeneinheit des Spiegels in der Zeiteinheit sich entfernende Energie ist $A'^2/8\pi (-V \cos \varphi''' + v)$. Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist nach dem Energieprinzip die vom Lichtdrucke in der Zeiteinheit geleistete Arbeit. Setzt man die letztere gleich dem Produkt $P \cdot v$, wobei P der Lichtdruck ist, so erhält man:

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \frac{\left(\cos \varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

In erster Annäherung erhält man in Übereinstimmung mit der Erfahrung und mit anderen Theorien

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \cos^2 \varphi.$$

Nach der hier benutzten Methode können alle Probleme der Optik bewegter Körper gelöst werden. Das Wesentliche ist, daß die elektrische und magnetische Kraft des Lichtes, welches durch einen bewegten Körper beeinflußt wird, auf ein relativ zu dem Körper ruhendes Koordinatensystem transformiert werden. Dadurch wird jedes Problem der Optik bewegter Körper auf eine Reihe von Problemen der Optik ruhender Körper zurückgeführt.

§ 9. Transformation der Maxwell-Hertzschen Gleichungen
mit Berücksichtigung der Konvektionsströme.

Wir gehen aus von den Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \left\{ u_x \varrho + \frac{\partial X}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_y \varrho + \frac{\partial Y}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_z \varrho + \frac{\partial Z}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},\end{aligned}$$

wobei

$$\varrho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

die 4π -fache Dichte der Elektrizität und (u_x, u_y, u_z) den Geschwindigkeitsvektor der Elektrizität bedeutet. Denkt man sich die elektrischen Massen unveränderlich an kleine, starre Körper (Ionen, Elektronen) gebunden, so sind diese Gleichungen die elektromagnetische Grundlage der Lorentzschen Elektrodynamik und Optik bewegter Körper.

Transformiert man diese Gleichungen, welche im System K gelten mögen, mit Hilfe der Transformationsgleichungen von § 3 und § 6 auf das System k , so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \left\{ u_x \varrho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_y \varrho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_z \varrho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} &= u_\xi, \\ \frac{u_y}{\beta \left(1 - \frac{u_x v}{V^2} \right)} &= u_\eta, & \varrho' &= \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta \left(1 - \frac{v u_x}{V^2} \right) \varrho, \\ \frac{u_z}{\beta \left(1 - \frac{u_x v}{V^2} \right)} &= u_\zeta.\end{aligned}$$

Da — wie aus dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten (§ 5) folgt — der Vektor (u_x, u_y, u_z) nichts anderes ist als die Geschwindigkeit der elektrischen Massen im System k gemessen, so ist damit gezeigt, daß unter Zugrundelegung unserer kinematischen Prinzipien die elektrodynamische Grundlage der Lorentzschen Theorie der Elektrodynamik bewegter Körper dem Relativitätsprinzip entspricht.

Es möge noch kurz bemerkt werden, daß aus den entwickelten Gleichungen leicht der folgende wichtige Satz gefolgert werden kann: Bewegt sich ein elektrisch geladener Körper beliebig im Raume und ändert sich hierbei seine Ladung nicht, von einem mit dem Körper bewegten Koordinatensystem aus betrachtet, so bleibt seine Ladung auch — von dem „ruhenden“ System K aus betrachtet — konstant.

§ 10. Dynamik des (langsam beschleunigten) Elektrons.

In einem elektromagnetischen Felde bewege sich ein punktförmiges, mit einer elektrischen Ladung e versehenes Teilchen (im folgenden „Elektron“ genannt), über dessen Bewegungsgesetz wir nur folgendes annehmen:

Ruht das Elektron in einer bestimmten Epoche, so erfolgt in dem nächsten Zeiteilchen die Bewegung des Elektrons nach den Gleichungen

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = e X$$

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} = e Y$$

$$\mu \frac{d^2 z}{dt^2} = e Z,$$

wobei x, y, z die Koordinaten des Elektrons, μ die Masse des Elektrons bedeutet, sofern dasselbe langsam bewegt ist.

Es besitze nun zweitens das Elektron in einer gewissen Zeitepoche die Geschwindigkeit v . Wir suchen das Gesetz, nach welchem sich das Elektron im unmittelbar darauf folgenden Zeiteilchen bewegt.

Ohne die Allgemeinheit der Betrachtung zu beeinflussen, können und wollen wir annehmen, daß das Elektron in dem Momente, wo wir es ins Auge fassen, sich im Koordinaten-

sprung befinde und sich längs der X -Achse des Systems K mit der Geschwindigkeit v bewege. Es ist dann einleuchtend, daß das Elektron im genannten Momente ($t = 0$) relativ zu einem längs der X -Achse mit der konstanten Geschwindigkeit v parallelbewegten Koordinatensystem k ruht.

Aus der oben gemachten Voraussetzung in Verbindung mit dem Relativitätsprinzip ist klar, daß sich das Elektron in der unmittelbar folgenden Zeit (für kleine Werte von t) vom System k aus betrachtet nach den Gleichungen bewegt:

$$\mu \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = e X',$$

$$\mu \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} = e Y',$$

$$\mu \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} = e Z',$$

wobei die Zeichen $\xi, \eta, \zeta, \tau, X', Y', Z'$ sich auf das System k beziehen. Setzen wir noch fest, daß für $t = x = y = z = 0$ $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$ sein soll, so gelten die Transformationsgleichungen der §§ 3 und 6, so daß gilt:

$$\tau = \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x \right),$$

$$\xi = \beta (x - v t), \quad X' = X,$$

$$\eta = y, \quad Y' = \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right),$$

$$\zeta = z, \quad Z' = \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right).$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen transformieren wir die obigen Bewegungsgleichungen vom System k auf das System K und erhalten:

