



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
CAMPUS PARNAÍBA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

DIEGO CONCEIÇÃO CARVALHO

**PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR MOLAS: UMA INVESTIGAÇÃO POR
VIDEOANÁLISE E ARDUINO**

PARNAÍBA
2022

DIEGO CONCEIÇÃO CARVALHO

PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR MOLAS: UMA INVESTIGAÇÃO POR
VIDEOANÁLISE E ARDUINO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. *Campus Parnaíba*.

Orientador: Prof. Dr. Alexandro das Chagas de Sousa
Nascimento

Coorientador: Prof. Me. Itamar Vieira de Sousa Júnior

PARNAÍBA
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

Carvalho , Diego Conceição

C331p Pêndulos físicos acoplados por molas : uma investigação por videoanálise e Arduino / Diego Conceição Carvalho . - 2022.
85 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto Federal do Piauí, Campus Parnaíba, 2022.

Orientador : Prof. Dr. Alexandro das Chagas de Sousa Nascimento .

Coorientador : Prof. Me. Itamar Vieira de Sousa Júnior.

1. Física - Ensino . 2. Pêndulo físico . 3. Arduino . I. Título.

CDD - 530

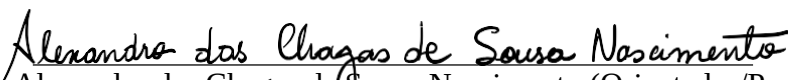
Elaborado por Micheline Angélica Aragão Gouveia CRB 3/1244

**PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR MOLAS: UMA
INVESTIGAÇÃO POR VIDEOANÁLISE E ARDUINO**

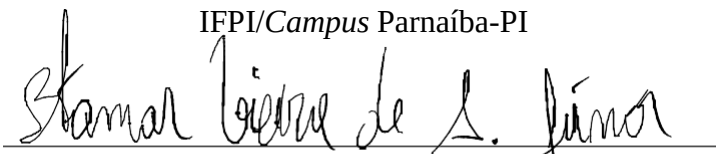
DIEGO CONCEIÇÃO CARVALHO

Aprovado em 17 de fevereiro de 2022.

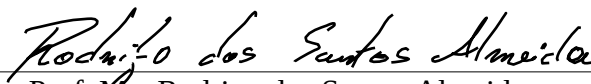
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Física do
IFPI/ Campus Parnaíba, aprovado pela Banca Examinadora:


Prof. Dr. Alexandre das Chagas de Sousa Nascimento (Orientador/Presidente)

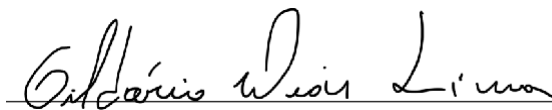
IFPI/Campus Parnaíba-PI


Prof. Me. Itamar Vieira de Sousa Júnior (Coorientador)

IFPI/Campus Parnaíba-PI


Prof. Me. Rodrigo dos Santos Almeida

IFPI/Campus Parnaíba-PI


Prof. Dr. Gildário Dias Lima

Prof. Dr. Gildário Dias Lima

UFDPAr - Parnaíba-PI

Dedico este trabalho aos meus orientadores,
família, amigos e a minha namorada, que me
apoiam e me incentivaram a realizá-lo.

AGRADECIMENTOS

A finalização com êxito deste trabalho de carácter investigativo não teria sido possível sem as contribuições de diversas pessoas desta instituição de ensino, que mesmo sem nenhum vínculo oficial com o trabalho, se dispuseram a contribuir para a sua realização.

Ao Professor Doutor Alexandro das Chagas de Sousa Nascimento agradeço pelas sábias orientações, a motivação e empenho pelo estudo e aos momentos dispostos para sanar dúvidas. O sucesso deste trabalho deve-se muito à sua competência e olhar clínico para questões analíticas, sendo que seu forte espírito científico e criativo renderam a mim encontros proveitosos, agradáveis e produtivos.

Devo gratular também ao Professor Mestre Itamar Vieira de Sousa Júnior (coorientador), a quem tenho um forte apreço e admiração por seus estudos e didática em sala de aula, sendo inclusive meu primeiro e último professor em disciplinas específicas nesta jornada de graduação.

Um agradecimento especial a Rodrigo dos Santos Almeida, técnico de laboratório e ao professor Lucas Izídio de Sousa Sampaio por disponibilizar de seus conhecimentos e de seu tempo para nos auxiliar na impressão das peças em 3D.

Agradeço impreterivelmente à minha família, em especial aos meus pais Rocilda do Carmo Conceição e Adalberto de França Carvalho e a minha irmã Darislene Conceição Carvalho, que me apoiaram e seguem apoiando em todas minhas decisões e que me auxiliaram financeira e moralmente tanto antes como durante todo este percurso acadêmico.

A todos os meus amigos que fiz durante este período de graduação, em especial a Winklei Brandão de Araújo, que me proporcionou momentos de muita descontração, leveza, e aprendizado. A Rodrigo Rodrigues; Lucas de Oliveira; Zilmara Albuquerque; Carlos Victor; Humberto Santos; Rosemeire Açucena; Vitor de Sousa Rodrigues; Eduardo Cardozo e às minhas parceiras do curso de licenciatura em Química, Kamila Macedo e Luana Chris Sousa e meu parceiro Wellington Silva Aguiar.

Gostaria de agradecer imensamente a Kevin Santos e Daiane do Nascimento, que me apoiaram e me acolheram em um período muito difícil de minha vida.

Por fim, agradeço a minha namorada Cecília Sávia Oliveira Aguiar por companheirismo, carinho e apoio. Além de me completar como pessoa, ela me ajudou a passar por momentos turbulentos e me proporcionou muitos momentos incríveis e inesquecíveis. Por ela fui orientado em muitas de minhas decisões, inclusive acadêmicas, o que serviu consideravelmente no meu crescimento pessoal e profissional.

“Meu objetivo é expor uma ciência muito nova que trata de um tema muito antigo. Talvez nada na natureza seja mais antigo que o movimento...”

Galileu Galilei

“A unidade é a variedade, e a variedade na unidade é a suprema lei do Universo”.

Isaac Newton

“A coisa mais incompreensível que há no Universo é o facto de ele ser compreensível”.

Albert Einstein

RESUMO

CARVALHO, Diego. PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR MOLAS: UMA INVESTIGAÇÃO POR VIDEOANÁLISE E ARDUINO. 2022. 85 f. Trabalho de Conclusão de Curso – , Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. *Campus* Parnaíba. Parnaíba, 2022.

A utilização de tecnologias educacionais livres no ensino de Física tem atraído grande interesse da comunidade científica e dentro da sala de aula como uma forma de agregar para uma aprendizagem mais efetiva e autônoma. Nesse contexto, a realização de atividades experimentais em aulas de física mediadas por ferramentas tecnológicas que possibilitem aos estudantes tornarem-se agentes centrais e ativos no processo de aprendizagem e que apresentem flexibilidade de uso, baixo custo e ao mesmo tempo uma boa precisão de medidas físicas, são de fundamental importância dentro do contexto de ensino moderno. Portanto, para contemplar esses aspectos, propomos uma análise da dinâmica de oscilações de pêndulos físicos livres e com acoplamento por molas. As medidas são realizadas com um uso de duas abordagens: (i) encoder incremental rotativo ligado a uma placa Arduino para medidas de deslocamento angular e (ii) Tracker, um software livre de videoanálise. Os resultados obtidos por ambos os métodos apresentam resultados bem satisfatório entre si, além de boa concordância com o modelo teórico. Para o caso particular do pêndulo físico desacoplado, verifica-se como o período de oscilação depende da distribuição de massa do pêndulo. Adicionalmente, a aceleração da gravidade e momento de inércia total dos sistema foi obtido em concordância com o modelo teórico. Para o sistema de dois pêndulos físicos acoplados, usamos o Tracker para analisar importantes informações a respeito do período de oscilação para modos simétricos e antissimétricos e período do batimento em termos da posição das molas de acoplamento. Por fim, as técnicas de modelagem e impressão de componentes 3D, bem como os métodos de coleta de dados com o Arduino e Tracker, mostram-se de grande relevância para o ensino de Física, e abrem as portas de investigação para sistemas mais avançados baseados em Arduino.

Palavras-chave: Ensino de Física. Pêndulo físico. Oscilações acopladas. Arduino. Videoanálise.

ABSTRACT

CARVALHO, Diego. PHYSICAL PENDULUMS COUPLED WITH SPRINGS: A INVESTIGATION BY VIDEOANALYSIS AND ARDUINO. 2022. 85 f. Trabalho de Conclusão de Curso – , Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. *Campus Parnaíba*. Parnaíba, 2022.

The use of free educational technologies in the teaching of Physics has attracted significant interest from the scientific community and within the classroom to add to more effective and autonomous learning. In this context, carrying out experimental activities in physics classes mediated by technological tools that allow students to become central and active agents in the learning process and that present flexibility of use, low cost, and at the same time a good precision of physical measurements are of fundamental importance within the context of modern education. Thus, to contemplate these aspects, we propose an analysis of the dynamics of oscillations of free physical pendulums and spring coupling. The measurements are performed using two approaches: (i) a rotary incremental encoder connected to an Arduino board for angular displacement measurements and (ii) Tracker, a free video analysis software. The results obtained by both methods present very satisfactory results among themselves and good agreement with the theoretical model. In the particular case of the uncoupled physical pendulum, we verified how the period of oscillation depends on the pendulum's mass distribution. In addition, the acceleration of gravity and the total moment of inertia of the system were obtained in agreement with the theoretical model. For the system of two coupled physical pendulums, we used Tracker to analyze important information regarding the period of oscillation for symmetrical and antisymmetrical modes and the period of the beat in terms of the position of the coupling springs. Lastly, the 3D components modeling and impression techniques, as well as data collection methods with the Arduino and Tracker, show themselves to be of great relevance to teaching Physics, and open up to the investigation doors to more advanced systems based in Arduino.

Keywords: Teaching Physics. Physical pendulum. Coupled oscillation. Videoanalysis. Arduino.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Interface inicial do programa Tracker para o caso de estudo de oscilações livre.	22
Figura 3.2 – <i>Hardware</i> Arduino MEGA 2560.	24
Figura 3.3 – Interface inicial IDE Arduino.	25
Figura 3.4 – Exemplos de <i>shields</i>	26
Figura 3.5 – Encoder rotativo incremental.	27
Figura 3.6 – Esquema de funcionamento de um encoder incremental.	27
Figura 3.7 – Representação de ondas quadradas emitidas por um sensor encoder rotativo incremental.	28
Figura 4.1 – Corpo com dimensões e formato quaisquer.	31
Figura 4.2 – Cilindro com eixo fixo em relação ao seu centro de massa.	32
Figura 4.3 – Barra delgada com eixo fixo em relação ao seu centro de massa.	33
Figura 4.4 – Representação de um pêndulo físico.	34
Figura 5.1 – Pêndulos acoplados e parâmetros do sistema.	39
Figura 5.2 – Modos normais de vibração.	44
Figura 5.3 – A (a) expõe o gráfico geral de $\theta_1(t)$ e (b), o gráfico de $\theta_2(t)$, para o caso das condições iniciais dadas. A modulação da amplitude leva ao fenômeno dos batimentos, com o período para $\theta_{1\text{máx}}(t)$ (linhas cheias) muito maior que o período de $\theta_1(t)$ (linhas interrompidas). Para ambos os casos, $1/\Delta v \gg 1/\bar{v}$, ou seja, o período da envoltória é muito maior que o da própria oscilação.	48
Figura 5.4 – Compreende-se como d a distância entre os pêndulos e também como o comprimento da mola relaxada. Note que a massa do pêndulo 1 (esquerda) é muito maior que a massa do pêndulo 2 (direita).	49
Figura 5.5 – (a) O gráfico em vermelho representa o deslocamento inicial do pêndulo 1 (esquerda) e (b) o gráfico em amarelo representa o pêndulo 2 inicialmente em repouso (direita). Em (c) tem-se o gráfico resultante da superposição das ondas com frequências naturais distintas.	50
Figura 6.1 – Representação dos aparatos utilizados. Em (a) a barra roscada de 1/4" com seus respectivos parafusos, em seguida (b), um recorte do alumínio estrutural, em (c) a impressora Ender 3 Creality v.1 e em (d) os parafusos utilizados para fixação das peças impressas em 3D e em sua estrutura.	51

Figura 6.2 – Em (a), o sensor de posição angular utilizado no experimento para o caso das oscilações livres. Na subfigura (b), tem-se a esquematização do tripé. Após a correção de paralaxe, o tripé ficou posicionado a 181 cm do aparato experimental, com a altura de sua base a câmera do celular sendo de 50 cm, estando a câmera exatamente ao centro do sistema. . .	52
Figura 6.3 – Vista lateral para esquematização de todas as peças 3D. Note que o sentido de giração da Peça F (que está vinculada a uma porca) determina a sua posição ao longo da barra.	53
Figura 6.4 – Cilindros (peça F) preenchidos com argamassa. Em (a), tem-se o cilindro completo (i), com (ii) mostrando o parafuso para ajuste de altura, seguido de (iii) onde mostra-se o preenchimento com argamassa e em (iv) a tampa do cilindro. Na subfigura (b) uma vista de lado com destaque ao ponto preto para detecção no Tracker.	54
Figura 6.5 – Em ambos os métodos de captura de dados, foi utilizada uma régua milimétrica magnética como fundo de escala a fim de garantir o abandono em posições sempre iguais com 100 <i>mm</i> de amplitude.	55
Figura 6.6 – Aparato experimental para determinação da constante da mola.	56
Figura 6.7 – Circuito Arduino utilizado.	58
Figura 7.1 – Comparação entre os gráficos de θ em função do tempo obtidos em ambos os métodos para a distância de 8,5 cm do eixo à massa cilíndrica. . .	61
Figura 7.2 – T em função de h (Arduino & Tracker).	62
Figura 7.3 – T em função de h para cada um dos métodos.	63
Figura 7.4 – Relação linear entre Y e X da Eq. (7.3).	65
Figura 7.5 – Dependência de ω_a^2 em função de l^2 para os pêndulos 1 e 2.	67
Figura 7.6 – Dependência de ω_s^2 em função de l^2 para os pêndulos 1 e 2.	68
Figura 7.7 – Sistema de pêndulos físicos acoplados para análise dos batimentos. Para o caso da figura, tem-se M para cada um dos cilindros.	70
Figura 7.8 – Oscilações livres para 3M e 3M.	71
Figura 7.9 – Oscilações livres para 3M e 2M para os pêndulos 1 e 2, respectivamente. . .	72
Figura 7.10–Batimentos ressonantes sob condições iniciais $\theta_1(0) = \theta_A$; $\theta_2(0) = 0$. . .	73
Figura 7.11–Batimentos sob condições iniciais $\theta_1(0) = 0$; $\theta_2(0) = \theta_B$ para pêndulo 1 com 3M e pêndulo 2 com 2M.	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Conexões.	29
Tabela 6.1 – Determinação das constantes das molas.	57
Tabela 7.1 – Dados obtidos por meio de regressão linear	64
Tabela 7.2 – Comparação entre valores experimentais e teóricos para o momento de inércia.	65
Tabela 7.3 – Valores para a frequência angular nos modos simétrico e antissimétrico para ambos os pêndulos.	66
Tabela 7.4 – Dados para ω_0 a partir de análise direta.	68
Tabela 7.5 – Períodos da amplitudes modulantes e moduladas para o pêndulos 1 e 2. Os menores valores correspondem às oscilações rápidas, ou seja, as modulantes, já os maiores valores de período correspondem às oscilações lentas, que possuem suas amplitudes moduladas.	74
Tabela 7.6 – Períodos da amplitudes modulantes e moduladas para o pêndulos 1 e 2 (3M e 2M).	76

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

RLC	Circuito ressonante
TIC's	Tecnologias da Informação e Comunicação
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
FPS	Frames per second (frames por segundo)
LED	Light Emitting Diode (diodo emissor de luz)
PWM	Pulse Width Modulation (largura de pulso modulada)
GPS	Global Positioning System (Sistema de Posicionamento Global)
LCD	Liquid Crystal Display (tela de cristal líquido)
TCP	Transmission Control Protocol (Protocolo de Controle de Transmissão)

LISTA DE SÍMBOLOS

$\textcircled{R}$	Registrado
κ	Constante da mola
θ	Ângulo de oscilação
I	Momento de inércia
τ	Torque
ω	Frequência angular de oscilação
Ω	Termo de acoplamento
Θ	Constante arbitrária
φ	Constante arbitrária para condições iniciais
η	Coordenadas normais
α	Aceleração angular
P	Ponto de pivotamento
λ	Densidade linear
L	Comprimento da barra
ρ	Distância do eixo ao elemento de massa
T	Período
$\Delta\omega$	Diferença de frequências angulares
$\bar{\omega}$	Média de frequências angulares

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	15
2 – TECNOLOGIAS NO ENSINO DE FÍSICA	17
2.1 A FORMAÇÃO DO ATUAL PROFESSOR DE FÍSICA FRENTE A NOVA ERA DA EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA	17
2.2 O USO DO COMPUTADOR NO ENSINO DE FÍSICA	18
2.2.1 Modelagem e simulação computacional	18
3 – FERRAMENTAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS: TRACKER & ARDUINO	20
3.1 O MÉTODO DA VIDEOANÁLISE: SOFTWARE TRACKER	20
3.1.1 O software Tracker	21
3.2 MICROCONTROLADORES & ARDUINO	23
3.2.1 Arduino MEGA	24
3.2.2 Software IDE Arduino	25
3.2.3 <i>Shields</i>	26
3.2.4 Encoders Rotativos Incrementais	27
4 – TORQUE E MOMENTO DE INÉRCIA EM UM PÊNDULO FÍSICO	30
4.1 MOMENTO DE INÉRCIA	30
4.2 TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS (STEINER)	31
4.2.1 Momento de Inércia: Disco Circular em torno do centro	32
4.2.2 Momento de Inércia: Barra Delgada em torno de uma extremidade e do centro de massa	33
4.3 PERÍODO DE UM PÊNDULO FÍSICO	34
5 – SISTEMAS ACOPLADOS	38
5.1 SISTEMA DE PÊNDULOS ACOPLADOS	38
5.2 SISTEMA DE DOIS PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR MOLAS	39
5.2.1 Coordenadas Normais	43
5.3 AJUSTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS E OS MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO	44
5.4 BATIMENTOS RESSONANTES	45
5.5 BATIMENTOS: CASO GERAL	49
6 – PROCESSOS METODOLÓGICOS	51
6.1 PREPARAÇÃO DO EXPERIMENTO	51
6.1.1 Montagem das peças impressas no perfil de alumínio	53

6.2	CÁLCULOS PRÉVIOS: DETERMINAÇÃO DA CONSTANTE DA MOLA (κ)	56
6.3	CAPTURE DOS DADOS COM TRACKER E ARDUINO: PÊNDULO FÍSICO EM OSCILAÇÃO LIVRE	57
6.3.1	Tracker	57
6.3.2	Arduino	58
6.4	CAPTURE DOS DADOS COM TRACKER: PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS	59
6.5	DETERMINAÇÃO DO VALOR DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE	60
7	– RESULTADOS E DISCUSSÕES	61
7.1	PÊNDULO EM OSCILAÇÃO LIVRE: ARDUINO & TRACKER	61
7.1.1	Dependência funcional entre T e h e o período mínimo	62
7.1.2	Obtenção da aceleração da gravidade por meio de regressão não-linear	63
7.1.3	Obtenção do momento de inércia do centro de massa e da aceleração da gravidade por regressão linear	64
7.2	OSCILAÇÕES ACOPLADAS E MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO: TRACKER	66
7.2.1	Análise da dinâmica dos pêndulos em oscilação simétrica e antissimétrica	66
7.2.2	Estimativa do período do pêndulo livre e da constante (κ) da mola de acoplamento	68
7.3	DISCUSSÃO QUALITATIVA ACERCA DO FENÔMENOS DOS BATIMENTOS: TRACKER	70
7.3.1	Caso (i): massas iguais	71
7.3.2	Caso (ii): massas diferentes	72
7.3.3	Oscilações acopladas com massas iguais 3M para os pêndulos 1 e 2	73
7.3.4	Oscilações acopladas com massas diferentes, 3M para o pêndulo 1 e 2M para o pêndulo 2	75
8	– CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
	Referências	79
	 Apêndices	 82
	APÊNDICE A – Prévias das peças em 3D (fora de escala).	83
	APÊNDICE B – Código <i>Arduino</i>.	84

1 INTRODUÇÃO

O uso da experimentação compõe uma das partes centrais para a construção de novos conhecimentos, e conforme Moreira (2004), a sua integração dentro da sala de aula promove a assimilação de conceitos teóricos e práticos, contribuindo para uma aprendizagem significativa e para o constructo do saber matemático, científico e tecnológico que presidem a produção moderna (LEITÃO; TEIXEIRA; ROCHA, 2011; FEDERAL, 2005).

Segundo Leitão, Teixeira e Rocha (2011), dentre as possibilidades disponíveis para uso instrucional dentro de sala de aula e em laboratórios, destaca-se o método da videoanálise, dentre os quais o Tracker, como um software livre, permite que análises rigorosas possam ser realizadas, mesmo que com um baixo custo, o que é possível uma vez que basta uma câmera fotográfica de boa qualidade, um ambiente favorável um computador para analisar as filmagens do objeto estudado.

Tendo em vista sua facilidade de acesso e linguagem de programação acessível da plataforma Arduino, ela tem se tornado uma alternativa bastante popular e eficaz no meio científico, tendo contribuído bastante no ramo da pesquisa experimental nas últimas décadas, pois ao dispor de uma quantidade considerável de bibliotecas na internet que possibilitam criar, utilizar ou aprimorar projetos já existentes para a construção de um novo projeto, permite-se ter um vasto aporte em experimentos tanto didáticos dentro de uma sala de aula como também em estudos investigativos laboratoriais (ARDUINO, 2021b).

Corroborando com esta ideia, o software Tracker possui grande aplicabilidade no estudo de sistemas que envolvem movimentos, que é justamente a proposta de estudo neste trabalho. Ademais, tendo em vista a vasta aplicabilidade do uso do Arduino, torna-se possível analisar esta mesma dinâmica utilizando-se de sensores incrementais de posição, os chamados encoders rotativos, verificando então, a concordância ou não entre os dados obtidos por ambos os métodos.

Destaca-se, portanto, que os sistemas oscilantes e acoplados são encontrados em diversas situações físicas, como no estudo de circuitos RLC, problema de três corpos, teoria do caos, pêndulos acoplados, movimentos microscópicos em sólidos cristalinos, oscilação de campos magnéticos, dentre outros, contudo, este fenômeno não se restringe somente ao campo de estudo da Física em si, sendo encontradas também aplicações na área da Química e Biologia. Como exemplo, podemos citar a vibração de átomos, que por si só não constituem uma estrutura rígida, oscilando em torno de suas posições de equilíbrio, e por estarem sempre de forma aglomerada, estes movimentos oscilatórios afetam diretamente o comportamento sistemático do conjunto, o que caracteriza um sistema oscilante e acoplado (ALONSO; FINN, 2018; THORNTON; MARION, 2011).

Sendo assim, com base nos estudos realizados por Trocaru et al. (2020) e Chiriacescu et al. (2020), dentre tantos outros aqui citados, neste trabalho se propõe analisar a dinâmica de um sistema de pêndulos físicos, contudo, combinando métodos diferentes, sendo guiado pelos roteiros experimentais da PHYSICS - PHYWE¹ e 3B SCIENTIFIC², analisando tanto o caso mais simples de um pêndulo físico com oscilação livre utilizando-se dos dois métodos (Arduino e videoanálise), como também o caso de pêndulos físicos acoplados entre si, utilizando-se para isso exclusivamente o método da videoanálise, tendo como objetivos verificar as previsões teóricas acerca do pêndulo físico e analisar as diferentes situações dos pêndulos acoplados por uma mola no que se refere aos modos normais de vibração e o fenômenos dos batimentos, utilizando-se para isso, de um sistema de pêndulo produzido em laboratório mediante utilização de impressão 3D e outros ferramentais mecânicos facilmente encontrados.

A fim de alcançar os objetivos descritos anteriormente, estruturamos este trabalho na forma que se segue. No Capítulo 2, delineamos os fundamentos teóricos acerca das tecnologias no ensino de Física, discutindo sobre a formação do docente em Física frente à era tecnológica atual. Seguimos no Capítulo 3 discorrendo sobre as ferramentas de aquisição de dados tanto pelo método da videoanálise como com o sensoramento baseado na plataforma Arduino. O Capítulo 4 é dedicado aos conceitos fundamentais de torque e momento de inércia em um pêndulo físico, sendo sucedido pelo Capítulo 5, onde é apresentada a teoria acerca dos movimentos de pêndulos físicos acoplados. O setup experimental bem como os processos metodológicos utilizados são levantados no Capítulo 6. No Capítulo 7 discutimos os resultados levantados no sistema de pêndulo físico livre e acoplado com uso do Arduino e do Tracker à luz da teoria, destacando também as discussões acerca dos resultados obtidos com os pêndulos acoplados. Por fim, no Capítulo 8, finalizamos o trabalho com as considerações finais, fazendo um breve resumo e discorrendo sobre pretensões futuras para sistemas mais complexos e aprimorados.

¹Disponível em: <http://phylab.yonsei.ac.kr/exp_ref/phywe/1_3_25.pdf>

²Disponível em: <https://www.3bscientific.com.br/PhysicsExperiments/UE1050600_PT.pdf>

2 TECNOLOGIAS NO ENSINO DE FÍSICA

Conforme Moreira (2004), Silva, Tavares e Silva (2018), o ensino de Física, da educação básica ao ensino superior, requer de seus mediadores (professores) práticas pedagógico-metodológicas que visem o maior engajamento dos alunos para que o aprendizado se torne algo significativo e com sentido, possibilitando associações de conhecimentos. O que corrobora fortemente para o cumprimento dessas ações, principalmente na era da informação em que vivemos, são as tecnologias disponíveis em suas diversas formas e denominadas como TIC's (Tecnologias da Informação e Comunicação) que podem ser agregadas aos meios de educação e estão cada vez mais presentes nas práticas pedagógicas dos professores.

2.1 A FORMAÇÃO DO ATUAL PROFESSOR DE FÍSICA FRENTE A NOVA ERA DA EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA

Pensar em educação tecnológica nos tempos atuais é, além de uma questão de modernização do ensino, algo que remete a leis e princípios estabelecidos por órgãos normativos da educação brasileira, como a Lei 9.394/96 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que estabelece a formação do indivíduo para o uso de tecnologias nos diversos níveis de ensino, assim como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a nova BNCC (Base Nacional Comum Curricular), que, quando voltadas especificamente para o novo Ensino Médio, estabelecem o desenvolvimento de um saber matemático, científico e tecnológico como condição de cidadania, devendo esta área de conhecimento ser apresentada como uma construção histórico-humana em suas mais diversas interpretações, fazendo com que ela seja vista como um caminho para a compreensão da ciência como instituição social (BRASIL, 1996; GODOI et al., 2018, p.34).

Sendo assim, diversas tecnologias atuais podem ser associadas e utilizadas para obtenção dos saberes físicos, de forma que um aprendizado culturalmente significativo e contextualizado da Física transcenda naturalmente os domínios disciplinares estritos, logo, os métodos avaliativos, conteúdos e metodologias de ensino devem ser adequadas para que o aluno ao final do Ensino Médio demonstre *“domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna”* (LOPES, 2002; FEDERAL, 2005).

Contudo, nota-se que este processo de ascensão da Física como uma disciplina interdisciplinar, transversal e contextualizada está intrinsecamente ligado ao processo de formação inicial dos professores, que deve considerar estes aspectos, tornando os alunos capazes de aplicar seus conhecimentos em variados contextos e situações reais. O ato de criticar construtivamente dentro da sala de aula, segundo Angotti (1993), é algo que vem se perdendo com o passar dos tempos se levarmos em conta o processo formativo dos docentes

atuais, que muitas vezes é dotado da falta de significado de conteúdos considerados críticos.

Tendo em vista o papel incontestável das ciências no processo de evolução da humanidade, que encontra-se constantemente em processo de mutável tecnológica e socialmente, torna-se imprescindível que os novos e futuros professores adquiram uma postura mais voltada ao desenvolvimento do pensamento crítico e científico de seus alunos, ensinando-os a aprender de forma correta e significativa, sempre buscando a correlação entre os conteúdos, possibilitando conduzir investigações e desenvolver a capacidade de argumentação e questionamentos científicos de forma inteligente. Assim, como as ciências físicas estão cercadas por inúmeros conhecimentos contemporâneos e modernos, cujos estudos buscam resolver problemas atuais das sociedades humanas em áreas diversas, a formação atual desta nova era de professores deve levar em conta todos estes aspectos (ARAÚJO et al., 2018).

2.2 O USO DO COMPUTADOR NO ENSINO DE FÍSICA

Atualmente, devido à expansão dos meios tecnológicos em praticamente todas as áreas de organização social, encontram-se disponíveis diversas formas de utilização do computador para os mais diversos fins. Quando nos restringimos à aplicação destes recursos dentro do campo educacional, abre-se um leque de possibilidades para o professor, que pode utilizar-se destes meios como uma forma de aprimoramento de suas práticas pedagógicas, indagando e trazendo para si a atenção de seus alunos como resultado do engajamento que estes meios possibilitam, compactuando com os pressupostos teóricos da aprendizagem significativa.

2.2.1 Modelagem e simulação computacional

Dentro do contexto educacional, já há vários recursos disponíveis para o professor, onde se destacam as simulações, que servem para fazer uma aproximação de uma situação real para uma situação computadorizada, pois são modelos simplificados da realidade, que permitem que o aluno visualize algo que seria impossível ou demasiadamente difícil de visualizar na vida real; e as modelagens computacionais, que de modo simplificado, permitem ao aluno criar uma espécie de “micromundo”, sujeito a leis não necessariamente iguais a do mundo real, manipuláveis através de equações do modelo, associando a eles parâmetros pré-estabelecidos (ALIPRANDINI; SCHUHMACHER; MURIEL, 2009; MENDES, 2019).

Dentre os *softwares* disponíveis atualmente voltados especificamente para o método da simulação e modelagem computacional, destacam-se programas como Modellus¹ e Phet², que são amplamente utilizados em sala de aula com o objetivo de realizar simulações.

¹Disponível em: <<https://docente.ifrn.edu.br/alessandrorolim/informatica-aplicada-a-fisica/software-modellus-4.01/view>>

²Disponível em: <https://phet.colorado.edu/pt_BR/>

Possuindo uma interface moderna e atraente, estes softwares são capazes de plotar gráficos, mostrar equações, representação da ação de forças sobre um corpo e determinação de diversas outras grandezas físicas. O fato de serem manipuláveis proporciona aos alunos se tornarem agentes ativos neste processo de construção de conhecimentos, tendo um contato direto com o objeto de estudo (SILVA; TAVARES; SILVA, 2018).

Em se tratando do ensino de Física, temos uma vasta bibliografia de trabalhos realizados em experimentações dentro da sala de aula, bem como em ambientes de pesquisa, o que demonstra o grande aporte da utilização das TIC's como uma potencial ferramenta cognitiva que permite ao estudante/pesquisador construir uma perspectiva do mundo que o cerca ao desenvolver habilidades de análise e interiorização de conhecimentos. Contudo, é importante destacar que quando se fala no uso de tecnologias dentro da sala de aula, deve ser levado em consideração que o uso destas ferramentas precisa servir como um meio ou um complemento de aprendizagem, visto que estes recursos não substituem o professor e que de certa forma podem trazer resultados negativos se não forem bem empregados, logo, cabe ao docente, por intermédio de políticas educacionais, governamentais e também internas à escola, ter uma preparação adequada para possuir habilidades e competências necessárias (SILVA; TAVARES; SILVA, 2018; CAVALCANTE; TAVOLARO; MOLISANI, 2011).

3 FERRAMENTAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS: TRACKER & ARDUINO

A videoanálise possui grandes potencialidades para fins educacionais podendo ser aplicada em diversas áreas da Física, tais como a mecânica, termodinâmica, eletricidade e outros, desde que possua algum parâmetro físico em movimento que possa ser analisado. Isso permite uma maior dinamização na prática pedagógica de ensino ao explorar meios diversos de investigar a natureza. Vale ressaltar que o uso didático deste recurso não é algo passivo, pois com ele é possível haver uma interação entre o aluno-pesquisador, o objeto de estudo e o produto, no caso, o vídeo.

Já com o uso da plataforma Arduino e sensores vinculados a ele, torna-se possível a coleta de diversos dados do ambiente ao seu redor, sendo esta uma opção utilizada em larga escala tanto em projetos científicos, acadêmicos e até mesmo para fins industriais e de pesquisa aplicada e robótica.

3.1 O MÉTODO DA VIDEOANÁLISE: SOFTWARE TRACKER

O estudo de alguns campos da Física requer uma análise minuciosa de dados para observações de fenômenos físicos, sejam eles palpáveis ou não. A depender do tipo de caso e do objeto de estudo em si, estas análises podem demandar o uso de tecnologias específicas, como softwares de computadores, aplicativos em celulares ou tablets. Nas últimas décadas, com a popularização das câmeras digitais, bem como sua facilidade de acesso e seu maior poder de captura de imagens com altas resoluções, tornou-se viável a análise de fenômenos físicos através de recursos de mídia, como os vídeos, sendo este método conhecido por videoanálise, dentre os quais se destacam programas como Tracker (software livre) e Logger Pro (software utilizável mediante aquisição de licença), que em suma servem para analisar fenômenos dinâmicos quadro a quadro por meio de um vídeo, que é uma sequência de imagens (LEITÃO; TEIXEIRA; ROCHA, 2011; JR et al., 2012).

Conforme sugerido, o método da videoanálise consiste em fazer capturas de uma sequência de imagens (vídeo) para que estas possam ser analisadas quadro a quadro. Para fazer a conversão de dados reais (objeto estudado) para um conjunto de imagens sucessivas digitais (vídeo) em algum software de computador, é necessário que sejam adotadas as escalas de correção adequadas, como a utilização da base de tempo do equipamento utilizado, além de informar ao programa qual o fator de escala entre o espaço físico real capturado com o espaço expresso em pixels.

Fortemente aplicável nos campos da Mecânica ao estudar grandezas como posição, velocidade e energia de um corpo, o método da videoanálise também pode ser utilizado para estudar fenômenos de ondulatória, como nas oscilações de sistemas livres ou acoplados;

fenômenos ligados a eletricidade e magnetismo como no estudo de um circuito LC, dentre outros (LEITÃO; TEIXEIRA; ROCHA, 2011; TROCARU et al., 2020).

3.1.1 O software Tracker

Certamente, um dos programas livres mais utilizados no meio acadêmico quando se fala em análise de movimentos por meio do método da videoanálise é o software gratuito Tracker. Este programa é resultado da parceria entre o professor Douglas Brown, da faculdade comunitária Cabrillo College, Califórnia, Estados Unidos e pelo *Open Source Physics*, que é um projeto financiado pela *Nacional Science Foundation* e Davidson College, que juntos buscam fornecer um ferramental e bibliotecas de código aberto voltadas para o ensino de Física (TRACKER, 2021; CHRISTIAN; ESQUEMBRE; BARBATO, 2011).

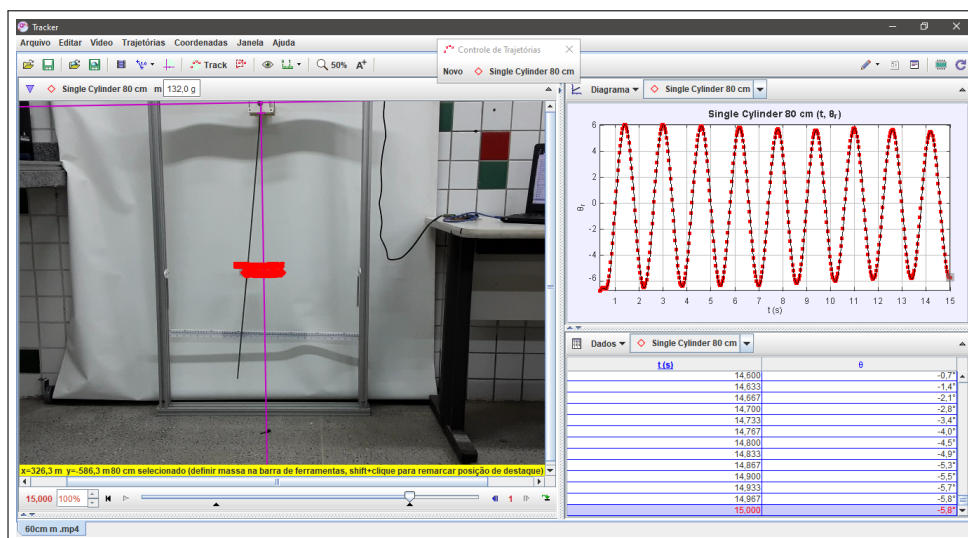
Quando trazemos o contexto do uso de tecnologias para o âmbito do espaço escolar, estamos corroborando para a construção de um ser humano não-passivo, e o uso de tecnologias como o Tracker permite que o aluno-pesquisador acompanhe de perto a produção dos dados experimentais, se tornando um agente ativo do processo de aprendizagem, sendo capaz de manipular dados, construir gráficos e analisar situações reais, quebrando o paradigma da sequência de roteiros experimentais fechados e pouco dinâmicos (FILHO, 2004; ANJOS, 2008).

Devemos entender um vídeo como um conjunto de imagens sequenciadas (*frames*) que são capturadas e reproduzidas em um certo intervalo de tempo. Os aparelhos reprodutores de vídeos o reproduzem a uma certa taxa pré-determinada, que dependem, dentre outros fatores, da arquitetura e limitações físicas do aparelho considerado. Como exemplos, temos as TVs modernas, que são capazes de reproduzir vídeos a uma taxa de 60 fps (frames per second), enquanto que as câmeras de celulares populares fazem essa captura de imagens a uma taxa de 30 fps. Assim, podemos afirmar que a qualidade e resolução dos dados obtidos para análise dependem sobretudo da qualidade das imagens obtidas, e de modo geral, quanto maior a taxa de fps, maior a suavidade do vídeo, visto que mais quadros podem ser capturados em um dado intervalo de tempo.

Para uma câmera com baixa taxa de captura de imagens, que permite somente a gravação de algumas dezenas de quadro por segundo, tem-se uma perda considerável na análise de vídeos que têm objetos se movendo mais rapidamente (ordens iguais ou superiores a algumas dezenas de metros por segundo), pois o objeto percorre espaços maiores do que a câmera é capaz de capturar nos intervalos de tempo em que o movimento de abre e fecha do obturador ocorre, desta forma, em algumas situações em que se deseja utilizar o software de maneira extremamente precisa, é necessário que se recorra a uma câmera com altas resoluções, o que de certa forma pode encarecer, ou até mesmo inviabilizar o seu uso (TRACKER, 2021; LEITÃO; TEIXEIRA; ROCHA, 2011).

Para que haja a coleta dos dados experimentais do objeto de estudo com o uso do programa, devem ser considerados alguns procedimentos básicos, que vão desde a preparação do ambiente de filmagem e instalação do software à definição dos parâmetros do corpo de estudo após o processamento do vídeo no programa, onde são definidas a marcação de escalas e pontos quadro a quadro ¹. Abaixo, na Figura (3.1), a interface do *Tracker*.

Figura 3.1 – Interface inicial do programa Tracker para o caso de estudo de oscilações livre.



Fonte: Autoria própria (2022).

Basicamente, a utilização padrão deste software consiste em três etapas simples, a saber: organização do experimento e ambientação da filmagem com iluminação considerável; captura das filmagens do movimento de interesse e transferência do arquivo para o programa previamente instalado. Podemos observar que sua interface é simples e bastante intuitiva, o que compete a ele a sua popularidade. Os “caminhos” traçados pelo software neste caso da figura acima foi feito por meio de captura automática. À esquerda temos um *frame* do vídeo analisado, observe os eixos adotados como o x estando orientado para baixo. Logo a direita no campo inferior, temos os dados tabelados para o ponto de massa definido e, acima deste, o gráfico referente para posição angular em função do tempo, ambos coletados de forma simultânea.

¹Para uma descrição mais precisa dos procedimentos iniciais que devem ser tomados, os seguintes manuais e dicas podem ser consultados, estando disponíveis em:

- <https://trackerbrasil.ct.utfpr.edu.br/?page_id=8>
- <<http://www.if.ufrgs.br/cref/uab/lab/tracker.html>>. Acesso em: 19 de janeiro de 2022.
- <<http://paginapessoal.utfpr.edu.br/lenz/tracker/ManualTrackerdetalhado.pdf/view>>. Acesso em: 19 de janeiro de 2022.
- <<https://www.youtube.com/channel/UCnh-8DQM3Tm2a1pj05Fb4Uw>>. Acesso em: 19 de janeiro de 2022.

3.2 MICROCONTROLADORES & ARDUINO

Os microcontroladores, por possuírem tamanho relativamente pequeno e um baixo custo energético, além de grande capacidade de processamentos de dados, encontram-se presentes em vários equipamentos eletrônicos que conhecemos, desde um controle remoto aos smartphones atuais. Estes microcontroladores, de modo geral, são placas que têm microprocessadores embutidos que analisam instruções pré-definidas e executam ações, possuindo memória e pinos de entrada e saída que servem para comunicação com diferentes tipos de sensores, temporizadores, resistores e portas seriais, diferenciando-se entre si com respeito à velocidade de processamento de dados, quantidade de memória disponível, pinos de entrada e saída, arquitetura eletrônica, tipos e quantidades de periféricos, dentre outros (BUKMAN, 2016).

Nas últimas décadas, uma das plataformas baseadas em microcontroladores que têm se destacado tanto no campo da ciência e educação como indústria e robótica é a plataforma de prototipagem eletrônica *Open Source*, o Arduino, surgida em 2005 por um grupo de pesquisadores italianos, que tinham como objetivo principal criar um sistema de programação acessível, rápida e fácil de operar, voltada a alunos e projetistas amadores sem formação específica, para que pudessem ser desenvolvidos dispositivos independentes de baixo custo que permitissem a interação com o ambiente através de diversos sensores para os mais variados objetivos, como por exemplo, sensores de movimento, temperatura, pressão, umidade, distância, sons, entre outros (ARDUINO, 2021b; THOMSEN, 2014).

O sistema baseado em Arduino é projetado com um microcontrolador que possui suporte para entrada e saída (*input/output*) embutidos, sendo utilizados um microcontrolador AVR, de propriedade da empresa ATMEL[®], que garante a sua facilidade, baixo consumo energético e altos níveis de integração. Estes microcontroladores da ATMEL[®] servem como complemento dos microcontroladores baseados em ARM SMART desta mesma empresa, o que fornece uma combinação única de desempenho e flexibilização de um projeto (ATMEL, 2018).

Na internet é possível encontrar uma gama de informações disponíveis acerca do Arduino, como fóruns de debate, tutoriais com cursos completos, além de sua própria documentação em seu site oficial², o que aumenta ainda mais o seu poder de aplicabilidade e expansão nas mais diversas áreas do conhecimento e pesquisa devido à facilidade de criar, reproduzir ou adaptar protótipos já prontos tendo como base as inúmeras bibliotecas em repositórios diversos que facilitam a configuração de uma placa e integram-se ao interfaceamento de outros hardwares, contribuindo então no desenvolvimento de *firmwares*³.

Se tratando do ensino de Física, temos uma vasta bibliografia de trabalhos realizados

² <<https://www.arduino.cc/>>.

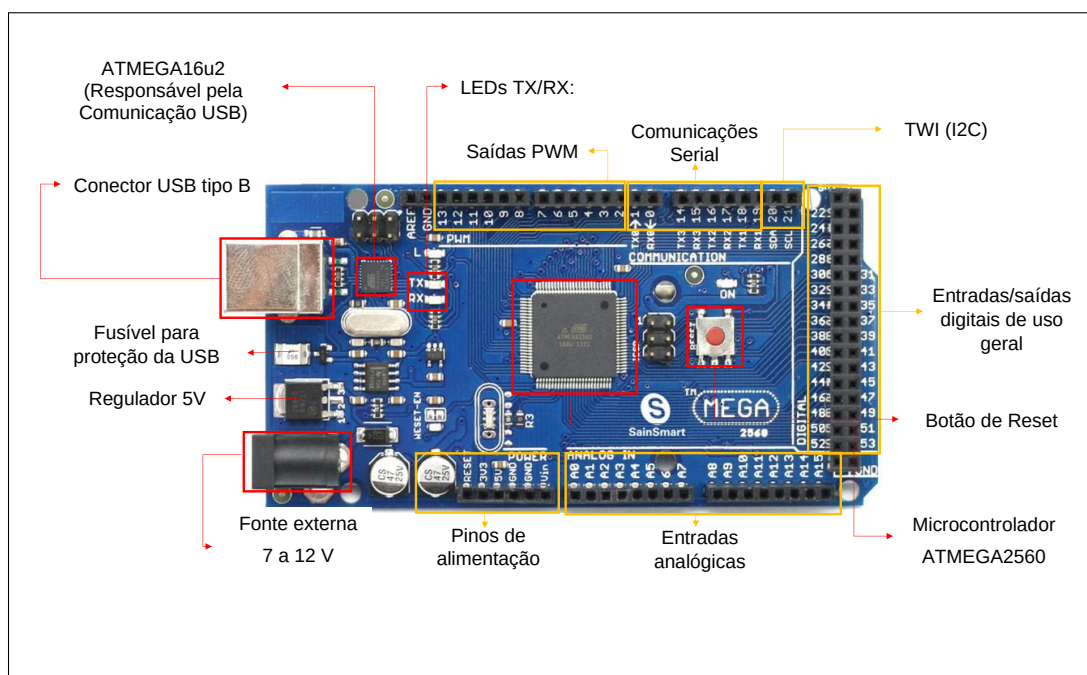
³ Os *firmwares* são um conjunto de instruções operacionais que são programadas diretamente no hardware de equipamentos eletrônicos.

em experimentações dentro da sala de aula, bem como em ambientes de pesquisa, o que demonstra o grande aporte da utilização das tecnologias da informação como uma potencial ferramenta cognitiva que permite ao estudante/pesquisador construir uma perspectiva do mundo que o cerca ao desenvolver habilidades de análise e interiorização de conhecimentos (CAVALCANTE; TAVOLARO; MOLISANI, 2011). Corroborando com esta afirmação, diversos trabalhos estão sendo realizados tendo como base a plataforma Arduino, uma vez que sua integração com aparatos experimentais através dos sensores permite medir, calcular e inferir diversas grandezas e fenômenos físicos nas mais diversas áreas, como na Mecânica (JÚNIOR et al., 2020; CHIRIACESCU et al., 2020); Termodinâmica (OLIVEIRA et al., 2019); Eletricidade (CAVALCANTE; TAVOLARO; MOLISANI, 2011; MOYA, 2018); Ótica (ATKIN, 2017) e até mesmo com experimentos com assuntos relacionados à Física Moderna (SILVEIRA; GIRARDI, 2017; OLIVEIRA et al., 2020).

3.2.1 Arduino MEGA

Atualmente, existem diversos tipos de placas Arduino para os mais diversos fins e aplicações, sendo o **Arduino MEGA 2560** baseado no microcontrolador ATmega2560 como uma das opções mais populares e com utilização em diversos trabalhos, tendo em vista que este modelo é voltado a projetos que necessitem de memória de programa com maior capacidade. Na Figura (3.2), tem-se a esquematização simplificada da placa citada e utilizada neste trabalho.

Figura 3.2 – Hardware Arduino MEGA 2560.



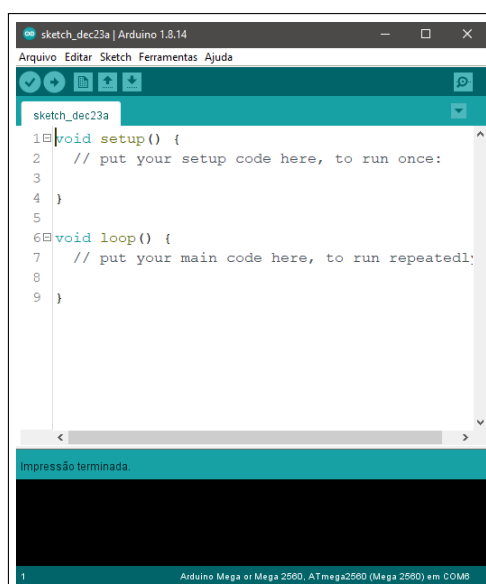
Fonte: Autoria própria (2021).

A placa apresentada na Figura (3.2) conta com 54 pinos de entrada/saída digital, 15 deles podendo ser usados com saídas PWM (*Pulse Width Modulation*)⁴ que são utilizadas por sistemas digitais para variação do valor médio de uma forma de onda periódica; 16 entradas analógicas; botão de *reset* que reinicia a placa; conector USB tipo B que faz a conexão com o computador, podendo ser também uma opção de alimentação da placa; pinos de alimentação que fornecem diversos valores de tensão que podem ser utilizados para energizar os componentes do projeto. Cada pino possui resistor de *pull-up* interno que pode ser habilitado por software. O conversor Serial-USB ATMEGA16u2 é responsável pela comunicação entre o computador e o microcontrolador, sendo que os LEDs TX e RX acendem quando o Arduino está transmitindo e recebendo dados pela porta serial respectivamente (SEMICONDUCTORS, 2021).

3.2.2 Software IDE Arduino

Para que o Arduino seja capaz de realizar determinada ação, ele deve executar uma programa que esteja gravado em sua memória. A gravação deste código é realizada por meio de um *bootloader*, que recebe os dados enviados pelo Arduino IDE através da porta serial. Essa característica o permite dispensar o uso de programadores para o chip e também o uso de softwares adicionais, sendo a sua sintaxe de programação, uma derivação do *Wiring*, que é baseada em C/C++, possuindo funções específicas para trabalhar com as portas do Arduino (JÚNIOR et al., 2020; ARDUINO, 2021b). Observe na Figura (3.3) abaixo a interface inicial da IDE do Arduino.

Figura 3.3 – Interface inicial IDE Arduino.



Fonte: Autoria própria (2021).

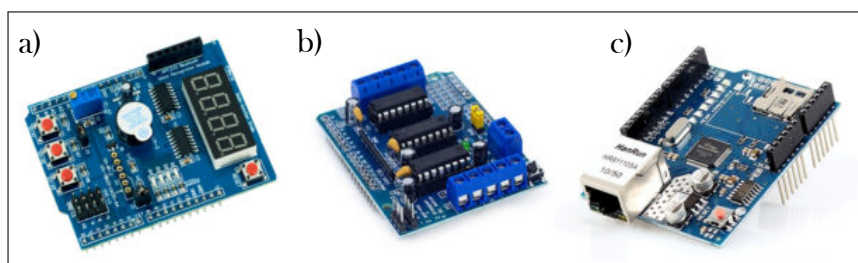
⁴Mais informações em: <<https://www.citisystems.com.br/pwm/>>

Esta IDE é basicamente um editor de textos com sintaxe específica de programação que conecta o hardware ao software do Arduino, analisando previamente o código e listando possíveis erros e fazendo o *upload* para a placa após as eventuais correções. Basicamente, são necessárias duas funções fundamentais para seu funcionamento, o `void setup() {}`; e `void loop() {}`; (BUKMAN, 2016).