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{e}{\mu} \frac{1}{\beta^3} X, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{e}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Y - \frac{v}{V} N \right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{e}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Z + \frac{v}{V} M \right). \end{cases}$$

Wir fragen nun in Anlehnung an die übliche Betrachtungsweise nach der „longitudinalen“ und „transversalen“ Masse

des bewegten Elektrons. Wir schreiben die Gleichungen (A) in der Form

$$\begin{aligned}\mu \beta^3 \frac{d^2 x}{dt^2} &= \varepsilon X = \varepsilon X', \\ \mu \beta^3 \frac{d^2 y}{dt^2} &= \varepsilon \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right) = \varepsilon Y', \\ \mu \beta^3 \frac{d^2 z}{dt^2} &= \varepsilon \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right) = \varepsilon Z'\end{aligned}$$

und bemerken zunächst, daß $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ die Komponenten der auf das Elektron wirkenden ponderomotorischen Kraft sind, und zwar in einem in diesem Moment mit dem Elektron mit gleicher Geschwindigkeit wie dieses bewegten System betrachtet. (Diese Kraft könnte beispielsweise mit einer im letzten System ruhenden Federwage gemessen werden.) Wenn wir nun diese Kraft schlechtweg „die auf das Elektron wirkende Kraft“ nennen und die Gleichung

$$\text{Massenzahl} \times \text{Beschleunigungszahl} = \text{Kraftzahl}$$

aufrechterhalten, und wenn wir ferner festsetzen, daß die Beschleunigungen im ruhenden System K gemessen werden sollen, so erhalten wir aus obigen Gleichungen:

$$\text{Longitudinale Masse} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V} \right)^2} \right)^3},$$

$$\text{Transversale Masse} = \frac{\mu}{1 - \left(\frac{v}{V} \right)^2}.$$

Natürlich würde man bei anderer Definition der Kraft und der Beschleunigung andere Zahlen für die Massen erhalten; man ersieht daraus, daß man bei der Vergleichung verschiedener Theorien der Bewegung des Elektrons sehr vorsichtig verfahren muß.

Wir bemerken, daß diese Resultate über die Masse auch für die ponderablen materiellen Punkte gilt; denn ein ponderabler materieller Punkt kann durch Zufügen einer *beliebig kleinen* elektrischen Ladung zu einem Elektron (in unserem Sinne) gemacht werden.

Wir bestimmen die kinetische Energie des Elektrons. Bewegt sich ein Elektron vom Koordinatenursprung des Systems K aus mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 beständig auf der

X -Achse unter der Wirkung einer elektrostatischen Kraft X , so ist klar, daß die dem elektrostatischen Felde entzogene Energie den Wert $\int \epsilon X dx$ hat. Da das Elektron langsam beschleunigt sein soll und infolgedessen keine Energie in Form von Strahlung abgeben möge, so muß die dem elektrostatischen Felde entzogene Energie gleich der Bewegungsenergie W des Elektrons gesetzt werden. Man erhält daher, indem man beachtet, daß während des ganzen betrachteten Bewegungsvorganges die erste der Gleichungen (A) gilt:

$$W = \int \epsilon X dx = \int_0^v \beta^2 v dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

W wird also für $v = V$ unendlich groß. Überlichtgeschwindigkeiten haben — wie bei unseren früheren Resultaten — keine Existenzmöglichkeit.

Auch dieser Ausdruck für die kinetische Energie muß dem oben angeführten Argument zufolge ebenso für ponderable Massen gelten.

Wir wollen nun die aus dem Gleichungssystem (A) resultierenden, dem Experimente zugänglichen Eigenschaften der Bewegung des Elektrons aufzählen.

1. Aus der zweiten Gleichung des Systems (A) folgt, daß eine elektrische Kraft F und eine magnetische Kraft N dann gleich stark ablenkend wirken auf ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes Elektron, wenn $F = N \cdot v/V$. Man ersieht also, daß die Ermittlung der Geschwindigkeit des Elektrons aus dem Verhältnis der magnetischen Ablenkbarkeit A_m und der elektrischen Ablenkbarkeit A_e nach unserer Theorie für beliebige Geschwindigkeiten möglich ist durch Anwendung des Gesetzes:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Diese Beziehung ist der Prüfung durch das Experiment zugänglich, da die Geschwindigkeit des Elektrons auch direkt, z. B. mittels rasch oszillierender elektrischer und magnetischer Felder, gemessen werden kann.

2. Aus der Ableitung für die kinetische Energie des Elektrons folgt, daß zwischen der durchlaufenen Potential-

differenz und der erlangten Geschwindigkeit v des Elektrons die Beziehung gelten muß:

$$P = \int X dx = \frac{\mu}{s} v^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Wir berechnen den Krümmungsradius R der Bahn, wenn eine senkrecht zur Geschwindigkeit des Elektrons wirkende magnetische Kraft N (als einzige ablenkende Kraft) vorhanden ist. Aus der zweiten der Gleichungen (A) erhalten wir:

$$-\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{s}{\mu} \frac{v}{V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

oder

$$R = v^2 \frac{\mu}{s} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

Diese drei Beziehungen sind ein vollständiger Ausdruck für die Gesetze, nach denen sich gemäß vorliegender Theorie das Elektron bewegen muß.

Zum Schlusse bemerke ich, daß mir beim Arbeiten an dem hier behandelten Probleme mein Freund und Kollege M. Besso treu zur Seite stand und daß ich demselben manche wertvolle Anregung verdanke.

Bern, Juni 1905.

(Eingegangen 30. Juni 1905.)