3.2.3 Shields

As potencialidades de uma placa Arduino podem ser ampliadas ainda mais se utilizadas algumas *shields*, que basicamente são outras placas que podem ser plugadas ou acopladas à placa principal, sendo os pinos estendidos para não serem perdidas nenhuma função. Muitas delas empilháveis, o que possibilita a criação de módulos de hardware com várias finalidades e funções específicas. Conforme sugerido anteriormente, o Arduino, além de suas funções mais simples utilizando sensores, pode ser utilizado também para outras funções ainda mais complexas, como conexão com a internet, receptor GPS, controlador de motores, simulação de telefones celulares, tocadores de MP3, dentre outras funções. Como exemplos, podemos citar os LCD *Shield* com Teclado; *Protoshield*; Base *Shield Groove*; *Shield* Multifunções Nível Intermediário; Motor *Shield* L293D e *Ethernet Shield* W5100, (QUADROS, 2021). Abaixo, na Figura (3.4), vemos alguns exemplos destas placas auxiliares:

Figura 3.4 – Exemplos de *shields*.



Fonte: (QUADROS, 2021).

Como explica Quadros (2021), o *shield* Multifunções Nível Intermediário é uma placa auxiliar que possui funções de outras placas integradas em uma só (Figura 3.4(a)). Os 4 botões do *display* e o *buzzer* permitem interação com o usuário, sendo seus outros pinos de conexão destinados à ligação de sensores de temperatura e afins. Já o Motor *Shield* equipado com dois chips L293D (ver Figura 3.4(b)) é uma opção viável em se tratando de projetos de robótica que necessitem de poucos motores, visto que esta é uma placa auxiliar com esta finalidade específica de acionamento de motores, com uma capacidade de chaveamento até 16 V e 600 mA. Como último exemplo, o *Ethernet Shield* W5100 (ver Figura 3.4(c)) permite conectar o Arduino a uma rede local *Ethernet* implementando internamente o protocolo TCP/IP, liberando o Arduino para as funções de controle.

3.2.4 Encoders Rotativos Incrementais

Para a medição da posição angular do pêndulo físico livre, foi utilizado um encoder ou codificador rotativo incremental de modelo - LPD3806-600BM-G5-24C - ver Figura (3.5) abaixo.

Figura 3.5 – Encoder rotativo incremental.



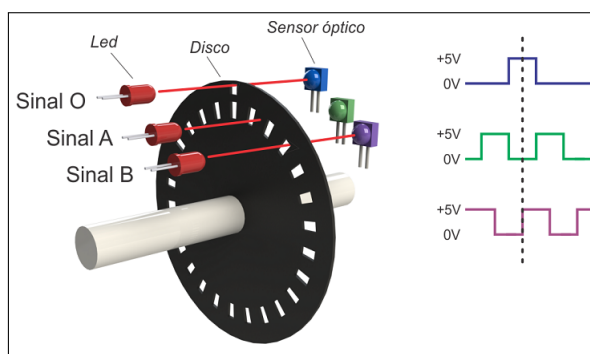
Fonte: Autoria própria (2022).

Estes codificadores são responsáveis por rastrear o giro dos eixos de um sistema para gerar informações digitais de posição ou movimento, sendo inclusive muito utilizados na indústria e robótica, como na verificação de velocidade de uma esteira e até controle de posição em máquinas industriais automatizadas, estando sempre emparelhados com *drivers* (OGUNTOSIN; AKINDELE, 2019).

Diferentemente dos potenciômetros, os encoders podem girar indefinidamente em torno do seu eixo de rotação e são projetados com diversos tipos de resolução para as mais diferentes aplicações, nas quais os pulsos produzidos para uma rotação completa ou uma revolução em torno do eixo variam de 16 (2^4) até 1024 (2^{10}) pulsos.

Existem vários tipos de modelos de encoders, contudo, de modo geral, para os encoders óticos, tem-se um princípio de funcionamento comum. Basicamente, eles são constituídos por um diodo emissor de luz (LED) e um disco opaco que pode ser construído com vidro, metal ou plástico, tendo também um detector luminoso colocado no lado oposto do disco, como está representado na Figura (3.6). Neste disco, há várias “janelas” (setores opacos e transparentes a luz) que permitem ou bloqueiam a passagem da luz emitida pelo LED conforme o giro do eixo, enviando sinais que são convertidos em pulsos elétricos e enviados pelos canais A, B e O, gerando pulsos de ondas quadradas que podem ser interpretadas em posição ou movimento (ALMEIDA, 2018). Observe a Figura (3.6) abaixo:

Figura 3.6 – Esquema de funcionamento de um encoder incremental.

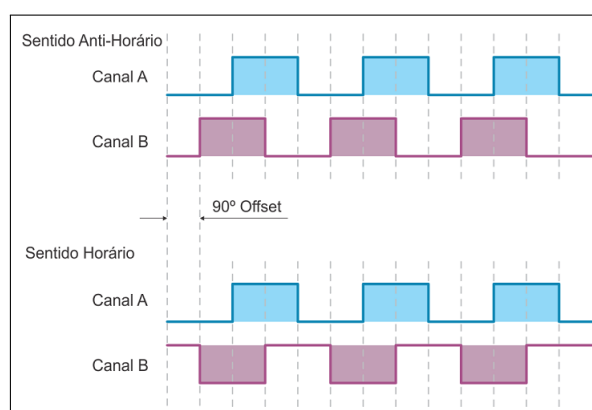


Fonte: (ALMEIDA, 2018).

O modelo de sensor mais comercializado, segundo Almeida (2018), é o sensor ótico incremental, que diferente do absoluto, não é capaz de contabilizar a posição final ao qual o eixo foi deixado assim que desligado da fonte de alimentação, zerando então sua contagem. Este modelo de sensor, conforme mencionado anteriormente, possui três canais de saída, os canais A, B e O, o que possibilita adquirir o ângulo de rotação bem como seu sentido (horário ou anti-horário), além da marcação do início ou fim de uma revolução. O sinal A é o sinal principal, que fornece os pulsos (*clocks*) na mesma proporção de giro do eixo; o sinal B, é equivalente ao sinal A, entretanto, este é defasado em $\pm 90^\circ$, sendo responsável então por determinar o sentido de rotação do eixo. O sinal O, simplesmente marca as revoluções completas.

Um diagrama esquemático dos pulsos de ondas quadradas, ilustrado na Figura (3.7), permite entender melhor um funcionamento de um encoder incremental. Observe a Figura (3.7)

Figura 3.7 – Representação de ondas quadradas emitidas por um sensor encoder rotativo incremental.



Fonte: (ALMEIDA, 2018).

A borda de subida de uma onda indica o momento ao qual a luz emitida pelo LED foi detectada pelo sensor; a linha horizontal constante superior indica a permanência de recebimento (sinal *high*) desta luz; a borda de descida do pulso indica o momento em que houve bloqueio da luz ao passar pelo setor opaco e, por fim, a linha horizontal inferior indica a permanência de não-recebimento da luz (sinal *low*). Desta forma, conforme a Figura (3.7), quando o sinal A estiver adiantado em 90° em relação ao sinal B, isso indica que o encoder gira em sentido anti-horário, neste caso a borda de subida de um sinal A se encontra com o sinal B no estado 1, analogamente, quando a B estiver em 0 durante a borda de subida do sinal A, o encoder estará girando no sentido horário. O terceiro sinal do encoder, o sinal O, tem por objetivo indicar a posição “0” (zero) do encoder, com essa informação é possível detectar o número de voltas completas que o dispositivo acoplado ao encoder gerou.

O modelo utilizado neste trabalho possui as seguintes especificidades (OGUNTOSIN; AKINDELE, 2019):

- A fase única é obtida por 600 pulsos por revolução, portanto, a saída de 2 fases muda para 2400 pulsos por revolução ($600 \cdot (2)^2 = 2400 \text{ P/R}$);
- Velocidade mecânica máxima de 5000 rotações por minuto;
- A frequência de resposta está na faixa de 0 a 20 kHz.

As conexões são feitas da seguinte forma:

Tabela 3.1 – Conexões.

Cor do fio	Representação
Fio vermelho (1)	Entrada de alimentação DC, (5-24 V DC)
Fio preto (2)	Entrada de alimentação DC, aterramento (0V)
Fio verde (3)	Saída de fase A
Fio branco (4)	Saída de fase B

Fonte: (OGUNTOSIN; AKINDELE, 2019) - traduzido.

Segundo Oguntosin e Akindele (2019), para uma revolução completa ou 360° neste encoder incremental, tem-se 2400 pulsos, logo para um único pulso temos um ângulo que vale:

$$\hat{\text{Ângulo}} = \text{Posição do Encoder} \cdot \frac{360^\circ}{2400} = \text{Posição do Encoder} \cdot 0.15^\circ$$

ou, em radianos:

$$\hat{\text{Ângulo}} = \text{Posição do Encoder} \cdot \frac{0.30}{360} \pi \text{ rad}$$

Sendo assim, este tipo de encoder pode facilmente ser implementado a um microcontrolador Arduino conectado em suas duas saídas (sinais A e B), o que permite facilmente descobrir a direção de rotação, ângulo de movimento e o ponto máximo ao qual o codificador girou.

4 TORQUE E MOMENTO DE INÉRCIA EM UM PÊNDULO FÍSICO

A dinâmica de corpos rígidos pode assumir diversos graus de liberdade, executando, portanto, movimentos complexos em tornos de seus eixos de rotação. Sendo assim, o modo mais simples deste tipo de movimento recai no caso onde há um corpo rígido rotacionando em torno de um eixo fixo, que é o caso de um pêndulo físico.

4.1 MOMENTO DE INÉRCIA

Um dado corpo qualquer que se move sem rotacionar sobre um plano determinado executa um movimento simples de translação, no entanto, se este corpo rotaciona em torno de um eixo fixo passa a atuar sobre ele uma outra grandeza física, ao qual se denomina *inércia de rotação*, que caracteriza seu momento de inércia. Se considerarmos a componente z do momento angular total de um corpo para um caso de um círculo circunscrito em um plano transversal paralelo ao plano xy com um único grau de liberdade φ , teremos que

$$L_Z = I\omega \quad (4.1)$$

sendo que para uma distribuição contínua de massa ($dm = \mu dv$) com μ constante¹, temos este momento calculado por:

$$I = \int r^2 dm \quad (4.2)$$

Com efeito, para calcular o *momento de inércia*, devemos multiplicar cada elemento de massa dm de um corpo por r^2 , que é a distância ao eixo de rotação, integrando em seguida ao corpo todo. Aplicando a lei fundamental da dinâmica das rotações na Equação (4.1) temos que:

$$\frac{dL_Z}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = \tau_Z^{(ext)} \quad (4.3)$$

onde $\tau_Z^{(ext)}$ configura-se como a componente Z da resultante dos torques externos em relação ao ponto fixo O (escolhido arbitrariamente já que I e ω não dependem dessa escolha) (NUSSENZVEIG, 2013).

Como para um corpo rígido com distribuição de massa contínua tem-se que as distâncias r ao eixo de rotação são constantes, temos então que a Equação (4.3) pode então ser escrita como:

$$\tau_Z^{(ext)} = I\alpha \quad (4.4)$$

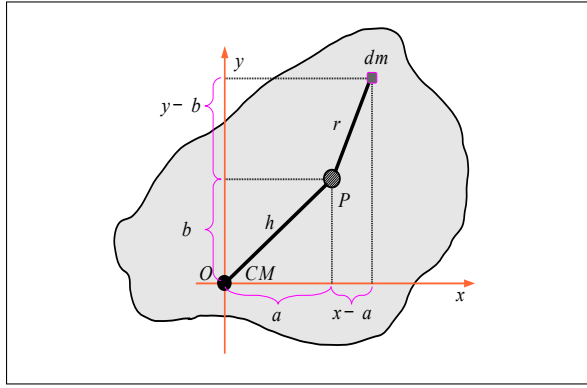
¹Dizer que μ é constante implica dizer que um dado corpo ao qual esta grandeza se refere é homogêneo.

onde $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ é a aceleração angular.

4.2 TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS (STEINER)

Nesta subseção, iremos deduzir o teorema dos eixos paralelos, também conhecido como teorema de *Steiner*. Este teorema relaciona dois momentos de inércia distintos, o I_{CM} (momento de inércia de um corpo em torno do seu centro de massa), e I_P que se refere ao momento de inércia do corpo em relação a um segundo eixo paralelo ao primeiro eixo, ambos relativos a um corpo de dimensões e formato qualquer. A Figura (4.1) abaixo representa um caso geral de um corpo de formato qualquer sobre o qual estão sendo tomados os dois eixos paralelos I_{CM} , no ponto “O” e I_P , no referido ponto “P”.

Figura 4.1 – Corpo com dimensões e formato quaisquer.



Fonte: Autoria própria (2021).

Vamos tomar o sistema de coordenadas cartesianas com a origem no centro de massa do sistema e definir um elemento de massa infinitesimal dm localizado a uma distância r do ponto “P”, (ao qual queremos determinar o momento de inércia), que está distante h do eixo de rotação auxiliar referente ao centro de massa. A distância r é definida como:

$$r^2 = y^2 + x^2 - 2by - 2ax + \underbrace{(b^2 + a^2)}_{h^2}$$

obtida por teorema de Pitágoras e expansão do quadrado da diferença.

Tomando a definição de momento de inércia expressa na Equação (4.2) para cada um dos termos, ficaremos com

$$I = \underbrace{\int x^2 dm + \int y^2 dm}_{I_{cm}} + \underbrace{\int h^2 dm}_{h^2 M} - 2b \int y dm - 2a \int x dm \quad (4.5)$$

O termo “ h ” na Equação (4.5) é constante por isso sai da integral, resultando no momento de inércia a esta mesma distância de “O”. Os dois termos iniciais dão o momento de inércia do centro de massa, que por sua própria definição zeram os dois termos finais, localizados na origem. Reorganizando, ficamos com

$$I = I_{CM} + Mh^2 \quad (4.6)$$

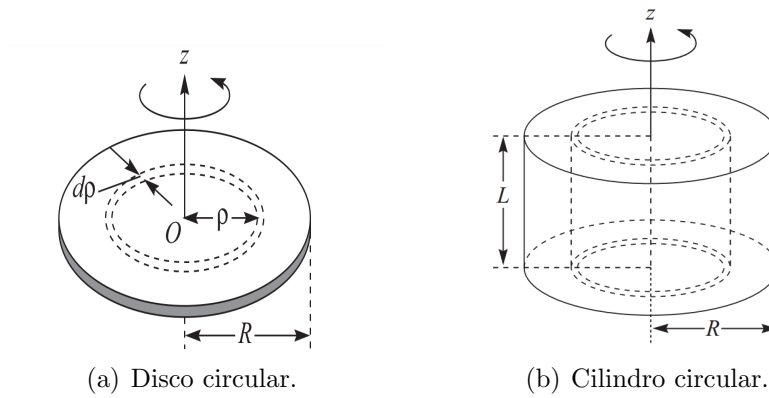
À expressão em (4.6) dá-se o nome de teorema dos eixos paralelos ou de *Steiner*, cuja definição é,

Teorema 1 (Teorema de Steiner). *O momento de inércia de um corpo qualquer em relação a um eixo é a soma do momento de inércia em relação a um eixo paralelo, passando pelo centro de massa, com o produto da massa M do corpo pelo quadrado da distância h entre os dois eixos.*

4.2.1 Momento de Inércia: Disco Circular em torno do centro

Vamos imaginar este disco como a decomposição de anéis circulares concêntricos, conforme a Figura (4.2)(a), cujo único anel possui raio ρ variando de 0 a R .

Figura 4.2 – Cilindro com eixo fixo em relação ao seu centro de massa.



Fonte: (NUSSENZVEIG, 2013).

Pela razão direta entre elementos de massa dm e elementos de volume dV do anel e seus volumes V e massas totais M , temos que

$$\frac{dm}{M} = \frac{2\pi\rho d\rho}{\pi R^2} = \frac{2}{R^2}\rho d\rho$$

de modo que

$$I = \int \rho^2 dm = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{2M}{R^2} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{2R^4 M}{4R^2}$$

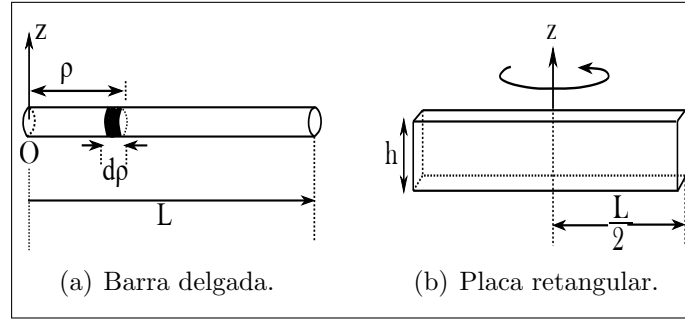
notemos que a razão entre os volumes cancela naturalmente a relação entre a espessura do disco, tal que o resultado para o referente momento de inércia independe desta grandeza, assim, se pensarmos que um cilindro é a superposição de inúmeros anéis tal que sua soma fornece sua altura L , esta expressão dá o momento de inércia tanto de um disco como a de um cilindro qualquer de massa M , raio R e altura L (Figura (4.2)(b)). Desta forma, obtemos finalmente o momento de inércia de um cilindro em torno de um eixo paralelo ao seu comprimento passando pelo seu centro de massa como:

$$I_{c(CM)} = \frac{MR^2}{2} \quad (4.7)$$

4.2.2 Momento de Inércia: Barra Delgada em torno de uma extremidade e do centro de massa

Tomemos como referência a Figura (4.3), cujo eixo está fixado na extremidade da barra delgada de comprimento L e massa M .

Figura 4.3 – Barra delgada com eixo fixo em relação ao seu centro de massa.



Fonte: (NUSSENZVEIG, 2013)(adaptação).

Destaquemos uma porção infinitesimal de massa dm que possui uma porção equivalente de comprimento $d\rho$. Em termos de densidade linear, isso nos dá $(\lambda M/L)$, que em termos infinitesimais fica $(\lambda dm/d\rho)$, ou $dm = \lambda d\rho$. Utilizando a definição de momento de inércia na expressão na Equação (4.2), temos,

$$I = \int_0^L \rho^2 dm = \int_0^L \rho^2 \lambda d\rho = \lambda \int_0^L \rho^2 d\rho \quad (4.8)$$

Basta agora resolvermos a Equação em (4.8), o que nos fornece:

$$I = \lambda \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^L = \lambda \frac{L^3}{3} = \frac{M}{L} \frac{L^3}{3} \quad (4.9)$$

o que finalmente nos dá:

$$I_B = \frac{1}{3} ML^2 \quad (4.10)$$

Por efeito, se quisermos determinar o momento de inércia que passa pelo centro de massa ($I_{B(CM)}$), basta que utilizemos o teorema de *Steiner* expresso em (4.6). Assim:

$$I_B = I_{B(CM)} + Md^2 \rightarrow I_{B(CM)} = \frac{1}{3} ML^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

$$I_{B(CM)} = \frac{1}{3} ML^2 + M \frac{L^2}{4}$$

Organizando esta expressão, ficamos finalmente com o momento de inércia em relação ao centro de massa de uma barra delgada.

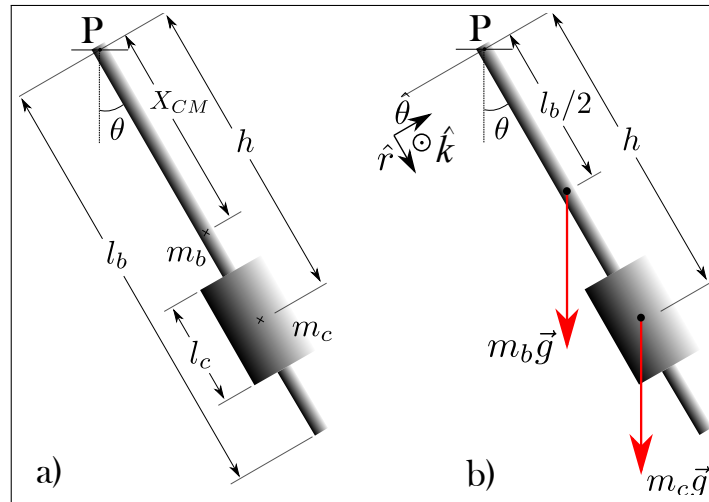
$$I_{B(CM)} = \frac{ML^2}{12} \quad (4.11)$$

Percebamos, portanto, a analogia com o caso anterior para o cálculo do momento de inércia do cilindro. O resultado da (4.11) independe do comprimento da barra, ou seja, é válido para qualquer que seja o comprimento L , desde que a área de secção transversal possa ser desprezada ($L \gg \pi r^2$), sendo assim, esta expressão é válida tanto para uma barra delgada como para uma placa retangular delgada de comprimento L em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa e é perpendicular à direção de seu comprimento, sendo também independente de sua altura h (Figura (4.3)(b)).

4.3 PERÍODO DE UM PÊNDULO FÍSICO

Nesta subseção, vamos calcular o período do pêndulo físico utilizado neste trabalho, que é composto por uma barra e um cilindro com posição variável, conforme representado na Figura (4.4)(a). Observando o esquema da Figura (4.4)(b), podemos definir as coordenadas como sendo $\hat{k}$ a normal ao plano do movimento apontando para fora da figura e $\hat{\theta}$ de forma que ao deslocar o pêndulo no sentido anti-horário, surja uma componente z positiva para a velocidade angular. Desta forma, um torque que eventualmente aponte para dentro do plano tem uma componente negativa e vice-versa.

Figura 4.4 – Representação de um pêndulo físico.



Fonte: Autoria própria (2022).

Na Figura (4.4)(b) estão representadas as atuações das forças de pivotamento sobre o centro de massa da haste e o centro de massa do cilindro devido à ação gravitacional. Podemos então definir o torque resultante ($\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{h} \times \mathbf{P}$) sobre o sistema (Equação (4.12)) em relação ao ponto de pivotamento (P) utilizando-se como base do digrama de corpo livre.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_{P,\text{barra}} \times m_b \mathbf{g} + \mathbf{r}_{P,\text{cilindro}} \times m_c \mathbf{g} \quad (4.12)$$

Notemos que o vetor $\mathbf{r}_{P,\text{barra}}$ aponta do ponto de pivô $\mathbf{P}$ até a metade comprimento da barra ($l_b/2$) e o vetor $\mathbf{r}_{P,\text{cilindro}}$ está atuando a uma distância h deste mesmo ponto $\mathbf{P}$. Ambos os torques sobre o pivô estão negativos, desta forma, ao tomarmos o módulo da Equação (4.12), teremos que,

$$\tau = -\left(m_b \frac{l_b}{2} + m_c h\right) g \sin(\theta) \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.13)$$

Retomando a Equação (4.4), podemos denotar este torque em termos de momento de inércia e aceleração angular, mas antes devemos definir qual o momento de inércia resultante deste sistema, que será a soma das contribuições tanto da barra como do cilindro, ou seja,

$$I_P = I_{P,\text{barra}} + I_{P,\text{cilindro}} \quad (4.14)$$

Como o cilindro está disposto de forma longitudinal no comprimento da barra, seu momento de inércia será expresso pela Equação (4.10), que descreve o momento de inércia de uma barra em uma de suas extremidades. Como queremos saber o I_{cil} em relação ao ponto $\mathbf{P}$, devemos utilizar o teorema dos eixos paralelos, dado pela (4.6). Desta forma, teremos que,

$$I_{cil} = \frac{1}{3} m_c l_c^2 + m_c h^2 \quad (4.15)$$

Vamos utilizar novamente a (4.10) para calcular o I_{barra} em torno do pivô, como esta é uma expressão já conhecida, vamos somente agora definir o momento de inércia total do sistema somando as suas contribuições, tal como dissemos na (4.14). Assim,

$$I_{\text{total}} = \frac{1}{3} m_c l_c^2 + m_c h^2 + \frac{1}{3} m_b l_b^2 \quad (4.16)$$

Organizando a (4.16) e (4.13) conforme a (4.4), levando ao limite de pequenas oscilações, tal que possamos considerar a aproximação $\sin\theta \approx \theta$, temos que:

$$-\left(m_b \frac{l_b}{2} + m_c h\right) g \theta \hat{\mathbf{k}} \approx \left(\frac{1}{3} m_c l_c^2 + m_c h^2 + \frac{1}{3} m_b l_b^2\right) \ddot{\theta} \hat{\mathbf{k}} \quad (4.17)$$

reorganizando, temos

$$\ddot{\theta} \approx - \frac{\left(m_b \frac{l_b}{2} + m_c h \right) g}{\underbrace{\left(\frac{1}{3} m_c l_c^2 + m_c h^2 + \frac{1}{3} m_b l_b^2 \right)}_{\omega_0^2}} \theta \quad (4.18)$$

A Equação (4.18) descreve o movimento harmônico simples com uma frequência angular ω_o de oscilação. Fazendo a equivalência entre período e frequência angular, obtemos finalmente o período de um pêndulo físico, que é dado por:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3} m_c l_c^2 + \frac{1}{3} m_b l_b^2 + m_c h^2 \right)}{\left(m_b \frac{l_b}{2} + m_c h \right)}} \quad (4.19)$$

Portanto, o período T_0 possui dependência com a distância h , ou seja, a posição do cilindro ao longo da barra em relação ao pivô. Para tornar essa dependência mais evidente, vamos colocar m_c em evidência tanto no numerador quanto no denominador da Equação (4.19) e definir as constantes $\mathcal{B} = \frac{1}{3} l_c^2 + \frac{1}{3} \frac{m_b}{m_c} l_b^2$ e $\mathcal{C} = \frac{m_b}{m_c} \frac{l_b}{2}$. Logo, a Equação (4.19) será escrita como:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\mathcal{B} + h^2}{\mathcal{C} + h}} \quad (4.20)$$

Com o intuito de encontrar o valor mínimo de T_0 , devemos tomar a primeira derivada com respeito a h , e resolver $\frac{dT_0}{dh} = 0$, para assim, determinar o valor de h para o qual T_0 toma um valor mínimo. Esse procedimento nos dá uma equação do tipo quadrática:

$$h_{\min}^2 + 2\mathcal{C}h_{\min} - \mathcal{B} = 0, \quad (4.21)$$

onde apenas a raiz positiva tem significado no contexto do experimento dado.

Ao realizarmos uma análise dimensional da (4.19), notamos que o seu caso geral é dado por,

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{total}}{Mgh}} \quad (4.22)$$

Se aplicarmos o teorema dos eixos paralelos na Equação (4.22) para um caso genérico, fazendo $I_{total} = I_{cm} + Mh^2$, então podemos fazer,

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{h}{g} + \frac{I_{cm}}{Mgh}} \quad (4.23)$$

Note que se fizermos $Mh^2 \gg I_{cm}$, ou seja, se considerarmos que a distância entre o centro de gravidade do corpo suspenso e o eixo de suspensão é muito grande em comparação com as dimensões deste mesmo corpo, então, a (4.23) recai no caso do pêndulo simples, ou seja,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (4.24)$$

Ao igualarmos as Equações (4.23) e (4.24), que referem-se ao pêndulo físico e pêndulo simples, respectivamente, temos como resultado,

$$L = \frac{I_{total}}{Mh} \quad (4.25)$$

A Equação (4.25) refere-se ao comprimento L de um pêndulo simples (i) equivalente ao pêndulo físico (ii), ou seja, este é o comprimento L para o qual (i) tem o mesmo período de oscilação de (ii) considerado.

Um sistema de pêndulo simples compreende um modelo idealizado de uma massa m que oscila em torno de um ponto de equilíbrio após sofrer uma perturbação, estando suspenso por um fio de comprimento L de massa desprezível. Aqui a força restauradora é devido à gravidade, que força o objeto a retornar para o ponto mais baixo. No tratamento teórico, supõe-se que toda a massa está concentrada em um único ponto.

Diferente deste sistema quase ideal, um pêndulo físico, é definido como qualquer corpo rígido que pode oscilar verticalmente em torno de um eixo perpendicular ao seu plano, estando suspenso por um ponto “ P ” (ponto de pivô). Este sistema compreende uma vasta gama de situações reais, a começar por sua distribuição de massa, tal que os efeitos de torque e inércia devam ser considerados.

5 SISTEMAS ACOPLADOS

O estudo do movimento microscópico de sólidos; as oscilações de um campo magnético; problema de 3 corpos e outros, são exemplos de estudos que envolvem sistemas acoplados e oscilantes dentro do campo de estudo da física, contudo, a descrição de sistemas acoplados se estende a diversas outras áreas de conhecimento, tendo, inclusive, aplicabilidade na área da Físico-Química, como na descrição do movimento microscópico de sólidos bem como sua descrição em termos de vibrações elásticas e descrição do acoplamento simultâneo de um RNAm disperso no citoplasma, abrangendo a área da Biologia, por exemplo. Diante da relevância deste fenômeno na natureza e, tendo em vista sua vasta aplicabilidade experimental, torna-se essencial o estudo e análise destes tipos de sistemas acoplados dentro de sala aula, – como na investigação de variáveis como amplitudes de movimento, frequência e período de oscilações, – para que desta forma, haja a compreensão de diversos fenômenos da natureza, sejam eles biológicos, químicos ou físicos, visto que nela, encontramos diversas formas de acoplamento (THORNTON; MARION, 2011).

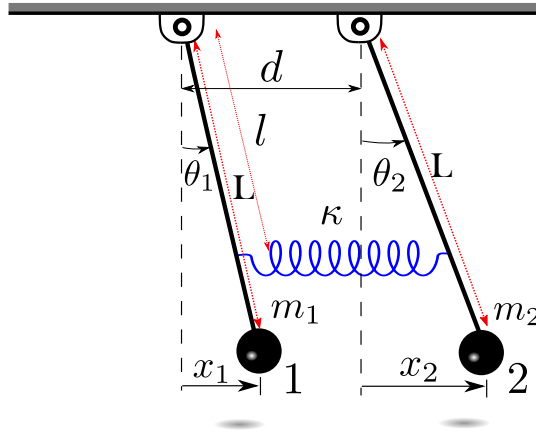
5.1 SISTEMA DE PÊNDULOS ACOPLADOS

A aplicação de uma força acionadora periódica e externa a um sistema formado por um único oscilador harmônico, implica no caso em que o próprio acionador se comporta como um oscilador. Neste caso, estamos desprezando o efeito de retorno do oscilador harmônico sobre o acionador, o que em muitos casos não confere importância tão relevante na descrição de sua dinâmica, mas se consideramos a oscilação de dois ou mais osciladores conectados, tal que sua energia possa ser transferida de trás para frente, temos então um caso de sistemas de oscilações acopladas, que podem ser descritas em termos de *coordenadas normais* que oscilam com frequência simples, bem definidas e independentes uma das outras, não estando sujeitas, portanto, a nenhum tipo de acoplamento. Essas coordenadas normais permitem descrever a dinâmica complexa de um sistema acoplado, por vezes não-periódico, independente do acoplamento das coordenadas ordinárias que descrevem a posição das partículas. Ao fazer uma coordenada normal variar com o tempo, temos a excitação dos **modos normais**, que para um sistema com n graus de liberdade, tem-se n modos normais de vibração, podendo alguns serem idênticos. Portanto, o movimento geral de um sistema complexo como este, é na verdade a sobreposição destes modos de oscilação, contudo, o ajuste das condições iniciais permite que eles sejam excitados independentemente, facilitando sua descrição (THORNTON; MARION, 2011; NUSSENZVEIG, 2018).

5.2 SISTEMA DE DOIS PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR MOLAS

Consideremos um sistema composto por dois pêndulos físicos idênticos acoplados entre si por meio de uma mola de constante elástica κ , estando suspensos por hastes de comprimento L (de massas não-desprezíveis) por um ponto fixo O , tal que os efeitos de inércia e torque tanto das massas pendulares quanto das barras devam ser considerados. A cada extremidade das hastes são fixadas massas m_1 e m_2 de valores iguais entre si, ou seja $m_1 = m_2 = m$, onde l é a distância do eixo de rotação até o ponto onde encontram-se as molas de massas desprezíveis, como pode ser visto na Figura (5.1) (THORNTON; MARION, 2011).

Figura 5.1 – Pêndulos acoplados e parâmetros do sistema.



Fonte: Autoria própria (2021).

Assim, de forma geral, para cada um dos pêndulos vale a seguinte relação:

$$I_i \ddot{\theta}_i = \tau_i \quad (5.1)$$

onde θ_i é o ângulo entre a haste e o eixo vertical; I_i refere-se ao momento de inércia do pêndulo em torno do seu ponto de suspensão ($I_1 = I_2$ se considerarmos características iguais) e τ_i é o torque exercido em cada haste (TROCARU et al., 2020).

O torque resultante generalizado é dado por:

$$\tau_i = \tau_{ei} - \tau_{gi} \quad (5.2)$$

onde tem-se que $\tau_{gi} = mgL \sin \theta_i$, que é o torque devido a ação da força gravitacional e $\tau_{ei} = \kappa x l \cos \theta_i$, sendo devido a ação da própria mola, onde x refere-se a extensão da mola relaxada.

Analisemos, portanto, o caso particular em que os pêndulos acoplados movem-se para a direita, neste caso, temos um deslocamento referente a mola central de $(x_2 - x_1 > 0)$, sendo $x_2 > x_1$, o que resulta em um esticamento ou elongação resultante da mola central.

Considerando um regime de pequenas oscilações, no qual $\theta_i \ll 1$, vale a aproximação $\sin \theta_i \approx \theta_i$ e $\cos \theta_i \approx 1$ (o que configura um sistema acoplado em uma dimensão com dois graus de liberdade). Podemos facilmente observar que $x_i \approx l\theta_i$ no braço de alavanca, assim, tomando a expressão em (5.2), enfatizando-se que as massas m_1 e m_2 são iguais a um valor m , temos o seguinte sistema de equações¹:

$$\begin{cases} \tau_{r1} = \tau_{e1} - \tau_{g1} = \kappa(x_2 - x_1)l\cos\theta_1^1 - mgL\sin\theta_1^1 \\ \tau_{r2} = \tau_{e2} - \tau_{g2} = -\kappa(x_2 - x_1)l\cos\theta_2^1 - mgL\sin\theta_2^1 \end{cases} \quad (5.3)$$

Assim, tomando a Equação (5.1), fazendo a substituição angular $x_i = l\theta_i$ e colocando os devidos termos em evidência e dividindo todos o membros por I na Equação (5.3) acima, teremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \underbrace{\left(\frac{mgL}{I}\right)}_{\omega_0^2} \theta_1 - \underbrace{\frac{\kappa l^2}{I}}_{\Omega^2} (\theta_2 - \theta_1) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \underbrace{\left(\frac{mgL}{I}\right)}_{\omega_0^2} \theta_2 + \underbrace{\frac{\kappa l^2}{I}}_{\Omega^2} (\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

onde tomando $\omega_0^2 = \frac{mgL}{I}$ e $\Omega^2 = \frac{\kappa l^2}{I}$ teremos uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem acoplada (TROCARU et al., 2020):

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 - \Omega^2 (\theta_2 - \theta_1) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 \theta_2 + \Omega^2 (\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

A Equação (5.5) descreve um movimento oscilatório que pode executar oscilações harmônicas com certas frequências características, no entanto, este conjunto de equações não é capaz de descrever o M.H.S por causa dos termos de acoplamento devido a mola. Sendo assim, a seguinte solução pode ser suposta afim de encontrar a solução geral (BUTKOV, 1968):

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \Theta_1 e^{-i\omega t} \\ \theta_2(t) = \Theta_2 e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (5.6)$$

Derivando a Equação (5.6) e substituindo as relações na Equação (5.5), cancelando o fator exponencial ($e^{-i\omega t}$) e reunindo os termos em comum, chegamos a um sistema de duas equações lineares homogêneas, que descrito na forma matricial fica:

¹Os sinais são tomados conforme a contribuições das forças peso e força elástica no sistema que produzem movimentos de rotação em determinados sentidos.

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que haja uma solução não-trivial para este sistema, o determinante deve se anular, tal que:

$$\det \left(\begin{bmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Assim, teremos a expansão para o produto secular na seguinte forma:

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2)^2 - (\Omega^2)^2 = 0$$

que pode ser visto também como

$$[(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 + \Omega^2)][(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 - \Omega^2)] = 0 \quad (5.7)$$

Assim, temos que a solução para ω na Equação (5.7) fornece diretamente as duas autofrequências para o sistema, dadas por:

$$\omega_s = \omega_0; \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \quad (5.8)$$

As Equações em (5.8) expressam as *frequências características* do sistema. O subíndice s indica que os pêndulos oscilam em simetria, e o subíndice a indica oscilações em um caso antissimétrico. Sendo assim, as massas pendulares só podem vibrar em M.H.S com estes valores de ω . Para obtermos uma descrição mais explícita do movimento, substituímos os valores de ω nas Equações (5.6), obtemos as relações correspondentes:

$$\Theta_1 = \Theta_2 \quad (\omega = \omega_s); \quad \Theta_1 = -\Theta_2 \quad (\omega = \omega_a) \quad (5.9)$$

Por serem homogêneas, um dos coeficientes permanece indeterminado. Fisicamente, essa situação implica que o sistema pode vibrar com amplitude arbitrária para qualquer uma das frequências características, logo, as relações existentes entre Θ_1 e Θ_2 correspondem a relação entre as massas oscilantes (BUTKOV, 1968). Tomemos a primeira frequência (ω_s), que dá origem à solução:

$$\theta_1^{(1)}(t) = C_1 e^{-i\omega_s t}; \quad \theta_2^{(1)}(t) = C_1 e^{-i\omega_s t} \quad (5.10)$$

Temos então que qualquer que seja o valor da constante complexa C_1 , as duas massas pendulares vibrarão em fase com diferença de fase nula. Escrevamos:

$$C_1 = u_0 e^{i\varphi_u}; \quad (u_0, \varphi_u = \text{real}) \quad (5.11)$$

Logo, temos que as soluções reais são:

$$\begin{cases} \theta_1^{(1)}(t) = u_0 \cos(\omega_s t - \varphi_u) \\ \theta_2^{(1)}(t) = u_0 \cos(\omega_s t - \varphi_u) \end{cases} \quad (5.12)$$

Prosseguindo de maneira análoga para a segunda frequência (ω_a), temos:

$$\theta_1^{(2)}(t) = C_2 e^{-i\omega_a t}; \quad \theta_2^{(2)}(t) = -C_2 e^{-i\omega_a t}, \text{ com } C_2 = v_0 e^{i\varphi_v} \quad (5.13)$$

Assim:

$$\begin{cases} \theta_1^{(2)}(t) = v_0 \cos(\omega_a t - \varphi_v) \\ \theta_2^{(2)}(t) = -v_0 \cos(\omega_a t - \varphi_v) = v_0 \cos(\omega_a t - \varphi_v + \pi) \end{cases} \quad (5.14)$$

A defasagem em $\theta_2^{(2)}(t)$ indica que as massas pendulares vibrarão com diferença de fase de π . Aos pares de soluções (θ_1, θ_2) dá-se o nome de *modo normal de vibração* ou *modo característico de vibração*. De modo geral, o sistema pode ter uma solução que é resultado dos dois *modos normais de vibração*, assim (BUTKOV, 1968):

$$\begin{cases} \theta_1(t) = u_0 \cos(\omega_s t - \varphi_u) + v_0 \cos(\omega_a t - \varphi_v) \\ \theta_2(t) = u_0 \cos(\omega_s t - \varphi_u) - v_0 \cos(\omega_a t - \varphi_v) \end{cases} \quad (5.15)$$

A igualdade das características físicas do sistema torna fácil a verificação de que o conjunto de equações em (5.21) são uma solução do sistema de equações diferenciais acopladas, sendo esta a solução geral. O movimento das massas pendulares pode ser obtido a partir de quatro condições iniciais arbitrárias para $\theta_1(t)$; $\theta_2(t)$; $\dot{\theta}_1(t)$ e $\dot{\theta}_2(t)$ e a partir destas, obtém-se os parâmetros $u_0, v_0, \varphi_u, \varphi_v$ (BUTKOV, 1968).

5.2.1 Coordenadas Normais

O conjunto de soluções explicitado na Equação (5.5) exprime matematicamente que o sistema de pêndulos encontra-se acoplado, o que é visto facilmente na dependência de θ_1 com θ_2 na satisfação da equação diferencial ordinária correspondente. Fisicamente, isto implica dizer que, em geral, o movimento de um dos pêndulos implicará no movimento do outro.

Um movimento arbitrário devido à condições iniciais quaisquer pode ser representado pela superposição dos modos característicos (Equação (5.9)), sendo necessário tomar condições iniciais adequadas para que haja esse movimento segundo estes dois modos, contudo, por mais que a expressão em (5.5) nos leve a entender que sempre o movimento de um acarretará no movimento do outro pêndulo, isto não é aplicável quando se trata especificamente dos modos normais de vibração, visto que é possível excitar um modo normal sem afetar diretamente o outro, e esta afirmativa nos induz a pensar que estes modos de vibração **não** estão acoplados (BUTKOV, 1968; THORNTON; MARION, 2011).

Ao afirmarmos que um movimento dito arbitrário de um sistema de pêndulos acoplados pode ser representado como a superposição de dois modos normais de vibração, podemos definir um conjunto de coordenadas dependentes do tempo e que são combinações lineares de θ_1 e θ_2 , sendo, portanto, correspondentes à excitação de diversos modos de oscilação do sistema (BUTKOV, 1968). Para este caso, temos por uma notação complexa o seguinte²:

$$\begin{cases} \theta_1 = Ae^{-i\omega_s t} + Be^{-i\omega_a t}; \\ \theta_2 = Ae^{-i\omega_s t} - Be^{-i\omega_a t} \end{cases}$$

Ao adicionarmos e subtrairmos o sistema de equações acima, temos que,

$$\begin{cases} 2Ae^{-i\omega_s t} = \theta_1 + \theta_2; \\ 2Be^{-i\omega_a t} = \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

Analisemos agora duas situações. Na primeira, o sistema vibra no primeiro modo normal, ou seja, estamos tomando $B = 0$ ou equivalentemente $\theta_1 - \theta_2 = 0, \forall t$ e ao mesmo tempo, temos que $\theta_1 + \theta_2$ exibe variações harmônicas e de modo análogo, no segundo modo, temos que $\theta_1 - \theta_2 = 0$ para todos os valores de t . Ou seja, tomando $2Ae^{-i\omega_s t} = \eta_1$ e $2Be^{-i\omega_a t} = \eta_2$, observa-se que as variações de η_1 não são correspondentes a variações de η_2 , logo, são independentes (BUTKOV, 1968). Em termos destas novas variáveis temos:

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_1) \\ \theta_2 = \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1) \end{cases} \quad (5.16)$$

²A e B são constantes complexas determinadas pelas condições iniciais.

Assim, reorganizando a Equação (5.5) de modo a agrupar os valores correspondentes a θ_1 e θ_2 , podemos substituir a (5.17) na (5.5), o que nos dá

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\ddot{\eta}_2 + \ddot{\eta}_1) + \frac{1}{2}(\omega_0^2 + \Omega^2)(\eta_2 + \eta_1) - \frac{\Omega^2}{2}(\eta_2 - \eta_1) &= 0 \\ \frac{1}{2}(\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + \frac{1}{2}(\omega_0^2 + \Omega^2)(\eta_2 - \eta_1) - \frac{\Omega^2}{2}(\eta_2 + \eta_1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

E utilizando-se de simples algebrismos como soma e subtração encontramos que,

$$\ddot{\eta}_2 + \underbrace{\omega_0^2}_{\omega_s^2} \eta_2 = 0; \quad \ddot{\eta}_1 + \underbrace{(\omega_0^2 + 2\Omega^2)}_{\omega_a^2} \eta_1 = 0 \quad (5.18)$$

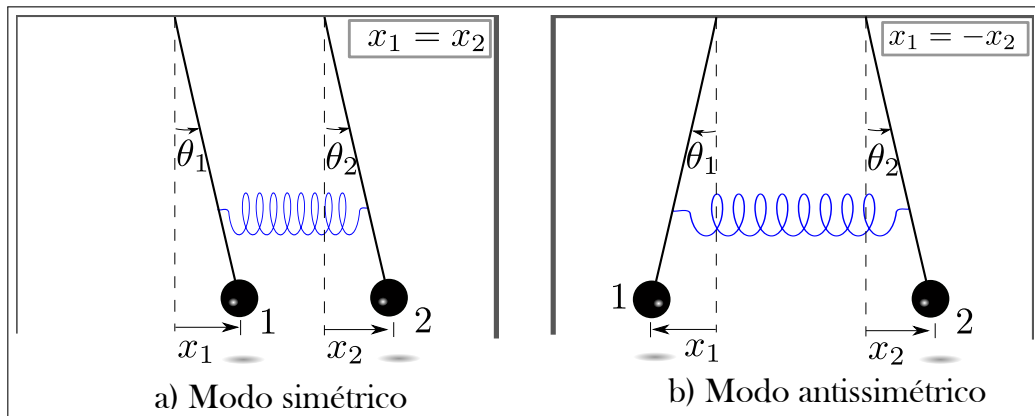
onde podemos verificar agora que as equações de movimento estão *desacopladas*, tornando-se trivial a tarefa de calcular as frequências características, que são exatamente as mesmas expressas na Equação (5.8).

Às coordenadas η_1 e η_2 , dá-se o nome de *coordenadas normais*, que, para este caso, são dependentes das quatro constantes arbitrárias, que por sua vez, são definidas pelas condições iniciais do problema (BUTKOV, 1968; THORNTON; MARION, 2011).

5.3 AJUSTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS E OS MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO

O movimento geral de um sistema acoplado é, na verdade, uma sobreposição de vários *modos normais de vibração*, contudo, se tomarmos condições iniciais apropriadas, podemos ter movimentos oscilatórios em *fase* ou em *oposição de fase*, sendo denominados também como movimentos simétricos ou antissimétricos, respectivamente (THORNTON; MARION, 2011; ALONSO; FINN, 2018). Abaixo, vemos uma representação esquemática do *modo simétrico* (Figura (5.2)(a)) e *antissimétrico* (Figura (5.2)(b)).

Figura 5.2 – Modos normais de vibração.



Fonte: Autoria própria (2021).

Para o caso em que os osciladores se movem em *fase* ($x_1(t) = x_2(t)$) com amplitudes iguais teremos que,

$$\theta_1 = u_0 \sin(\omega_s t + \varphi_u); \quad \theta_2 = u_0 \sin(\omega_s t + \varphi_u); \quad \omega_s = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \quad (5.19)$$

As equações acima sugerem que a frequência dos osciladores acoplados é igual à frequência de oscilação que cada massa teria individualmente se não houvesse acoplamento, pois tomando as condições do sistema que se move em fase com massas e amplitudes iguais, a mola de acoplamento κ não sofre nenhum tipo de deformação, logo, não exerce diretamente uma força sobre as massas, que movem-se como se não houvesse acoplamento, embora haja (BUTKOV, 1968).

Já no segundo caso, onde as massas movem-se em *oposição de fase*, i.e ($x_1(t) = -x_2(t)$), e com amplitudes iguais, temos:

$$\theta_1 = v_0 \sin(\omega_a t + \varphi_v); \quad \theta_2 = -v_0 \sin(\omega_a t + \varphi_v); \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \quad (5.20)$$

Vemos claramente neste último caso que a frequência dos osciladores em *oposição de fase* é maior que a frequência dos osciladores *em fase* ($\omega_a > \omega_s$), que teoricamente estão sem efeito da mola de acoplamento. Isto se explica fisicamente pelo fato de que diferente do modo normal em fase, este modo tem a mola κ comprimida ou distendida.

Temos então que nos modos normais de vibração, as massas se movem com uma diferença de fase constante, sendo nula para o modo em fase (simétrico) e π quando em fora de fase (antissimétrico). Desta forma, para o caso em que ambas as massas oscilam *fora de fase*, os deslocamentos são sempre iguais e contrários (Figura 5.2(b)), implicando em uma elevação da frequência de oscilação, visto que não há simetria no movimento, forçando as molas a trabalhar mais, deste modo, $\omega_a > \omega_0$ - ver Equação (5.8).

Tomemos agora as condições iniciais onde $\theta_1(0) = \theta_2(0)$ e $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0)$, o que indica que as partículas oscilam em *fase* com *frequência livre* ω_s , caracterizando então o **modo simétrico**, onde os deslocamentos dos dois pêndulos são iguais (Figura 5.2(a)), levando a um menor grau de frequência, que pode ser melhor entendida se compreendermos que devido a mola de acoplamento não se comprimir nem se estender no modo simétrico, é como se ela não existisse, uma vez que sua deformação anula seus efeitos em confronto com os efeitos da *força restauradora* agente.

5.4 BATIMENTOS RESSONANTES

Vamos analisar agora o caso dos batimentos ressonantes. Esta situação ocorre quando temos dois sistemas, (no nosso caso, dois pêndulos físicos) com características idênticas, conforme visto na Figura (5.13) para o caso em que $m_1 = m_2 = m$ e que l é igual para

ambos, tal que suas frequências de oscilações livres ω_0 são as mesmas quando postos a oscilar de forma independente.

Retomemos ao conjunto de Equações expresso em (5.21), que contém *quatro* constantes arbitrárias, logo, exprimindo a solução geral da Equação Diferencial de 2º ordem expressa em (5.5) - que envolve uma combinação linear dos modos normais de oscilação, sendo estas então correspondentes. Notamos que ambas as expressões para θ_1 e θ_2 denotam as resultantes da interferência de dois movimentos harmônicos simples (acoplados) na mesma direção, entretanto com *frequências* e *fases* distintas.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = u_0 \cos(\omega_s t - \varphi_u) + v_0 \cos(\omega_a t - \varphi_v) \\ \theta_2(t) = u_0 \cos(\omega_s t - \varphi_u) - v_0 \cos(\omega_a t - \varphi_v) \end{cases} \quad (5.21)$$

Ao deslocarmos um dos pêndulos de sua posição inicial, ao qual denotaremos de θ_B e mantemos o outro pêndulo em sua posição de equilíbrio, iremos encontrar condições iniciais em termos das *quatro* constantes arbitrárias como sendo: $\theta_1(0) = \theta_B$; $\theta_2(0) = 0$; $\dot{\theta}_1(0) = 0$ e $\dot{\theta}_2(0) = 0$. Como estas condições envolvem as posições e velocidades angulares do sistema, teremos que derivar a expressão em (5.21). Ao fazermos todas estas operações e inclusive substituindo estas condições iniciais, ficamos com o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \theta_B = u_0 \cos(\varphi_u) + v_0 \cos(\varphi_v) \\ 0 = u_0 \cos(\varphi_u) - v_0 \cos(\varphi_v) \end{cases} \quad (5.22)$$

e para a derivada, temos

$$\begin{cases} 0 = -u_0 \omega_s \sin(\varphi_u) - v_0 \omega_a \sin(\varphi_v) \\ 0 = -u_0 \omega_s \sin(\varphi_u) + v_0 \omega_a \sin(\varphi_v) \end{cases} \quad (5.23)$$

Ao somarmos o sistema na (5.23) acima, notaremos que $0 = -2u_0 \omega_s \sin(\varphi_u)$. A única forma de satisfazer esta equação é se $\sin(\varphi_u) = 0$, visto que o sistema tem que ter amplitude real. Ao resolvermos esta equação, verificaremos que $\varphi_u = 0$. Por efeito, vamos realizar uma operação inversa (subtração) em (5.23) a fim de encontrar a variável φ_v . Ao realizarmos os mesmos procedimentos análogos, obteremos que φ_v também é nulo, ou seja, $\varphi_v = 0$.

Se substituirmos $\varphi_u = \varphi_v = 0$ na (5.22), notaremos que as amplitudes equivalentes u_0 e v_0 valem:

$$u_0 = v_0 = \frac{\theta_B}{2} \quad (5.24)$$

Vamos novamente retornar à Equação (5.21)³. Ao substituirmos todos os valores encontrados, teremos um novo conjunto de equações. Veja a seguir:

³Note que independente de os termos φ_u e φ_v estarem com sinais negativos, isto de fato não importa, uma vez que estas condições são arbitrárias.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{\theta_B}{2} [\cos(\omega_s t) + \cos(\omega_a t)] \\ \theta_2(t) = \frac{\theta_B}{2} [\cos(\omega_s t) - \cos(\omega_a t)] \end{cases} \quad (5.25)$$

O conjunto de equações acima na (5.25) pode ser reorganizado em termos de identidades trigonométricas. Se lembramos que:

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a - b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \end{aligned}$$

Ao realizarmos operações simples de soma e subtração em (5.4), ficaremos com:

$$\begin{aligned} \cos(a + b) + \cos(a - b) &= 2 \cos(a) \cdot \cos(b) \\ \cos(a + b) - \cos(a - b) &= 2 \sin(a) \cdot \sin(b) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Por comparação simples entre a (5.26) e (5.25), podemos determinar os valores a e b , que descrevem os fatores ω_s e ω_a . Esta escolha, no entanto, não é arbitrária, pois devemos lembrar que para o caso de oscilações acopladas, a frequência angular para um caso sem acoplamento, é sempre menor do que quando há acoplamento. Para isso, consideraremos $(a + b) = \omega_a t$ e $(a - b) = \omega_s t$. Isso nos retornará:

$$\begin{cases} a = \frac{\omega_a t + \omega_s t}{2} \\ b = \frac{\omega_a t - \omega_s t}{2} \end{cases} \quad (5.27)$$

Observe que na (5.26), temos intrinsecamente a propriedade comutativa, desta forma, ao finalmente retornarmos a Equação (5.25), teremos:

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_B \left[\cos\left(\frac{\omega_a - \omega_s}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_a + \omega_s}{2} t\right) \right] \\ \theta_2(t) = \theta_B \left[\sin\left(\frac{\omega_a - \omega_s}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_a + \omega_s}{2} t\right) \right] \end{cases} \quad (5.28)$$

Denotaremos o seguinte, $\Delta\omega = \omega_a - \omega_s$ e $\bar{\omega} = \frac{\omega_a + \omega_s}{2}$. As relações em (5.28) serão reescritas como:

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_B(t) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \cos(\bar{\omega}t) = \theta_{1\text{máx}}(t) \cdot \cos(\bar{\omega}t) \\ \theta_2(t) = \theta_B(t) \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \sin(\bar{\omega}t) = \theta_{2\text{máx}}(t) \cdot \sin(\bar{\omega}t) \end{cases} \quad (5.29)$$

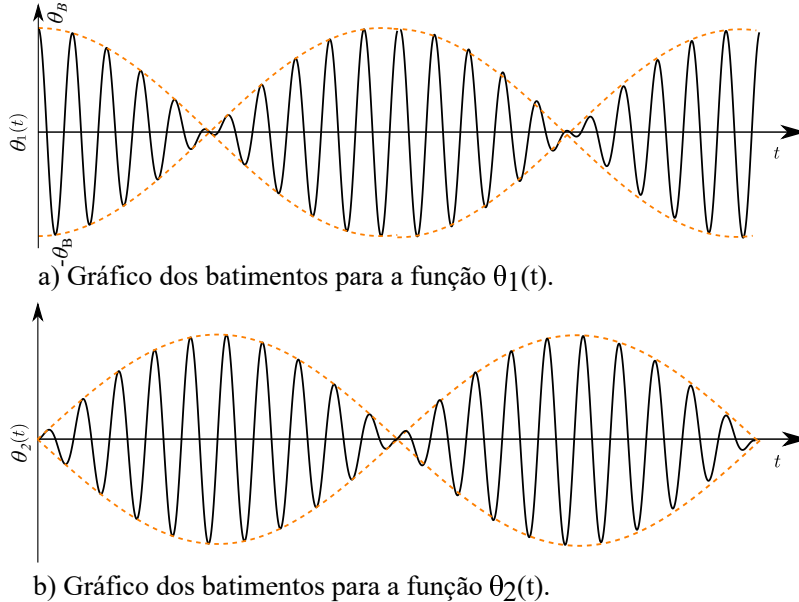
onde as amplitudes $\theta_{i\text{máx}}(t)$ ($i = 1, 2$) variam com o tempo.

As equações expressas em (7.14) descrevem a sobreposição de duas oscilações que têm o fenômeno dos batimentos significativo somente se a variação nos tempos das amplitudes θ_B for muito pequena em comparação com a pulsação da frequência angular $\bar{\omega}$. Ou seja,

$$|\omega_a - \omega_s| \ll \omega_a + \omega_s, \quad \text{ou então,} \quad \Delta\omega \ll \bar{\omega} \quad (5.30)$$

Como implicação de nossa suposição feita anteriormente para pulsação de $\bar{\omega}$, os termos $\theta_B(t) \cos(\Delta\omega t)$ e $\theta_B(t) \sin(\Delta\omega t)$ variam devagar com o tempo. Por este motivo, $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ são necessariamente funções sinusoidais que tem suas amplitudes variando devagar, conforme a Figura (7.11).

Figura 5.3 – A (a) expõe o gráfico geral de $\theta_1(t)$ e (b), o gráfico de $\theta_2(t)$, para o caso das condições iniciais dadas. A modulação da amplitude leva ao fenômeno dos batimentos, com o período para $\theta_{1\text{máx}}(t)$ (linhas cheias) muito maior que o período de $\theta_1(t)$ (linhas interrompidas). Para ambos os casos, $1/\Delta\omega \gg 1/\bar{\omega}$, ou seja, o período da envoltória é muito maior que o da própria oscilação.



Fonte: Autoria própria (2021).

Quando temos um caso de batimento ressonante, onde um dos pêndulos inicialmente tem amplitude diferente de zero (para este caso $\theta_1(t)$), esta amplitude varia diminuindo devagar com o tempo na medida que a amplitude de $\theta_2(t)$ aumenta devagar também, e é nesta dinâmica que a energia de oscilação é transferida do primeiro ao segundo pêndulo,

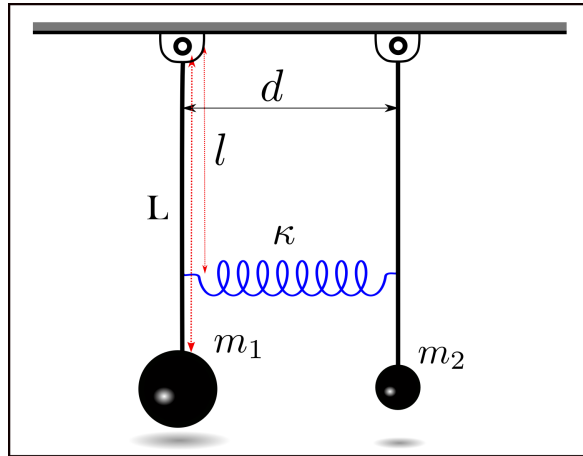
visto que como ambos possuem a mesma frequência natural de oscilação, acarreta-se em um drástico aumento de amplitude a medida que $\omega \rightarrow \omega_0$.

Como estamos trabalhando com sistemas físicos reais, esta amplitude não pode crescer indefinidamente, então, até que esta transferência mútua entre os tempos se dissipe pela própria ação das forças dissipativas, ocorre o aumento de amplitude em um e consequentemente a diminuição da amplitude do outro pêndulo ao qual o primeiro está acoplado. Este fenômeno é conhecido como batimento ressonante, e para este caso, tem-se os batimentos ressonantes em quadratura, visto que os máximos de amplitude de um pêndulo correspondem aos mínimos de amplitude do outro (THORNTON; MARION, 2011).

5.5 BATIMENTOS: CASO GERAL

Vamos considerar um sistema formado novamente por dois pêndulos físicos ligados por uma mola de constante κ sujeitos a oscilar em um plano vertical, conforme a Figura (5.4), no entanto, consideremos que este sistema possua massas pendulares distintas entre si.

Figura 5.4 – Compreende-se como d a distância entre os pêndulos e também como o comprimento da mola relaxada. Note que a massa do pêndulo 1 (esquerda) é muito maior que a massa do pêndulo 2 (direita).



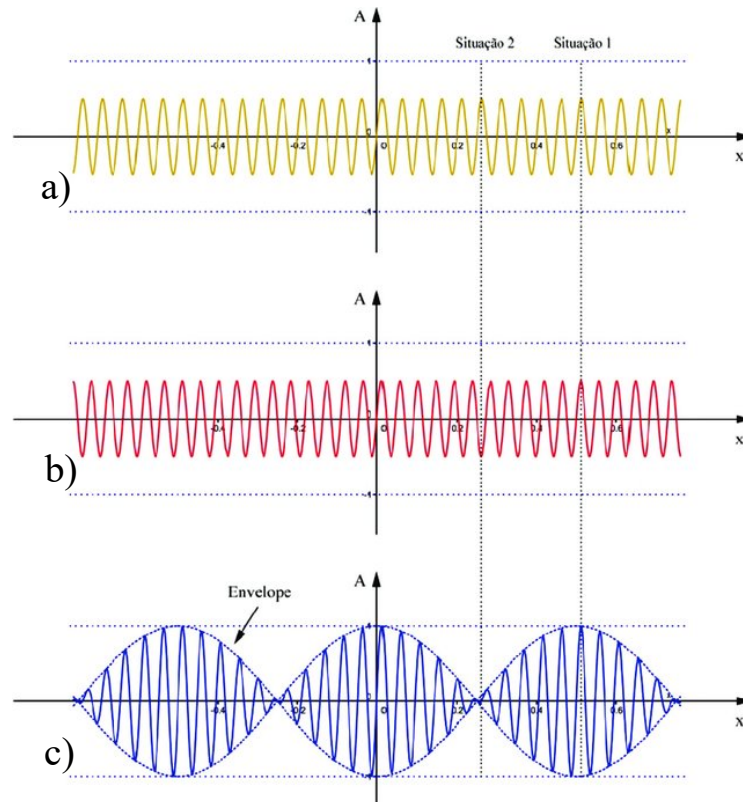
Fonte: Autoria própria (2021).

Ao tomarmos novamente as mesmas condições iniciais para os batimentos ressonantes ($\theta_1(0) = \theta_B$; $\theta_2(0) = 0$; $\dot{\theta}_1(0) = 0$ e $\dot{\theta}_2(0) = 0$), teremos novamente um comportamento com modulações de amplitudes, similar ao comportamento visto na Figura (5.3), no entanto, para este caso não há transferência total de energia, pois as frequências naturais dos dois pêndulos não são mais iguais e amplitude da maior massa nunca cessa totalmente enquanto que na menor massa isso ocorre. Para esta situação, não há mais batimentos em quadratura e o pêndulo 2 (menor massa) passa a oscilar com a frequência do pêndulo 1 (maior massa).

Para o caso em que se tem frequências naturais próximas, ocorre que a sua superposição resulta em uma frequência ω que é igual à média das duas frequências individuais de cada um dos pêndulos ($\Delta\omega$), sendo modulada em amplitude por uma outra igual à metade da diferença $\bar{\omega}$ entre elas, tal como expresso na Equação (7.14).

O comportamento deste sistema em termos de batimentos pode ser visualizado na Figura (5.5) abaixo.

Figura 5.5 – (a) O gráfico em vermelho representa o deslocamento inicial do pêndulo 1 (esquerda) e (b) o gráfico em amarelo representa o pêndulo 2 inicialmente em repouso (direita). Em (c) tem-se o gráfico resultante da superposição das ondas com frequências naturais distintas.



Fonte: (CAZORLA; ARAGÃO; PITOMBO, 2012).

Observamos pela composição da Figura (5.5), que ora as ondas se encontram em seu máximo, o que resulta em um máximo de amplitude de $\theta(t)$ (momento em que estão em fase) e ora há o total desencontro, momento em que estão totalmente fora de fase, o que explica o decaimento total da amplitude.

Ambos os casos podem ser explicados em termos de oscilações forçadas, pois uma vez a mola age como um acoplador fraco, ela transfere energia de oscilação de um pêndulo ao outro, mesmo que inicialmente um deles esteja totalmente em repouso, sendo forçado a oscilar com a frequência do que está inicialmente em movimento.

6 PROCESSOS METODOLÓGICOS

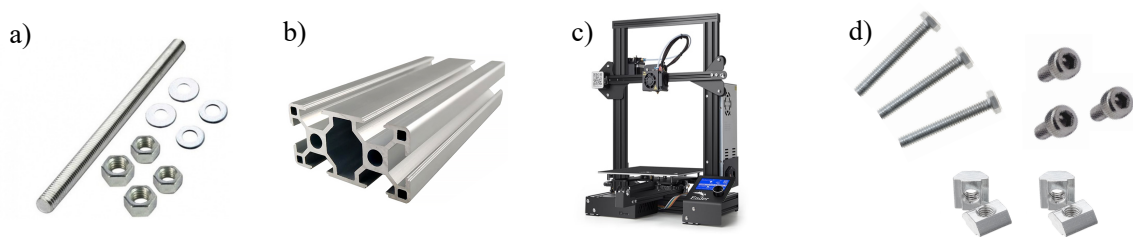
Neste capítulo são descritos todos os processos metodológicos utilizados para obtenção dos resultados do pêndulo físico livre e dos pêndulos físicos acoplados. Foram utilizados dois métodos de obtenção de dados distintos, a saber: Tracker e Arduino. Este estudo foi guiado pelos roteiros da PHYSICS - PHYWE ¹ e 3B SCIENTIFIC², e também por Trocaru et al. (2020) e Chiriacescu et al. (2020).

6.1 PREPARAÇÃO DO EXPERIMENTO

O sistema montado nesse experimento consiste em um pêndulo físico formado por uma barra de alumínio roscada de comprimento total 1 m de 1/4" de diâmetro, com peso total de 180 g, medido em laboratório. Para análise do sistema acoplado, (onde foi utilizado somente o método da videoanálise), o sistema utilizado consistiu somente na expansão do anterior para dois pêndulos acoplados entre si por uma mola de constante κ .

O sistema foi disposto em perfis de alumínio estrutural (30 x 60) mm com parafusos de fixação próprias. As dimensões dos perfis foram de 120 cm de altura por 76,5 cm e largura e toda a estrutura que comporta os componentes elétricos e mecânicos, foi construída com base em modelagem 3D com do software Fusion 360³, impressas por meio da impressora 3D Ender 3 Creality v.1 e v.3.

Figura 6.1 – Representação dos aparatos utilizados. Em (a) a barra roscada de 1/4" com seus respectivos parafusos, em seguida (b), um recorte do alumínio estrutural, em (c) a impressora Ender 3 Creality v.1 e em (d) os parafusos utilizados para fixação das peças impressas em 3D e em sua estrutura.



Fonte: Google imagens (2022).

¹Disponível em: <http://phylab.yonsei.ac.kr/exp_ref/phywe/1_3_25.pdf>

²Disponível em: <https://www.3bscientific.com.br/PhysicsExperiments/UE1050600_PT.pdf>

³Os arquivos referentes a estas peças podem ser acessados livremente na pasta compartilhada do Google Drive, estando disponíveis em: <https://drive.google.com/drive/folders/1LrZx-30_o6gU6dqVurhPzmyG_M9VnEO?usp=sharing>.

Na parte que compete a análise por Arduino, foi utilizado um sensor de posição angular (encoder incremental de modelo LPD3806-600BM-G5-24C), conforme a Figura (6.2)(a). Para a captura das imagens foi utilizada uma câmera filmadora de smartphone filmando a uma taxa de 60 fps e um tripé de filmadora com *Ring Light* (Figura(6.2)(b)), que garantiu a posição fixa de filmagem sem tremulações e com melhor iluminação.

Figura 6.2 – Em (a), o sensor de posição angular utilizado no experimento para o caso das oscilações livres. Na subfigura (b), tem-se a esquematização do tripé. Após a correção de paralaxe, o tripé ficou posicionado a 181 cm do aparato experimental, com a altura de sua base a câmera do celular sendo de 50 cm, estando a câmera exatamente ao centro do sistema.



a) Sensor rotativo incremental.



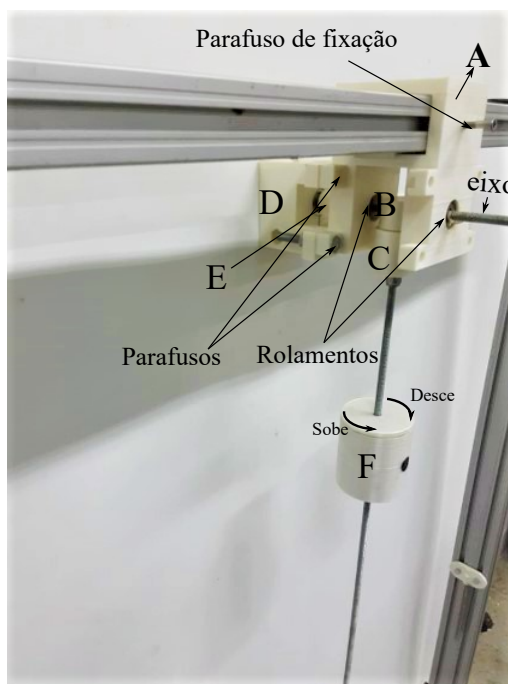
b) Setup de filmagem.

Fonte: Autoria própria (2022).

6.1.1 Montagem das peças impressas no perfil de alumínio

Para uma melhor visualização do que será esquematizado nesta seção, consideremos a Figura (6.3) abaixo.

Figura 6.3 – Vista lateral para esquematização de todas as peças 3D. Note que o sentido de rotação da **Peça F** (que está vinculada a uma porca) determina a sua posição ao longo da barra.



Fonte: Autoria própria (2022).

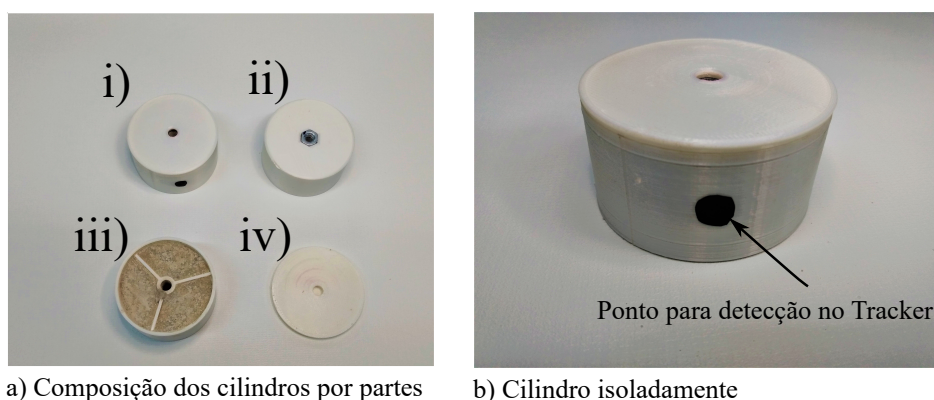
A peça horizontal superior em alumínio comporta todos os suportes impressos em 3D que sustentam o esquema eletrônico e mecânico do sistema. Na peça-suporte principal (**peça A**) - fixada na barra horizontal por parafusos fixadores laterais - , encontram-se acoplados em seus orifícios das paredes laterais dois rolamentos rígido de esferas **SKF - 607-Z**, por onde passa o eixo principal constituído de outra barra roscada das mesmas dimensões supracitadas, tendo sido sua folga ajustada por meio de fita crepe.

No eixo que está compreendido pelas paredes da (**peça A**), encontra-se um sistema similar a de uma mandril, sendo composto pelas peças (**B**) e (**C**) que garante fixação da haste vertical oscilante com um sistema de porcas e contra-porcas sextavadas de 1/4", sendo este o ponto de pivotamento do sistema.

Em uma das extremidades do eixo fixo de rotação (ponto de pivô), está a (**peça E**), que serve como transferidora da oscilação do pêndulo físico deste eixo ao sensor por meio de uma entrada para duas porcas sextavadas, tendo na sua outra extremidade, uma cavidade com chanfro para acoplamento do sensor utilizado (Figura (6.2)(a)). Acoplada à **peça A** por meio de parafusos de 55 mm de largura e 1/4" com porcas fixas em sua extremidade, está a **peça D**, que basicamente suporta o sensor, possuindo também sistema de abraçadeira, caso necessário.

Por fim, vinculado a barra oscilante (que encontra-se acoplada ao mandril composto pelas **peças B e C**) está a **peça F**, que compõe o cilindro de massa 130 g, que possui entrada para porca em sua base inferior para que se possa fazer o ajuste de sua posição ao longo da barra roscada por simples rosqueamento. Esta peça foi preenchida com argamassa para que se pudesse obter uma inércia mais considerável ao sistema, tal que o centro de massa resultante pudesse ser alterado com facilidade. Ao todo, foram impressas seis **peças F**. O resultado pode ser observado na Figura (6.4) a seguir:

Figura 6.4 – Cilindros (**peça F**) preenchidos com argamassa. Em (a), tem-se o cilindro completo (i), com (ii) mostrando o parafuso para ajuste de altura, seguido de (iii) onde mostra-se o preenchimento com argamassa e em (iv) a tampa do cilindro. Na subfigura (b) uma vista de lado com destaque ao ponto preto para detecção no Tracker.



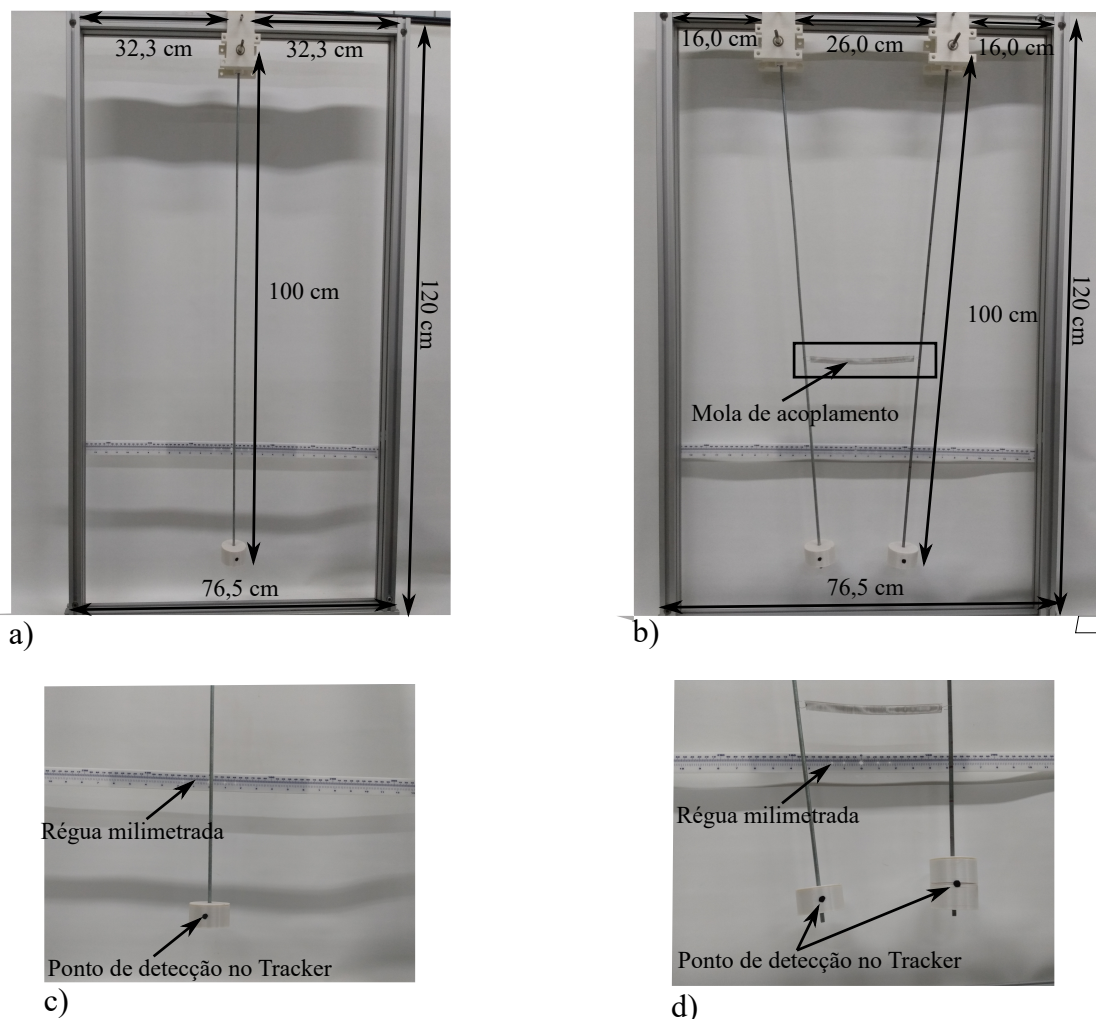
Fonte: Autoria própria (2022).

A justificativa para utilização dos cilindros bem como seu preenchimento com argamassa foi somente a de garantir uma maior inércia ao sistema, possibilitando-nos estudar um caso expandido do convencional, onde tem-se somente uma barra oscilante. A massa utilizada para o cilindro justifica-se, principalmente, pelo fato de a **peça A** não suportar muito peso por não ser uma peça de resistência, contudo, poder-ia-se utilizar massas mais significativas, como três cilindros em única barra, sendo este o caso limite testado. Para o estudo de um pêndulo simples equivalente (o que não é nosso caso), utilizaria-se dessas massas com valores muito mais notáveis, para uma situação em que $m_{\text{cilindro}} \gg m_{\text{barra}}$, contudo, como este não compunha um de nossos objetivos específicos, não nos preocupamos em descobrir o limite de validade para o qual a massa da barra da barra pudesse ser desconsiderada.

Todos os modelos das peças podem ser consultados individualmente no Apêndice A na página 83.

Na Figura (6.5) abaixo, tem-se a esquematização completa do sistema utilizado tanto para o caso das oscilações livres (Figura (6.5)(a)) como para os casos que envolviam oscilações acopladas (Figura (6.5)(b)). Em (c) tem-se um zoom-in referente a (a) e em (d), referente a (b).

Figura 6.5 – Em ambos os métodos de captura de dados, foi utilizada uma régua milimétrica magnética como fundo de escala a fim de garantir o abandono em posições sempre iguais com 100 mm de amplitude.



Fonte: Autoria própria (2022).

Foi utilizado um fundo branco para melhor contraste e um ponto preto no cilindro, que é constituído de material de cor esbranquiçada (poliácido láctico - PLA)⁴ que foi tomado como referência para ponto de massa no *software* Tracker.

⁴O plástico PLA (também chamado de PDLA, PLLA), ou melhor dizendo, poliácido láctico, é um polímero sintético termoplástico que vem substituindo os plásticos convencionais em diversas aplicações, inclusive em impressão 3D. Disponível em: <<https://www.ecycle.com.br/plastico-pla/>>.

6.2 CÁLCULOS PRÉVIOS: DETERMINAÇÃO DA CONSTANTE DA MOLA (κ)

O processo para obtenção das constantes das molas utilizadas no experimento foi realizado com auxílio de um dinamômetro com fixação magnética; pesos em disco com suporte para acoplamento disponíveis em laboratório, régua magnética com fundo de escala em milímetros (mm); mola helicoidal; painel metálico multifuncional; tripés Delta Max com sapatas niveladoras.

Primeiramente, com o auxílio de uma balança digital de precisão da ordem de 10^{-2} g no laboratório de Química do IFPI, determinou-se a massa individual do disco de acoplamento e também do disco com suporte, tendo obtido o valor de 50,60 g e 49,2 g para o disco e o suporte com disco, respectivamente.

Em seguida, com o painel metálico multifuncional devidamente montado com os tripés, fixou-se um parafuso de contenção ao qual receberia os suportes com as molas. Posteriormente, calibrou-se o dinamômetro com a massa pendurada a ele, visto que a sua massa durante o cálculo seria desprezada. Posicionou-se então o dinamômetro com fixação magnética no painel e a régua magnética para medição do fundo de escala. A seguir (Figura (6.6)), está evidenciado o aparato auxiliar experimental.

Figura 6.6 – Aparato experimental para determinação da constante da mola.



Fonte: Autoria própria (2021).

Na Tabela (6.1) estão evidenciados os valores medidos para três situações, que diferem-se entre si quanto a variação de massa do sistema ao adicionar-se um disco individual de massa $m = 50,60$ g ao sistema formado inicialmente somente pelo suporte para mola com disco fixo acoplado de massa $m = 49,20$ g. Esperava-se adicionar 2 discos para que se pudesse fazer as medidas com diferentes massa, no entanto, para a mola utilizada, não foi

possível fazer esta adição, tendo em vista a sua alta distensão, o que cedeu os parâmetros da régua magnética e do painel metálico.

Tabela 6.1 – Determinação das constantes das molas.

Grandeza	Medida		
	1 ^a	2 ^a	3 ^a
Massa (g)	49,20	***	***
Força (N)	0,46	***	***
Deslocamento (mm)	306,70	***	***
Constante (N/m)	1,50	***	***
Constante Média (N/m)	1,50		

Fonte: Autoria própria (2022).

6.3 CAPTURA DOS DADOS COM TRACKER E ARDUINO: PÊNDULO FÍSICO EM OSCILAÇÃO LIVRE

Nesta seção, são discutidos os métodos de coletas de dados. A preparação do ambiente no que se refere a iluminação e a diminuição do atrito entre os rolamentos do sistema foram pontos cruciais para uma melhor coleta de dados.

A construção do pêndulo físico estudado neste trabalho foi pensada de modo a ser possível acoplar cilindros⁵ no decorrer do comprimento da barra roscada ao qual ele é composto, desta forma, foram marcadas 19 posições igualmente espaçadas em 5 cm no comprimento da barra em relação ao eixo de rotação até a base inferior do cilindro de 3,2 cm de altura por 6 cm de diâmetro e 130 g de massa.

Tendo em vista que os resultados a serem observados levavam em conta a variação do centro de massa do sistema com a mudança de posição do cilindro ao longo da barra, foi realizada a coleta tanto no Arduino como por videoanálise, utilizando-se 1 cilindro acoplado a ela, sendo as medidas realizadas de forma independente.

6.3.1 Tracker

Em um primeiro momento, buscou-se analisar a relação entre o período do pêndulo físico utilizado com a variação da posição do cilindro na barra, o que provocava deslocamento do centro de massa no sistema. Desta forma, foram gravados 19 vídeos, sendo 2 deles com duração média de 15 segundos, a fim de verificar o gráfico da posição angular em função do tempo e os outros 17 com duração média de 6 segundos, a fim de tomar somente as informações sobre o período.

⁵Os cilindros foram construídos em impressão 3D, contudo, como o material utilizado (ácido polilático - PLA) possui pouca densidade, eles foram preenchidos com argamassa para que pudessem contribuir mais significativamente em seu momento de inércia.

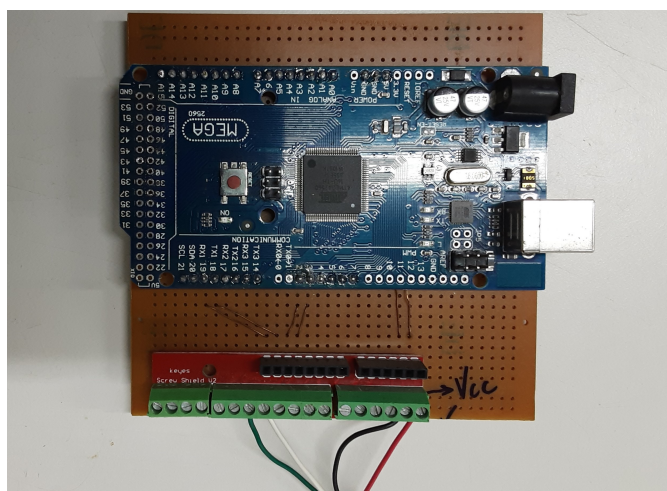
Após a captura das imagens, os arquivos de mídia foram transferidos para o computador para que assim fossem analisados com o software Tracker. Apesar do programa ser capaz de plotar e analisar gráficos, usamos um analisador gráfico externo para uma manipulação e caracterização mais precisa dos dados. Para isso, salvamos os arquivos em .txt e importando os dados para o Origin[®]. Através dos picos de oscilação (onde ocorre a inversão no sentido de movimento), determinamos os períodos equivalentes para cada configuração.

6.3.2 Arduino

A detecção das posições angulares do sistema foram realizadas por meio de sensoriamento Arduino com a utilização de um encoder rotativo incremental, ao qual foi apresentado na subseção (3.2.4) - pág. 27. A placa utilizada foi a Arduino Mega 2560, com *shield* de expansão, estando todo o circuito organizado em uma placa de circuito impresso de 10 cm². Tal procedimento garantiu a fixação dos componentes elétricos como a fiação, evitando assim a movimentação desnecessária que poderia causar ruídos nos pulsos elétricos recebidos.

A lógica do código utilizado se baseou em rotinas de interrupção, que são realizadas a nível de *hardware* por meio da função `attachInterrupt()`. Esta função é acionada quando há mudança no estado lógico de pinos digitais ao qual ela está vinculada, onde através da interpretação dos estados *high* e *low*, torna-se possível a determinação do sentido de rotação do eixo (ARDUINO, 2021a). No caso do código utilizado (ver Apêndices B e B), conectamos o sinal de saída A ao pino 2 e sinal de saída B ao pino 3. Neste caso, a interrupção gerada chama as rotinas **Interrupt_A** e **Interrupt_B**, que carregam o código que é executado toda vez que há essa mudança de estado. Observe o circuito na Figura (6.7).

Figura 6.7 – Circuito Arduino utilizado.



Fonte: Autoria Própria (2022).

Outro ponto importante a ser mencionado é a utilização de variáveis declaradas como voláteis, interpretadas como *volatile*. Ao utilizar este tipo de variável, nos prevenimos de possíveis problemas de compilação que podem vir a ocorrer, como por exemplo o risco que existe do compilador simplesmente eliminar esta variável da memória ao compilar o programa, pois ela não é usada diretamente nas rotinas de *loop()* e *setup()*. Compiladores costumam fazer isso para eliminar variáveis não utilizadas e, assim, economizar espaço em memória.

No que se refere a coleta de dados, foram feitas 19 capturas de forma independente e não-simultânea a videoanálise de modo a garantir a convergência para resultados idênticos (ou próximos) mesmo utilizando métodos diferentes. Após a coleta dos dados “brutos” direto do Monitor Serial do Arduino, que possui interação com o usuário, os arquivos foram salvos em formato .txt, sendo em seguida analisados no plotador gráfico Origin®. Da mesma forma que no método da videoanálise, dois dos dados de coleta foram salvos e analisados completamente para que pudessem ser observados e comparados aos gráficos obtidos no método anterior, sendo os dados restantes sendo capturados e analisados somente no tempo necessário para observar algumas oscilações.

6.4 CAPTURA DOS DADOS COM TRACKER: PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS

Na parte que abrange a análise de pêndulos físicos acoplados, foi utilizado somente o método da videoanálise devido a limitações no *hardware* do Arduino, o que nos impossibilitou em trabalhar com ambos os métodos.

Algumas etapas importantes precederam as gravações dos vídeos para análise, dentre elas, a obtenção das constantes das molas para efeito de comparação com os cálculos teóricos. A constante da mola de acoplamento encontrada foi de $\kappa = 1,50$ N/m, sendo este valor obtido mediante medidas em laboratório com uso de dinamômetro, massas pré-definidas e régua magnética milimétrica. No que se refere a preparação do ambiente, foi novamente utilizado um painel branco de fundo e pontos pretos para serem captados no vídeo.

Os vídeos foram capturados com as posições das molas em diferentes distâncias do eixo de rotação e em diferentes situações, para que pudessem ser analisados tanto os casos de batimentos e modos normais de vibração. Em seguida, os dados foram tratados no Tracker e analisados no Origin®.

6.5 DETERMINAÇÃO DO VALOR DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE

Um fator muito importante quando se trata de pêndulos físicos, ou mesmo de pêndulos simples, é a adoção correta do valor de g (aceleração da gravidade) para o cálculo do período. Segundo Júnior e Aranha (2015), o valor usualmente adotado é de $9,8 \text{ m/s}^2$, no entanto, este valor não deve ser tratado como uma constante, uma vez que devido a velocidade angular do planeta Terra e ao achatamento do planeta, o módulo da aceleração da gravidade aumenta a partir do nível do mar ao percorrer-se um meridiano no sentido dos polos. Sendo assim, para o caso estudado neste trabalho, será utilizada a seguinte expressão:

$$g = 9,7803184[1 + 0,0053024 \sin^2(L) - 0,0000059 \sin^2(2L)] - 3,086 \cdot 10^{-6}H, \quad (6.1)$$

em que L é a latitude e H a altitude acima do nível do mar. Para $H = 5 \text{ m}$ e $L = 2^\circ 54' 14''$ para a cidade de Parnaíba - PI ⁶, obtém-se,

$$g = 9,780084 \text{ m/s}^2 \rightarrow g \approx 9,78 \text{ m/s}^2. \quad (6.2)$$

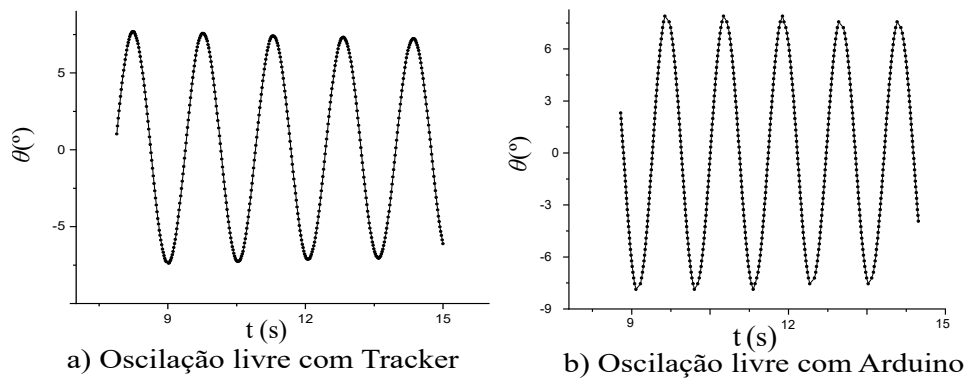
⁶Dados disponíveis em: <<https://www.cidade-brasil.com.br/municipio-parnaiba.html>>.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

7.1 PÊNDULO EM OSCILAÇÃO LIVRE: ARDUINO & TRACKER

O pêndulo físico utilizado neste trabalho estava sujeito apenas à força de ação da gravidade e às forças de resistência (atrito entre os rolamentos). Para o método da videoanálise, tem-se o gráfico da Figura (7.1)(a) e para o Arduino, temos o gráfico expresso na Figura (7.1)(c). Ambos descrevem o comportamento do pêndulo em termos de posição angular (em graus) em função do tempo (em segundos).

Figura 7.1 – Comparação entre os gráficos de θ em função do tempo obtidos em ambos os métodos para a distância de 8,5 cm do eixo à massa cilíndrica.



Fonte: Autoria própria (2022).

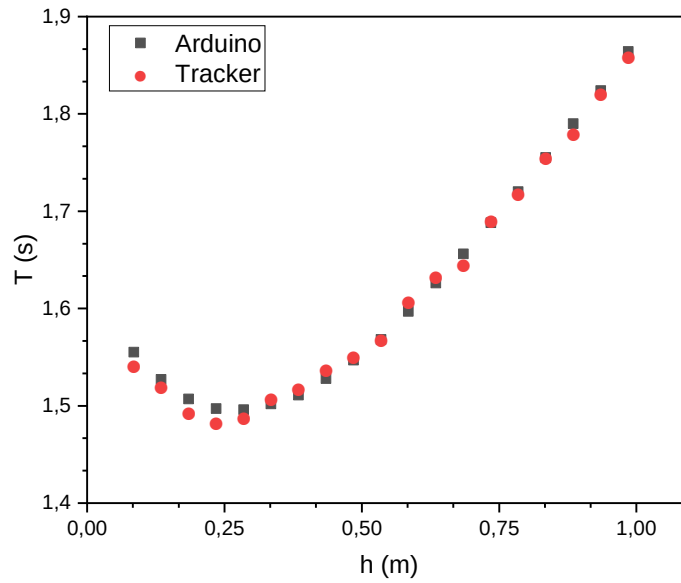
Os resultados observados graficamente estão de acordo com a previsão teórica, que descreve o movimento oscilatório de um pêndulo físico, dependendo, contudo, de um período, ou seja, do tempo necessário para completar uma oscilação. Nota-se que à medida que o tempo evolui, a posição oscila em torno de um ponto de equilíbrio. Pelo próprio comportamento expresso na Figura (7.1), onde acontece tipos de movimentos bem definidos em intervalos de tempo regulares, conclui-se que este é definido como movimento periódico ou harmônico. Pode-se notar, no tempo observado, uma pequena redução da amplitude à medida que o tempo evolui, o que ocorre devido o próprio sistema não ser forçado periodicamente, estando sujeito somente à ação da força-peso e aos inevitáveis atritos, motivo esse que nos remeteu a escolher analisar somente curtos intervalos de tempo.

7.1.1 Dependência funcional entre T e h e o período mínimo

Em um segundo momento, com base nos dados obtidos para o período de uma oscilação completa, pôde-se determinar uma relação entre tal grandeza e a distância do eixo de rotação até o centro de massa do sistema formado pelo cilindro e pela barra, estando o descrito na seção (6.3). Diferente dos experimentos convencionais que envolvem pêndulos físicos, a variação da distância do eixo de rotação ao centro de massa foi feita com base na movimentação do cilindro no comprimento da barra.

Com base nos dados obtidos para ambos os métodos, pudemos obter o período em função da distância do eixo até o centro de massa, como pode ser visto na Figura (7.2) a seguir, em que se tem as curvas de dados experimentais sobrepostos (Figura(7.2)) para ambos os métodos. A curva destacada por pontos vermelhos mostra os dados para o Tracker enquanto que os pontos em cinza denotam os pontos coletados por meio do Arduino.

Figura 7.2 – T em função de h (Arduino & Tracker).



Fonte: Autoria própria (2022).

Podemos notar que o período cresce em ambos os limites para h , tanto quando $h \rightarrow 0$ como quando $h \rightarrow \infty$, passando por um valor mínimo em um intervalo finito de h . A partir de uma análise direta para os gráficos sobrepostos obtidos na Figura (7.2), nota-se que o período de oscilação mínimo ocorre quando a posição do eixo ao centro de massa do cilindro está entre $0,24 \text{ m} < h < 0,29 \text{ m}$, e também que a esquerda deste ponto, (quando $h \rightarrow 0$) de mínimo, o período cresce até certo valor.

Para este nosso sistema, temos que $m_{\text{cilindro}} = 0,130 \text{ kg}$; $m_{\text{barra}} = 0,180 \text{ kg}$; $r_{\text{cilindro}} = 0,03 \text{ m}$; $L_{\text{cilindro}} = 0,032 \text{ m}$ e $L_{\text{barra}} = 1 \text{ m}$. Com base nesses dados, podemos obter a distância h para o qual o período é mínimo, bastando para isso tomar a Equação (4.21) e tomar os valores de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ corretamente. Ao realizarmos todas as operações algébricas,

isso nos fornece um valor de $h_{\min} = 0,2815$ m. Logo, o gráfico está coerente e descreve bem a situação.

É intuitivo notar que quando o centro de oscilação coincide com o centro de massa do sistema, o pêndulo não é capaz de oscilar, pois nesta situação, não haveriam torques resultantes. Contudo, não é possível ver claramente este comportamento no gráfico da Figura ((7.2) devido a arquitetura do próprio sistema.

7.1.2 Obtenção da aceleração da gravidade por meio de regressão não-linear

Ao observarmos o gráfico da Figura (7.2), notamos que claramente não há uma relação puramente linear entre as grandezas de Período (eixo y) e Distância do eixo ao centro de massa (eixo x).

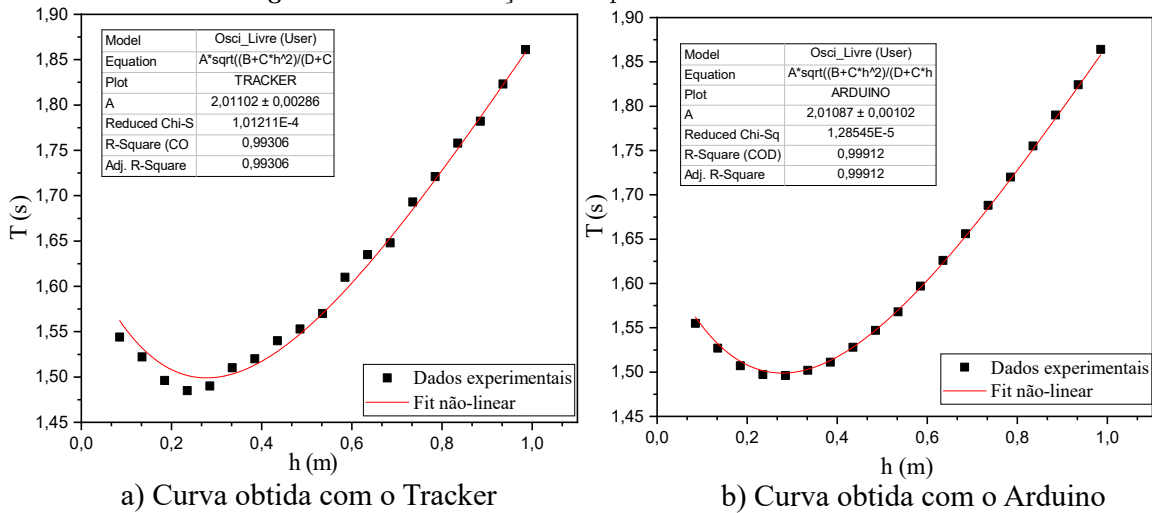
Podemos ajustar a expressão para T em função de h a partir da Equação (4.20) na pág. (36), onde os termos numericamente constantes estão denotados por $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Definimos $\mathcal{A}$ como um parâmetro a determinar. A forma que representa a equação supracitada é:

$$T = \mathcal{A} \left[\frac{\mathcal{B} + h^2}{\mathcal{C} + h} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.1)$$

Conforme mencionado, $\mathcal{B} = \frac{1}{3}l_c^2 + \frac{1}{3}\frac{m_b}{m_c}l_b^2 = 0,461879$ e $\mathcal{C} = \frac{m_b}{m_c}\frac{l_b}{2} = 0,692308^1$. Assim, a partir da expressão (7.1) acima, produzimos a curva de fit não-linear no software Origin[®], deixando h como variável independente e o termo $\mathcal{A}$ como parâmetro a ser determinado.

Podemos notar que o termo $\mathcal{A}$ denota $2\pi/\sqrt{g}$, segundo a expressão em (4.19), logo, é este o parâmetro no fit que nos fornecerá o valor de g , visto que o valor de 2π é constante.

Figura 7.3 – T em função de h para cada um dos métodos.



Fonte: Autoria própria (2022).

¹Estes valores foram definidos com base nos valores obtidos por medição das massas e comprimentos dos objetos utilizados (barra e cilindro).

Observemos que o termo $\mathcal{A}$ da Figura (7.3)(a), que refere-se aos dados do Tracker, possui valor de $2,01102 \pm 0,00286$. Já para os dados da coleta com o Arduino (Figura (7.3)(b)), obtém-se um valor de $2,01087 \pm 0,00102$. Com estes dados, obtemos valores de:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{Tracker}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} &\rightarrow g = \frac{4\pi^2}{\mathcal{A}_{\text{Tracker}}^2} = \frac{4\pi^2}{(2,01102)^2} = 9,76173 \text{ m/s}^2 \\ \mathcal{A}_{\text{Arduino}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} &\rightarrow g = \frac{4\pi^2}{\mathcal{A}_{\text{Arduino}}^2} = \frac{4\pi^2}{(2,01087)^2} = 9,76328 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Quando comparamos com o valor calculado para a cidade de Parnaíba-PI, conforme discutido na pág. (60) na seção de Procedimentos Metodológicos, ao qual obteve-se o valor de $9,780084 \text{ m/s}^2$, alcançamos um erro relativo percentual de $\approx 0,19\%$ se comparado com o valor obtido pelo Tracker e $\approx 0,17\%$ em confronto com o valor encontrado com o Arduino.

7.1.3 Obtenção do momento de inércia do centro de massa e da aceleração da gravidade por regressão linear

Observando a forma da Equação (4.19), podemos elevá-la ao quadrado e deixá-la da seguinte forma.

$$\underbrace{\frac{T^2}{4\pi^2} \left(\frac{m_b l_b}{m_c} + h \right)}_Y = \underbrace{\frac{I_{cm}}{g m_c}}_a + \underbrace{\frac{1}{g}}_b \underbrace{h^2}_X \quad (7.3)$$

em que a e b denotam os coeficientes da reta.

Ao plotarmos o gráfico das expressões correspondentes, temos, conforme a Figura (7.4):

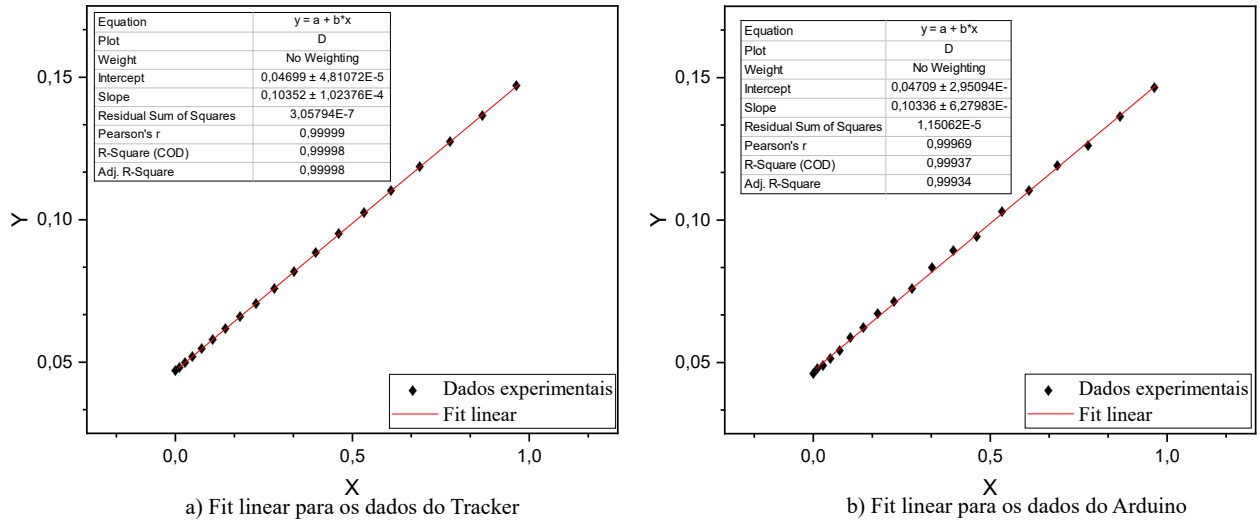
Se levarmos em conta a (7.3) e relacionarmos os valores dos coeficientes, podemos obter os valores da aceleração da gravidade e momento de inércia resultante do centro de massa, tendo como parâmetro de comparação a (4.16), em que se obtém $0,06004 \text{ kg m}^2$ e (6.2), em que se obtém $9,78 \text{ m/s}^2$. Os dados obtidos podem ser consultados na Tabela (7.1).

Tabela 7.1 – Dados obtidos por meio de regressão linear

Método	$g(\text{m/s}^2)$	I_{cm}	Erro em % para g	Erro em % para I_{cm}
Arduino	9,68	0,05923	1,03	1,37
Tracker	9,66	0,05901	1,24	1,74

Fonte: Autoria própria (2022).

Podemos obter uma equação que nos forneça diretamente o valor do momento de inércia total a partir destes coeficientes, para isso, vamos multiplicar e dividir o segundo membro do lado direito da (7.3) por m_c afim de encontrar uma expressão para I_{total} em

Figura 7.4 – Relação linear entre Y e X da Eq. (7.3).

Fonte: Autoria própria (2022).

sua forma geral e levando em conta o teorema dos eixos paralelos. Ao fazer a equivalência deste resultado com a (7.3), nota-se que,

$$\begin{aligned} I_{total(Tracker)} &= m_c g(0,04699 + 0,10352h^2) \\ I_{total(Arduino)} &= m_c g(0,04709 + 0,10336h^2) \end{aligned} \quad (7.4)$$

A Equação (7.4) denota a função experimental para o momento de inércia em termos de h . Para efeito de comparação, podemos calcular alguns momentos de inércia para diferentes valores de h utilizando a (7.4) e a (4.16) para verificar o seu limite de validade. Abaixo, na Tabela (7.2), temos os valores calculados via fórmula teórica e via fórmula experimental com o respectivo erro relativo percentual para ambos os métodos. Utilizamos o valor de g obtido a partir da análise de coeficientes de cada método, e para o caso teórico, utilizamos $g = 9,78 \text{ m/s}^2$.

Tabela 7.2 – Comparação entre valores experimentais e teóricos para o momento de inércia.

h (m)	Tracker (kg m ²)	Arduino (kg m ²)	Teórico (kg m ²)	erro em %	
				Tracker	Arduino
0,985	0,18552	0,18507	0,18617	0,35	0,59
0,685	0,12014	0,12004	0,12104	0,75	0,83
0,385	0,07833	0,07837	0,07931	1,25	1,19
0,085	0,05996	0,06007	0,06051	0,91	0,73

Fonte: Autoria própria (2022).

Com base nos dados da Tabela (7.2), podemos notar que os erros percentuais entre os métodos em si não são discrepantes, e quando comparamos os erros entre os métodos teóricos e experimentais obtidos, percebe-se que esta faixa de erro também é aceitável tendo em vista os fatores experimentais aos quais estamos sujeitos. De forma conclusiva,

podemos dizer que o sistema estudado satisfaz ao Teorema dos Eixos Paralelos para h e que o sistema em questão aqui adotado juntamente com suas metodologias pode ser utilizado para determinar o valor da aceleração da gravidade g e inclusive o momento de inércia total. A partir dos gráficos obtidos na Figura (7.3)(a) e (b), nota-se uma maior suavidade no método que envolve o Arduino. Tal fato pode ser explicado pela taxa de captura do smartphone utilizado (60 fps), pois com esta taxa, permite-se somente que seja capturado um dado a cada 0,0167 seg ou 16.700 μs , enquanto que o Arduino faz a sua referida captura dos dados a cada 1 μs .

7.2 OSCILAÇÕES ACOPLADAS E MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO: TRACKER

Nesta seção são discutidos os modos normais de vibração e os batimentos para um sistema de pêndulos físicos acoplados. Este sistema é basicamente uma extensão do caso anterior onde trabalhou-se com o pêndulo livre, e para o estudo exclusivo dos modos normais, utilizou-se 3 cilindros de massa igual a 130 g, já para estudo dos batimentos utilizou-se de uma combinação de quantidade de cilindros variando quanto a posições na barra. Em ambos os casos foi utilizada uma mola de constante κ a determinar.

7.2.1 Análise da dinâmica dos pêndulos em oscilação simétrica e antissimétrica

Na Tabela (7.3), temos os referentes dados para a frequências angulares obtidas em cada uma das alturas pré-dispostas, que denotam a distância do eixo de rotação até a posição em que a mola está fixada. Os subíndices s e a , denotam o modo simétrico e antissimétrico, respectivamente, sendo os outros subíndices associados (1 e 2), em referência à denominação para o pêndulo físico 1 e 2.

Tabela 7.3 – Valores para a frequência angular nos modos simétrico e antissimétrico para ambos os pêndulos.

$l(m)$	$\omega_{a1}(rad/s)$	$\omega_{a2}(rad/s)$	$\omega_{s1}(rad/s)$	$\omega_{s2}(rad/s)$
0,250	3,30694	3,30694	3,30694	3,25048
0,350	3,42782	3,37262	3,31042	3,25048
0,450	3,42595	3,49066	3,30868	3,25048
0,550	3,55786	3,55786	3,30694	3,25385
0,650	3,69599	3,69599	3,30694	3,2488
0,750	3,84293	3,84763	3,30694	3,25048
0,850	3,96301	4,01225	3,30694	3,25217

Fonte: Autoria própria (2022).

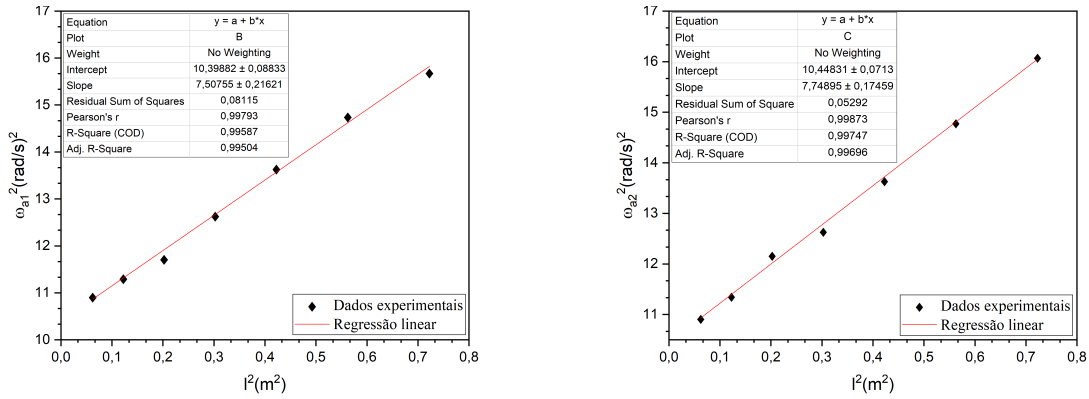
Vamos retomar a Equação (5.8) na pág. (41). Esta expressão diz que $\Omega^2 = \frac{\kappa l^2}{I}$, ao elevá-la ao quadrado, podemos relacioná-la com a equação de uma reta em seu caso geral.

Observe a relação na Equação (7.5) a seguir:

$$\underbrace{\omega_a^2}_Y = \underbrace{\omega_0^2}_{\alpha_0} + \underbrace{\frac{2\kappa}{I}}_{\alpha_1} \underbrace{l^2}_X \quad (7.5)$$

Este formato nos indica que há uma relação linear entre ω_a^2 e l^2 . Levando em conta esta hipótese, plotamos os gráficos de ω_a^2 em função de l^2 para verificação dos conceitos teóricos. As Figuras (7.5)(a) e (b) mostram essa relação.

Figura 7.5 – Dependência de ω_a^2 em função de l^2 para os pêndulos 1 e 2.



(a) Oscilação em modo antissimétrico para o pêndulo 1 acoplado. (b) Oscilação em modo antissimétrico para o pêndulo 2 acoplado.

Fonte: Autoria própria (2022).

Ao realizarmos a regressão linear podemos notar que realmente há esta relação de linearidade entre ω_a^2 e l^2 . As devidas equações da reta para cada um dos casos acoplados, estão apresentadas a seguir na (7.6) e (7.7):

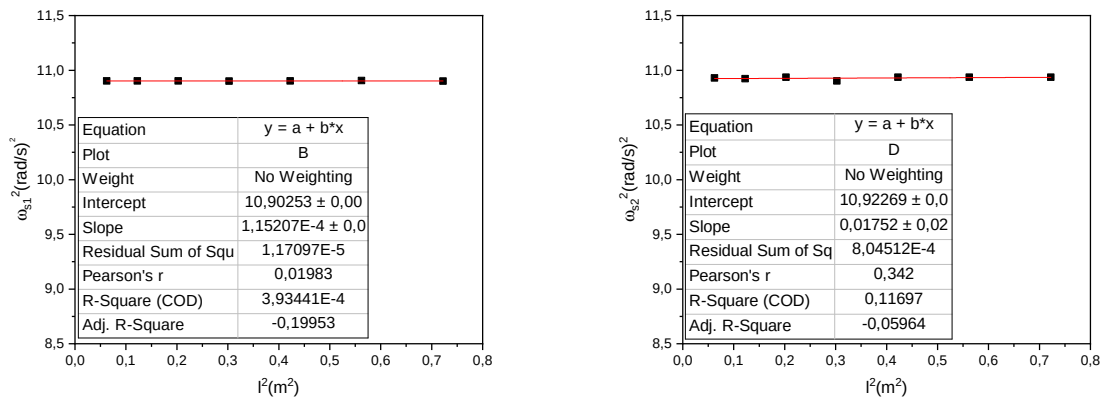
$$\omega_{a1}^2 = 7,50755 l^2 + 10,39882 \quad (7.6)$$

$$\omega_{a2}^2 = 7,74895 l^2 + 10,44831 \quad (7.7)$$

Para o caso em que os pêndulos oscilam em fase (em simetria), a mola de acoplamento não faz efeito algum sobre o sistema, conforme afirma Nussenzveig (2018), logo, é como se ela não existisse e o termo Ω^2 não é levado em consideração. Nesta situação, a frequência de oscilação do pêndulo em fase coincide com a frequência angular de um pêndulo livre sem acoplamento, ou seja,

$$\omega_s^2 = \omega_0^2 \quad (7.8)$$

A Equação (7.8), sugere um comportamento de um gráfico por uma constante. Verifiquemos esta hipótese a seguir observando o comportamento do gráfico da Figura (7.6) a seguir:

Figura 7.6 – Dependência de ω_s^2 em função de l^2 para os pêndulos 1 e 2.

(a) Oscilação em modo simétrico para o pêndulo 1 (b) Oscilação em modo simétrico para o pêndulo 2 acoplado.

Fonte: Autoria própria (2022).

Pela composição dos gráficos nas Figuras (7.6)(a) e (b), notamos que há realmente um comportamento linear e constante quando os pêndulos oscilam em fase. Ao calcularmos a regressão linear obtemos,

$$\omega_{s1}^2 = 0,00015 l^2 + 10,90253 \quad (7.9)$$

$$\omega_{s2}^2 = 0,01752 l^2 + 10,92269 \quad (7.10)$$

7.2.2 Estimativa do período do pêndulo livre e da constante (κ) da mola de acoplamento

Para esta estimativa, devemos considerar novamente a Equação (7.5), evidenciada na pág. (67).

Assim, ao fazermos uma comparação direta com as equações da reta obtidas para os pêndulos no caso simétrico e antissimétrico (7.6), (7.7), (7.9) e (7.10), podemos preencher a Tabela (7.4) a seguir:

Tabela 7.4 – Dados para ω_0 a partir de análise direta.

ω_0 para os pêndulos 1 e 2	$\omega_0^2(\text{rad/s})^2$	$\omega_0(\text{rad/s})$
Modo antissimétrico Pend. 1	10,39882	3,22247
Modo antissimétrico Pend. 2	10,44831	3,23238
Modo simétrico Pend. 1	10,90253	3,30189
Modo simétrico Pend. 2	10,92269	3,30495
Média dos valores	10,66809	3,26598

Fonte: Autoria própria (2022).

Tomando o valor médio para a frequência angular ($\overline{\omega_0}$) da Tabela (7.4), podemos calcular o período experimental médio do pêndulo físico, cujo valor é de:

$$\overline{T}_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1,92383 \text{ s} \quad (7.11)$$

Ao utilizarmos diretamente a expressão em (4.19) para o pêndulo físico, podemos obter o período calculado, assim, para os 3 cilindros, com a massa de 130 g cada e com altura total de 9,6 cm; a massa da barra de 180 g e a distância do eixo ao centro de massa dos 3 cilindros como sendo de 95,20 cm, obteve-se um valor para o período calculado de:²

$$T_{\text{calculado}} = 1,90489 \text{ s} \quad (7.12)$$

Com estes dados, temos um erro relativo percentual próximo a 0,95%.

O valor da constante da mola de acoplamento pode ser obtido a partir das relações (7.6) e (7.7) por comparação direta com a (7.5), assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = 7,50755 \left(\frac{I}{2} \right) = 7,50755 \left(\frac{0,4146537}{2} \right) \approx 1,55652 \text{ N/m} \rightarrow \text{da (7.6)} \\ \kappa = 7,74895 \left(\frac{I}{2} \right) = 7,74895 \left(\frac{0,4146537}{2} \right) \approx 1,60653 \text{ N/m} \rightarrow \text{da (7.7)} \end{array} \right. \quad (7.13)$$

Quando comparamos com o valor medido por meio da Lei de Hooke ($F = \kappa \cdot x$), ao qual foi obtido 1,50 N/m em laboratório, obtemos um erro relativo percentual em torno de 3,63% em confronto com o valor obtido pelo pêndulo 1 e 6,63% pelo pêndulo 2.

Tal discrepância entre ambos os pêndulos pode ser explicada pelas condições dos rolamentos que foram utilizados, uma vez que isto altera drasticamente o valor obtida teoricamente, que não levou em conta essas forças dissipativas.

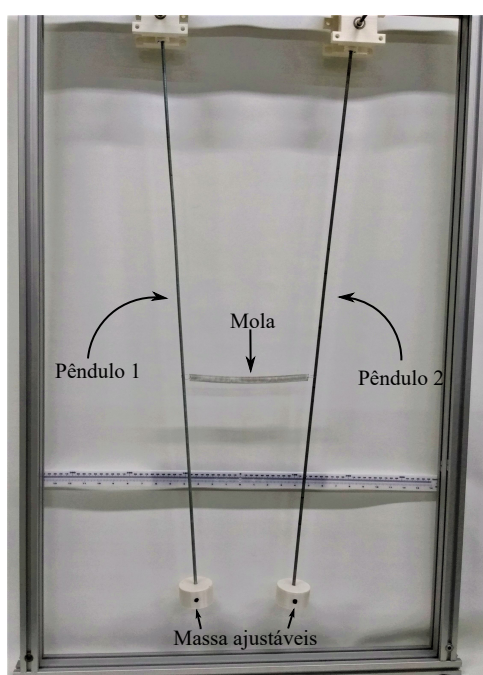
²Para este cálculo utilizamos $g = 9,78 \text{ m/s}^2$, que é o valor teórico para a aceleração da gravidade em Parnaíba-PI.

7.3 DISCUSSÃO QUALITATIVA ACERCA DO FENÔMENO DOS BATIMENTOS: TRACKER

Nesta subseção, analisaremos o fenômeno dos batimentos ressonantes e em seu caso geral, que é alcançado quando se tem algumas situações específicas em pêndulos acoplados, como a alteração de alguma característica física do sistema como a mudança de massa pendular, posição da mola e a forma como são tomadas as condições iniciais, o que provoca a modulação das amplitudes mútua entre ambos os componentes de um sistema.

As nomenclaturas M , $2M$ ou $3M$ indicam os múltiplos inteiros de $1M$, que vale 130 g, equivalente a massa do cilindro isoladamente. Considere como sendo o pêndulo 1 o oscilador à esquerda e o pêndulo 2 o oscilador à direita, em todas as situações, conforme a Figura (7.7). Para todos os casos, considerou-se também a massa da barra, que vale 180 g.

Figura 7.7 – Sistema de pêndulos físicos acoplados para análise dos batimentos. Para o caso da figura, tem-se M para cada um dos cilindros.



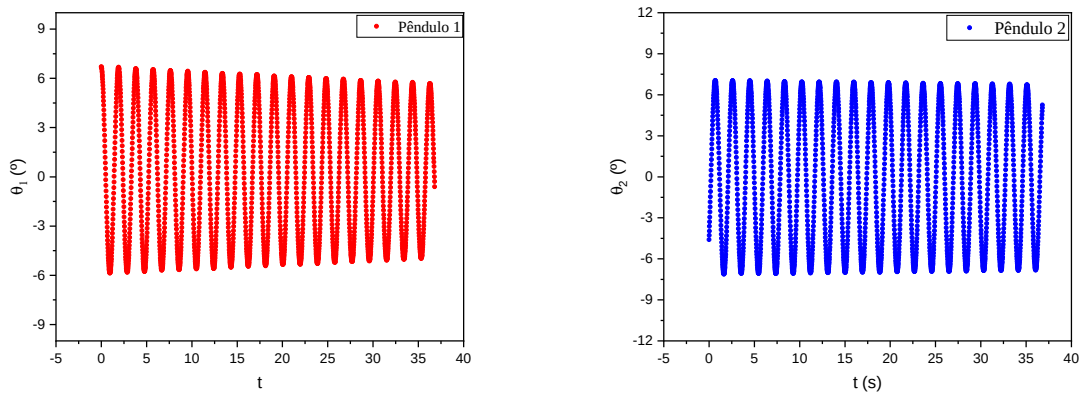
Fonte: Autoria própria (2022).

As frequências naturais de oscilação podem depender tanto da massa M_c (em posição ao longo da barra e quantidade), como também de h (tratados na seção 7.1). Iremos tratar especificamente 2 situações particulares: (i) massas iguais; (ii) massas diferentes, afim de verificar experimentalmente em quais situações ocorre a ressonância, que segundo Nussenzveig (2018, p.92), ocorre quando tem-se uma situação onde dois pêndulos têm a mesma frequência de oscilação livre ω_0 .

7.3.1 Caso (i): massas iguais

Analisaremos primeiramente o caso (i) das oscilações livres na situação onde os dois pêndulos são idênticos e possuem em suas extremidades um conjunto de 3 massas totalizando $390\text{ g} + 180\text{ g}$ referente a barra. O gráfico da Figura (7.8), mostra o comportamento das oscilações de ambos os pêndulos, compreendendo-se que as linhas em vermelho (Figura 7.8)(a) representam o pêndulo 1 e as linhas em azul (Figura 7.8)(b) representam o pêndulo 2.

Figura 7.8 – Oscilações livres para 3M e 3M.



(a) Pêndulo 1 em oscilação livre com massa cilíndrica de 390 g (b) Pêndulo 2 em oscilação livre com massa cilíndrica de 390 g.

Fonte: Autoria própria (2022).

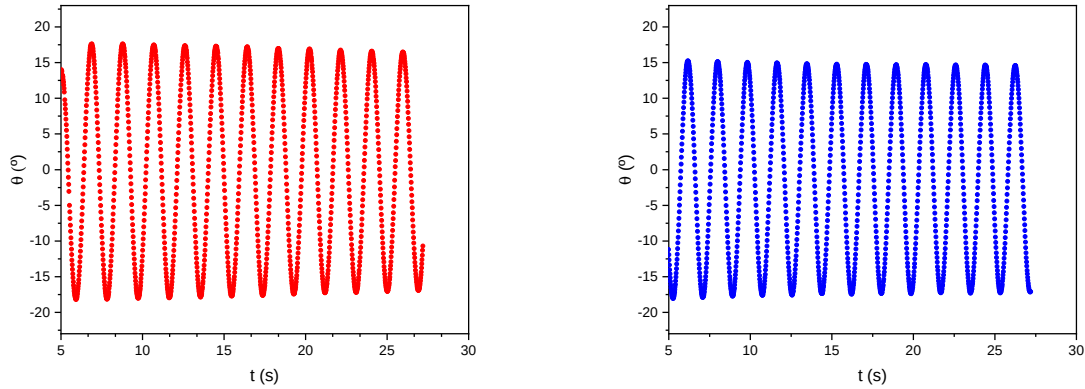
Verificamos pela composição dos gráficos da Figura (7.8)(a) e (b), que há uma certa equivalência entre essas frequências naturais. Quando fazemos essa análise em valores numéricos, obtemos $\omega_{0,1} = \frac{2\pi}{1,90914\text{ s}} = 3,29111\text{ (rad/s)}$ e $\omega_{0,2} = \frac{2\pi}{1,90914\text{ s}} = 3,29111\text{ (rad/s)}$.

Notemos, portanto, que estas frequências angulares são equivalentes e exatamente iguais.

7.3.2 Caso (ii): massas diferentes

Para o caso (ii), que compete a análise das oscilações livres com massas $3M$ e $2M$, respectivamente para os pêndulos 1 e 2, tem-se a situação representada na Figura (7.9):

Figura 7.9 – Oscilações livres para $3M$ e $2M$ para os pêndulos 1 e 2, respectivamente.



(a) Pêndulo 1 em oscilação livre com massa cilíndrica de 390 g. (b) Pêndulo 2 em oscilação livre com massa cilíndrica de 260 g.

Fonte: Autoria própria (2022).

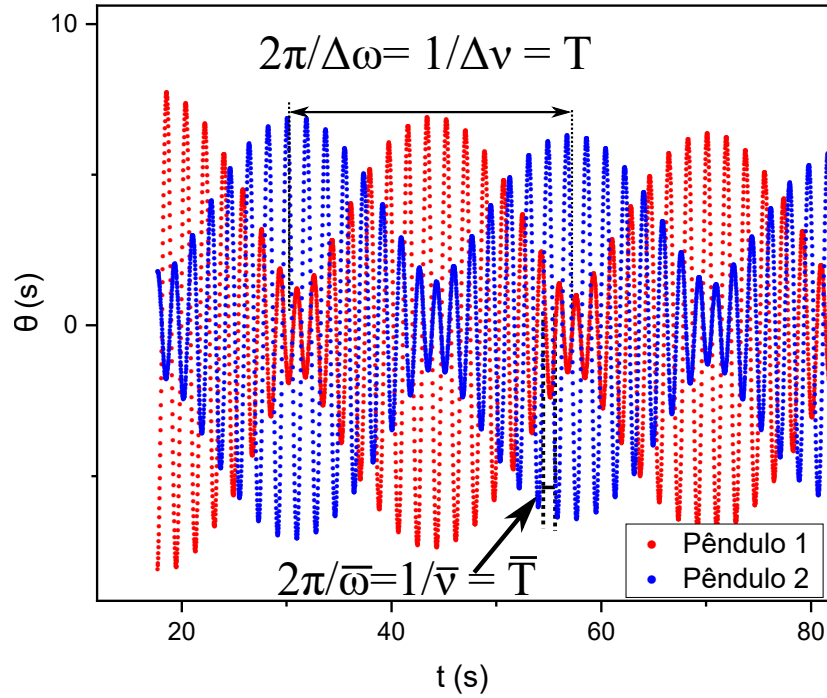
Para o caso (ii), verificou-se que as frequências naturais equivalentes foram de $\omega_{0,1} = \frac{2\pi}{1,89240 \text{ s}} = 3,32022 \text{ (rad/s)}$ e $\omega_{0,2} = \frac{2\pi}{1,8009 \text{ s}} = 3,48891 \text{ (rad/s)}$. Isso mostrou, inclusive, a relação de proporcionalidade entre o período e massa, ou mais rigorosamente, entre período e momento de inércia.

A seguir, iremos verificar a validade da afirmativa sobre a ressonância, e utilizaremos como fenômeno de análise os batimentos que ocorrem com os pêndulos agora acoplados postos a oscilar com massas iguais, como no caso (i), e com massas diferentes, conforme destacado no caso (ii). Os centros de massa equivalente dos três cilindros estão a uma distância de 92,5 cm do eixo de rotação e para o caso em que se tem dois cilindros, estão a uma distância de 96,8 cm.

7.3.3 Oscilações acopladas com massas iguais 3M para os pêndulos 1 e 2

Para esta situação, iremos condicionar o sistema inicialmente com $\theta_1(0) = \theta_A$; $\theta_2(0) = 0$; $\dot{\theta}_1(0) = 0$ e $\dot{\theta}_2(0) = 0$. Após colocá-los a oscilar nestas e situações e realizar as análises com o Tracker, obteve-se os seguintes gráficos sobrepostos, conforme expressos na Figura (7.10):

Figura 7.10 – Batimentos ressonantes sob condições iniciais $\theta_1(0) = \theta_A$; $\theta_2(0) = 0$.



Fonte: Autoria própria (2022).

A Figura (7.10) mostra a modulação de amplitude mútua entre os pêndulos. Observe-mos que a linha da envoltória completa um ciclo muito mais lentamente em confronto com a linhas das oscilações rápidas, tal comportamento é descrito nas Equações (5.28) e (7.14), ambas na pág. (74). Conforme exposto, o termo que denota a média entre ω_a e ω_s , ou seja, $\bar{\omega}$, oscila lentamente em confronto com a diferença entre os mesmos, dado por $\Delta\omega$. Nesta situação, satisfaz-se a condição de que $|\omega_a - \omega_s| \ll \omega_a + \omega_s$ e consequentemente que K (força de acoplamento) é muito menor que ω_s^2 , o que explica a causa das envoltórias, dada por $\theta_B(t) \cos(\Delta\omega/2t)$ para θ_1 e $\theta_B(t) \sin(\Delta\omega/2t)$ para θ_2 , oscilarem muito lentamente em confronto com a $\cos(\bar{\omega}t)$ e $\sin(\bar{\omega}t)$, fazendo com que consequentemente, haja a modulação de sua amplitude.

Observemos os períodos correspondentes em cada um dos casos, evidenciados na Tabela (7.5) a seguir:

Tabela 7.5 – Períodos das amplitudes modulantes e moduladas para os pêndulos 1 e 2. Os menores valores correspondem às oscilações rápidas, ou seja, as modulantes, já os maiores valores de período correspondem às oscilações lentas, que possuem suas amplitudes moduladas.

Período (s)	Pêndulo	
	1	2
Amplitude modulante	1,758	1,719
Amplitude modulada	26,661	26,678

Fonte: Autoria própria (2022).

Com base nos dados da Tabela (7.5) é possível notar que o intervalo entre dois máximos da linha de envoltória ($1/\Delta\nu$), é $\gg 1/\bar{\omega}$, que são os intervalos entre dois máximos consecutivos de $\theta_1(t)$ ou $\theta_2(t)$, sendo estas dadas pela (7.14).

Tendo em vista a composição do gráfico, nota-se que as amplitudes nunca são totalmente nulas, ou seja, os pêndulos, em determinado intervalo de tempo, nunca cessa seu movimento totalmente, mas é capaz de transferir sua energia de oscilação por meio do acoplamento fraco exercido através da mola. Como neste caso observamos que os pêndulos possuem frequências naturais iguais, este processo é dito como ressonante, uma vez que a diminuição da amplitude de um pêndulo, resulta no aumento da amplitude do outro pêndulo acoplado a ele, conforme explicitado no caso (i), para a situação em que as massas pendulares são iguais.

Tal aumento ou diminuição dessas amplitudes pode ser explicado em termos de conservação da energia, pois visto que nenhuma das duas pode crescer ou diminuir indefinidamente, há esta limitação no movimento e à transferência de energia, o que leva aos batimentos em quadratura, que ocorre quando os máximos de amplitude de um pêndulo equivalem aos mínimos de amplitude do outro.

Retomemos a Equação (7.14),

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_B(t) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \cos(\bar{\omega}t) = \theta_{1\text{máx}}(t) \cdot \cos(\bar{\omega}t) \\ \theta_2(t) = \theta_B(t) \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \sin(\bar{\omega}t) = \theta_{2\text{máx}}(t) \cdot \sin(\bar{\omega}t) \end{cases} \quad (7.14)$$

Dizer que os batimentos não estão em quadratura, implica em afirmar que, para a equação para $\theta_1(t)$ o valor de tempo t tende a $\pi/\Delta\omega$ no primeiro termo de cosseno e tende a $\pi/2\bar{\omega}$ no segundo termo, mas não chega a ele propriamente dito, o que não permite que ela zere totalmente.

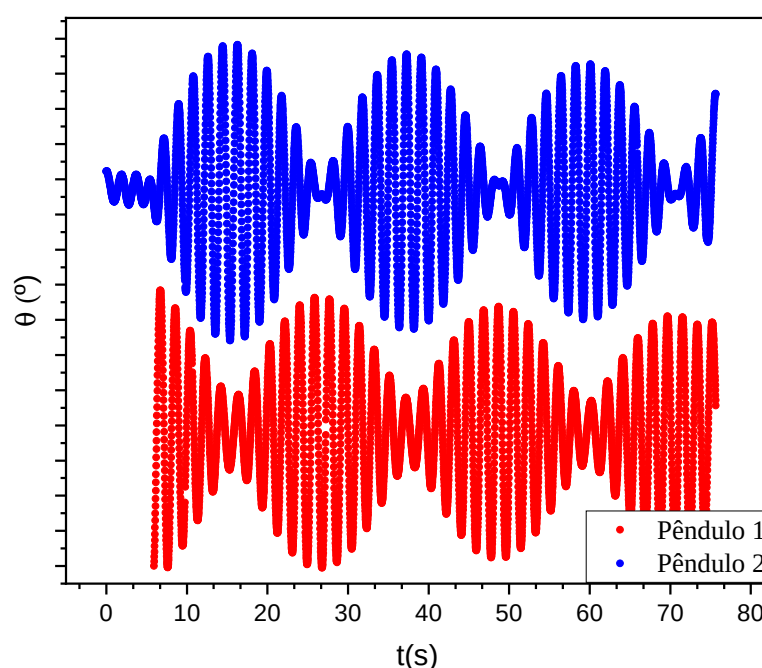
Para $\theta_2(t)$, tem-se que o valor de t para o primeiro termo tende a $2\pi/\Delta\omega$ e para o segundo, tende a $\pi/\bar{\omega}$, não chegando à estes valores especificamente.

7.3.4 Oscilações acopladas com massas diferentes, 3M para o pêndulo 1 e 2M para o pêndulo 2

Dispomos para o pêndulo 1 uma massa de 3M (390 g), e para o pêndulo 2, uma massa de 2M (260 g), ambos na extremidade da barra e novamente tomamos as condições iniciais $\theta_1(0) = \theta_A$; $\theta_2(0) = 0$; $\dot{\theta}_1(0) = 0$ e $\dot{\theta}_2(0) = 0$.

A partir das condições iniciais já mencionadas, após a colocação do sistema para oscilar, obteve-se o gráfico da Figura (7.11).

Figura 7.11 – Batimentos sob condições iniciais $\theta_1(0) = 0$; $\theta_2(0) = \theta_B$ para pêndulo 1 com 3M e pêndulo 2 com 2M.



Fonte: Autoria própria (2022).

Pela composição das figuras, podemos notar que o pêndulo 2 tem sua amplitude modulada mais significativamente pelo pêndulo 1, que possui mais massa, passando a oscilar com a sua frequência própria em certos períodos de tempo. Nesta situação, o pêndulo 1 passa por mínimos de amplitude iguais a zero, enquanto que o pêndulo 2 nunca zera totalmente sua amplitude de oscilação no intervalo de tempo considerado. A explicação para esta situação pode ser novamente dada em termos de oscilações forçadas, pois se em um sistema tem-se uma massa relativamente maior que a outra, então as oscilações através da mola atuam como uma força externa, forçando o pêndulo de menor massa a oscilar com a frequência do pêndulo mais pesado.

Os dados referentes aos períodos de cada pêndulo para as amplitudes moduladas e modulantes são dadas da Tabela (7.6):

Tabela 7.6 – Períodos da amplitudes modulantes e moduladas para o pêndulos 1 e 2 (3M e 2M).

Período (s)	Pêndulo	
	1	2
Amplitude modulante	1,848	1,834
Amplitude modulada	21,904	22,826

Fonte: Autoria própria (2022).

Como esperado, não foi observado o fenômeno da ressonância, tendo em vista a diferença das frequências naturais para os pêndulo com massas consideravelmente diferentes, conforme abordado no caso (ii), contudo os batimentos puderam ser observados bem mais significativamente.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do sistema para o estudo das oscilações dos pêndulos físicos baseado no uso de tecnologias livres realizado neste trabalho, permite sua utilização como material para experimentos didáticos de baixo custo, ademais, a produção dos aparatos utilizando-se da impressão 3D e a utilização de encoders compõe, até então, um metodologia pouco explorada em laboratórios didáticos de Física.

Os resultados obtidos neste estudo foram em, grande parte, muito condizentes com os pressupostos teóricos, apresentando em um dos casos, erros maiores, sendo em torno de 6,63% para a constante da mola obtida pela equação da reta do pêndulo 2, e 3,63% para κ obtida pela equação da reta do pêndulo 1. Os erros acima da faixa percentual (menor que 1,30%) em relação às oscilações livres, são devido a taxa de captura da câmera utilizada (60 fps), que captura um quadro a cada $16.700 \mu s$, o que o faz perder informações nessa faixa de tempo entre um quadro e outro. Nos outros resultados observados como aceleração da gravidade, período do pêndulo físico sem acoplamento e momento de inércia das oscilações livres, obtivemos erros percentuais menores que 1,3% em relação às previsões teóricas.

Na parte que compete o estudo do pêndulo físico livre, os resultados obtidos tanto pelo Tracker como Arduino também se mostraram satisfatórios entre si, contudo, na composição do gráfico da Figura (7.2), que mostra o h para o qual T é mínimo, o Arduino apresentou resultados mais lineares enquanto que o Tracker apresentou tremulações nos pontos coletados para o período devido ao fato comentado anteriormente, no entanto, ambos apontaram para o mesmo mínimo equivalente, algo em torno de 28 cm. A obtenção de uma função experimental que fornece o momento de inércia total do sistema com base no valor de g também obtido experimentalmente, além do fit não-linear modelado com base na função para o período, (expressa na 4.19), foi um dos pontos que validaram a correta adoção do teorema dos eixos paralelos, tendo em vista os erros percentuais abaixo de 1,30%, conforme pode ser consultado na Tabela (7.2).

Ao tratarmos do estudo específico dos modos normais de vibração, ao qual está abordado na seção (7.2), obtivemos também resultados coerentes com o previsto na literatura, que mostra a linearidade entre ω_a^2 e l^2 , em que l representa a distância do eixo a posição em que a mola está acoplada. A partir das equações das retas obtidas por meio do método de regressão linear no Origin[®], conseguimos obter parâmetros inerentes ao sistema de pêndulos acoplados, como a constante da mola e o período das oscilações livres, que infelizmente apresentaram uma taxa de erro relativo percentual um pouco acima do esperado, 6,63% e 3,63%, respectivamente, cujos valores tomados como parâmetros foram tomados teoricamente e mediante medição em laboratório.

Finalmente, ao tratarmos do estudo qualitativo do fenômeno dos batimentos ressonantes, pudemos observar claramente a ressonância para o caso em que os pêndulos possuem massas iguais, e a sua não observância para o caso em que temos sistemas com massas consideravelmente distintas. A verificação da modulação de amplitude confirmou a previsão teórica que afirma que para o caso de acoplamento fraco, em que $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$, tem-se que o intervalo entre dois máximos da linha de envoltória ($1/\Delta\nu$), é $\gg 1/\bar{\omega}$, que são os intervalos entre dois máximos consecutivos de $\theta_1(t)$ ou $\theta_2(t)$. A transferência de energia de oscilação entre os pêndulos também confirma a previsão teórica que mostra a modulação da amplitude em termos de conservação de energia, considerando o caso em que $|\omega_a - \omega_s| \ll \omega_a + \omega_s$.

A explicação para esta dinâmica pôde ser feita em termos de oscilações forçadas, pois observando que um dos pêndulos atua como uma força externa ao outro pêndulo com uma frequência própria ω , à medida que esta frequência se aproxima da frequência angular natural do outro pêndulo no caso ressonantes, a resposta de amplitude θ_B aumenta, e ocorre a máxima transferência de amplitude de um pêndulo ao outro. No entanto, ressalta-se que este é um caso isolado, pois para um sistema real que trabalhamos, a amplitude não pode crescer indefinidamente pelo princípio da conservação da energia.

Percebemos acentuadamente os batimentos em seu caso geral, onde a partir da alteração das massas, pôde-se alterar a frequência natural do sistema. Nesse caso, notou-se que o pêndulo de menor massa tendia a oscilar com o pêndulo de maior massa, que por sua vez possuía mais inércia e uma maior frequência angular de oscilação. Novamente, a explicação desta dinâmica pôde ser dada em termos de oscilações forçadas.

Constatamos, com base em nossos dados, que o Arduino se saiu como uma melhor opção na medida de tempo por possuir maior capacidade de coleta e processamento de dados, no entanto, a placa utilizada (Mega 2560) ainda se mostrou limitada em nossa tentativa de implementá-lo em ambos os pêndulos, para o caso de oscilações acopladas. Desta forma como perspectivas de trabalhos futuros, poder-se-ia melhorar as medidas utilizando-se de uma placa Arduino Due, sendo possível obter resultados ainda mais precisos em ambos os casos de estudo de nosso sistema, incluindo, portanto, dois encoders incrementais nos casos acoplados.

Outra perspectiva que pretendemos implementar é a da utilização de um motor propulsor de modo a ser realizado experimentos com oscilações forçadas com frequências pré-definidas para que analisemos situações que envolvam ressonância, fazendo então, o estudo quantitativos dos batimentos, ajustando os dados com modelos teóricos.

Finalmente, a integração de experimentos envolvendo Arduino com linguagem de programação em Python de modo a coletar dados de forma controlável por meio de interfaces gráficas executáveis mostra-se como uma excelente ferramenta no uso em sala de aula e é um dos nossos objetivos em trabalhos futuros.

Referências

- ALIPRANDINI, D. M.; SCHUHMACHER, E.; MURIEL, C. Processo ensino e aprendizagem de física apoiada em software de modelagem. **In: I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia**, p. 1370–1380, 2009.
- ALMEIDA, F. **O que é Encoder? Para que serve? Como escolher? Como interfacear?** 2018. Disponível em: <<https://www.hitecnologia.com.br/blog/o-que-%C3%A9-encoder-para-que-serve-como-escolher-como-interfacear/>>. Acesso em: 07 de janeiro de 2022.
- ALONSO, M.; FINN, E. J. **Física: Um curso universitário-Mecânica**. [S.l.]: Editora Blucher, 2018. v. 1.
- ANGOTTI, J. A. P. Conceitos unificadores e ensino de física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 15, n. 1, p. 191–198, 1993.
- ANJOS, A. J. S. dos. As novas tecnologias e o uso dos recursos telemáticos na educação científica: a simulação computacional na educação em física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 25, n. 3, p. 569–600, 2008.
- ARAÚJO, G. d. A. et al. Caos em um pêndulo duplo: uma investigação utilizando videoanálise. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, 2018.
- ARDUINO. **AttachInterrupt()**. 2021. Disponível em: <<https://www.arduino.cc/reference/en/language/functions/external-interrupts/attachinterrupt/>>. Acesso em: 23 de agosto de 2021.
- ARDUINO. **O que é o Arduino?** 2021. Disponível em: <<https://www.arduino.cc/en/Guide/Introduction>>. Acesso em: 13 de agosto de 2021.
- ATKIN, K. An arduino-based experiment designed to clarify the transition to total internal reflection. **Physics Education**, IOP Publishing, v. 53, n. 2, p. 025003, 2017.
- ATMEL. 2018. Disponível em: <<https://www.microchip.com/en-us/tools-resources/search-discover/atmel-start>>. Acesso em: 23 de dezembro de 2021.
- BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. [S.l.]: Ministério da Educação, 1996. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12907:legislacoes&catid=70:legislacoes>. Acesso em: 21 de abril de 2021.
- BUKMAN, G. Desenvolvimento de um protótipo para segurança residencial de baixo custo. 2016.
- BUTKOV, E. **Mathematical Physics (1968)**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, Incorporated, 1968.
- CAVALCANTE, M. A.; TAVOLARO, C. R. C.; MOLISANI, E. Física com arduino para iniciantes. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 33, n. 4, p. 4503–4503, 2011.

- CAZORLA, I. M.; ARAGÃO, R. C.; PITOMBO, N. C. S. **EM-Ação: Ensino Médio em Ação; 3º Ano**. [S.l.]: Bahia. Secretaria da Educação. Instituto Anísio Teixeira, 2012. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/279531123_Em_Acao_no_Ensino_Medio_Vol_2/figures?lo=1>. Acesso em: 21 de fevereiro de 2022.
- CHIRIACESCU, B. et al. Arduino and tracker video—didactic tools for study of the kater pendulum physical experiment. **Romanian Reports in Physics**, v. 72, n. 1, p. 14, 2020.
- CHRISTIAN, W.; ESQUEMBRE, F.; BARBATO, L. Open source physics. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 334, n. 6059, p. 1077–1078, 2011.
- FEDERAL, S. Lei de diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Poder Legislativo, Brasília, DF**, v. 19, p. 26, 2005.
- FILHO, J. de P. A. Regras da transposição didática aplicadas ao laboratório didático. **Caderno brasileiro de ensino de Física**, v. 21, p. 44–58, 2004.
- GODOI, G. H. d. et al. O ensino de física na perspectiva da base nacional comum curricular. Instituto Federal Goiano, 2018.
- JR, A. G. B. et al. Videoanálise com o software livre tracker no laboratório didático de física: movimento parabólico e segunda lei de newton. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, p. 469–490, 2012.
- JÚNIOR, I. V. d. S. et al. Física experimental com arduino: ondas em uma corda tensionada. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 42, 2020.
- JúNIOR, W. B.; ARANHA, N. Estudo das oscilações amortecidas de um pêndulo físico com o auxílio do “tracker”. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 37, p. 2504–1, 2015.
- LEITÃO, L. I.; TEIXEIRA, P. F. D.; ROCHA, F. S. da. A vídeo-análise como recurso voltado ao ensino de física experimental: um exemplo de aplicação na mecânica. **Revista electrónica de investigación en educación en ciencias**, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, v. 6, n. 1, p. 18–33, 2011.
- LOPES, A. C. Os parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio e a submissão ao mundo produtivo: o caso do conceito de contextualização. **Educação & Sociedade**, v. 23, n. 80, p. 386–400, 2002.
- MENDES, E. A. Usando o arduino e a linguagem python no ensino de física. 2019.
- MOREIRA, M. A. Pesquisa básica em educação em ciências: uma visão pessoal. **Revista Chilena de Educación Científica**, v. 3, n. 1, p. 10–17, 2004.
- MOYA, A. A. An arduino experiment to study charge–voltage relationships in capacitors. **Physics Education**, IOP Publishing, v. 54, n. 1, p. 015005, 2018.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Mecânica**. [S.l.]: Editora Blucher, 2013. v. 1.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor**. [S.l.]: Editora Blucher, 2018. v. 2.

OGUNTOSIN, V.; AKINDELE, A. Design of a joint angle measurement system for the rotary joint of a robotic arm using an incremental rotary encoder. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.], 2019. v. 1299, n. 1, p. 012108.

OLIVEIRA, F. et al. Looking for absolute zero using an arduino. **Physics Education**, IOP Publishing, v. 54, n. 6, p. 065012, 2019.

OLIVEIRA, I. N. d. et al. Construção de uma maquete experimental automatizada para o estudo da polarização da luz e comprovação experimental da lei de malus com o auxílio da plataforma arduino. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 42, 2020.

QUADROS, D. **O que são shields para Arduino?** [S.l.]: FelipeFlop, 2021. Disponível em: <<https://www.filipeflop.com/blog/o-que-sao-shields-para-arduino/>>. Acesso em: 23 de dezembro de 2021.

SEMICONDUCTORS, V. **IR Receiver Modules for Remote Control Systems**. 2021. Disponível em: <<https://www.vishay.com/docs/82459/tsop48.pdf>>. Acesso em: 16 de julho de 2021.

SILVA, D. M. da; TAVARES, C. V. F.; SILVA, A. M. da. O uso da tecnologia como meio auxiliar para o ensino da física. **CIET: EnPED**, 2018.

SILVEIRA, S.; GIRARDI, M. Development of an experimental arduino kit for teaching modern physics in high school. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 39, n. 4, 2017.

THOMSEN, A. **O que é o Arduino**. [S.l.]: FelipeFlop, 2014. Disponível em: <<https://www.filipeflop.com/blog/o-que-e-arduino/>>. Acesso em: 23 de dezembro de 2021.

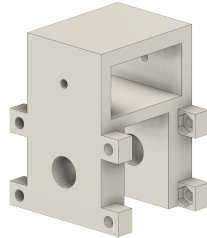
THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. [S.l.]: Cengage Learning, 2011.

TRACKER. **TRACKER**. [S.l.]: Tracker Brasil, 2021. Disponível em: <<https://trackerbrasil.ct.utfpr.edu.br/>>. Acesso em: 21 de abril de 2021.

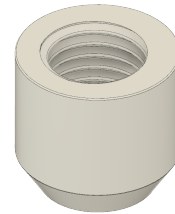
TROCARU, S. et al. Using tracker as video analysis and augmented reality tool for investigation of the oscillations for coupled pendula. **Romanian Reports in Physics**, v. 72, n. 1, p. 16, 2020.

Apêndices

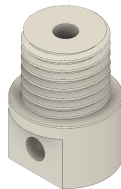
APÊNDICE A – Prévias das peças em 3D (fora de escala).



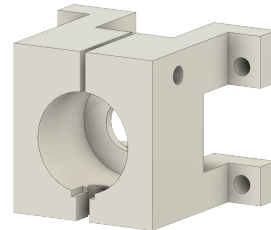
(a) **PEÇA A** - Peça-suporte fixada diretamente no sistema em alumínio.



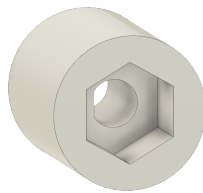
(b) **PEÇA B** - Parte constituinte do sistema em mandril para comportar o eixo principal.



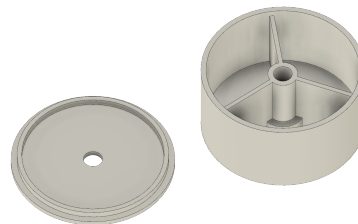
(c) **PEÇA C** - Peça rosqueada na peça B constituinte do mandril para comportar o eixo central.



(d) **Peça D** - Peça suporte para o sensor com sistema simples de abraçadeira.



(e) **Peça E** - Peça de acoplamento do eixo roscado ao sensor.



(f) **Peça F** - Cilindro disposto na extremidade da barra.

Fonte: Autoria própria (2021).

APÊNDICE B – Código *Arduino*.

/Pêndulo Físico com Arduino. Trabalho de Conclusão de Curso**/**

```
const byte signalencoderA = 2;    // Sinal A do Encoder
const byte signalencoderB = 3;    // Sinal B do Encoder
volatile int ValEncoder = 0;      // Variável que conta a quantidade de pulsos do encoder
volatile boolean readingA, readingB; // Variáveis que determinam o estado atual do
encoder para determinar o sentido de rotação
char string;

volatile int angulo[500];
unsigned volatile int tempo[500];
unsigned volatile int e = 0;
const int num_pontos = 500;

void Interrupt_A() {
  readingA = digitalRead (signalencoderA);
}

void Interrupt_B() {
  readingB = digitalRead (signalencoderB);
  if (readingA!= readingB) {
    ++ValEncoder;
  }
  if (readingA == readingB) {
    --ValEncoder;
  }
  tempo[e] = millis();
  angulo[e] = ValEncoder;
  ++e;
}

void setup() {
  pinMode(signalencoderA, INPUT_PULLUP); // necessário para que os pinos não
  fiquem com valores flutuando green
  pinMode(signalencoderB, INPUT_PULLUP); // white
  Serial.begin(9600);
}

void transfere_dados_encoder() {
  for (int i = 0 ; i < num_pontos; ++i) {
    Serial.print(angulo[i]*(0.15)); // Este valor foi tomado considerando as 2400 divisões.
    Este angulo está em graus. O
    Serial.print(" ");
    Serial.println(tempo[i]);
  }
}
```

Código *Arduino* (continuação).

```

}

void inicia_experimento() {
  // configura os pinos as interrupções para incializar o experimento
  Serial.println(" EXPERIMENTO INICIADO ");
  attachInterrupt (digitalPinToInterrupt(2), Interrupt_A, CHANGE); // chama a
  // interrupção quando há variação no estado lógico (high ou low) do pin 2 ou 3
  attachInterrupt (digitalPinToInterrupt(3), Interrupt_B, CHANGE);
}

void loop() {
  if ((e == 0)) { // && indicam se ambos os operandos são verdadeiros
    Serial.flush();
    delay(100);
    Serial.println(" ===== Pêndulo Acoplado ===== ");
    Serial.println("      1 - Iniciar Experimento      ");
    int b = 0;
    while (!Serial.available()) { // Aguarda o usuário digitar alguma opção
      ++b;
    }
    string = Serial.read();
    if (string == '1') {
      inicia_experimento(); // Habilita as interrupções e libera para realizar a medição
      int a = 0;
      while ((e <= num_pontos)) {
        ++a;
      }
    }
  }
}

if (e >= num_pontos) {
  detachInterrupt (digitalPinToInterrupt(2)); // Chama a interrupção quando há variação
  // no estado lógico (high ou low) do pin 2 ou 3
  detachInterrupt (digitalPinToInterrupt(3));
  transfere_dados_encoder();
  e = 0;
}
}

```