



**INSTITUTO  
FEDERAL**  
Piauí

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ  
CAMPUS URUÇUÍ  
CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**JÉSSICA RIBEIRO DIAS**

**PROBLEMAS COM LANÇAMENTOS DE MOEDAS: UM POTENCIAL NO ENSINO  
DE PROBABILIDADE**

**URUÇUÍ/PI  
2022**

JÉSSICA RIBEIRO DIAS

**PROBLEMAS COM LANÇAMENTOS DE MOEDAS: UM POTENCIAL NO ENSINO  
DE PROBABILIDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso (artigo científico)  
apresentado como exigência parcial para obtenção  
do diploma do Curso de Licenciatura em  
Matemática do Instituto Federal de Educação,  
Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Uruçuí.

Orientador: Prof. Me. Gabriel dos Santos Pinto

URUÇUÍ/PI  
2022

# PROBLEMAS COM LANÇAMENTOS DE MOEDAS: UM POTENCIAL NO ENSINO DE PROBABILIDADE

Jéssica Ribeiro Dias<sup>1</sup>  
Gabriel dos Santos Pinto<sup>2</sup>

## RESUMO

Neste trabalho buscou-se compreender e identificar quais conceitos elementares de probabilidade podem ser abordados por meio de problemas com lançamentos de moedas, complementando os livros didáticos. Para isso, optou-se por realizar um estudo exploratório com base na metodologia da análise de conteúdo, assim, foram examinadas 6 (seis) coleções de livros didáticos da área de Matemática para o Novo Ensino Médio, aprovadas pelo MEC - Ministério da Educação e Cultura no âmbito do PNLD - Plano Nacional do Livro Didático – 2021 e que serão viabilizadas para toda a Rede Pública de Ensino no Brasil para o período mínimo de 2022 até 2024. Foi possível perceber que as publicações analisadas podem fazer melhor uso de problemas com lançamento de moedas na abordagem dos conceitos de probabilidades, também foi possível organizar um banco de questões de tais problemas relacionados a muitos conceitos básicos de probabilidade.

**Palavras-chave:** probabilidade; conceitos; moedas; problemas.

## ABSTRACT

In this work we sought to understand and identify which elementary concepts of probability can be approached through problems with coin flips, complementing textbooks. For this, it was decided to carry out an exploratory study based on the methodology of content analysis, thus, 6 (six) collections of textbooks in the area of Mathematics for the New High School were examined, approved by the MEC - Ministry of Education and Culture within the scope of the PNLD - National Textbook Plan – 2021 and which will be made available to all the Public Education Network in Brazil for the minimum period from 2022 to 2024. It was possible to perceive that the analyzed publications can make better use of problems with coin flipping in approaching the concepts of probabilities, it was also possible to organize a bank of questions of such problems related to many basic concepts of probability.

**Keywords:** probability; concepts; coins; problems.

Data de aprovação: 20/07/2022 (data de apresentação do TCC)

---

<sup>1</sup> Discente do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI Campus Uruçuí. E-mail: jessicaribdias@gmail.com

<sup>2</sup> Docente Me. do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI Campus Uruçuí. E-mail: gabriel.san.pinto@gmail.com

## **1 INTRODUÇÃO**

A Teoria das Probabilidades é o ramo da matemática que cria e desenvolve em geral, pesquisa e modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. E a probabilidade em si, é as chances de algo ocorrer. Dessa forma pode-se consultar nos meios de informações a probabilidade de chuva ou de sol em uma região específica. É possível também, calcular a chance de um concorrente passar em um concurso público ou de um jogador ganhar na loteria. De fato, boa parte das nossas ações diárias requer uma forma intuitiva, afinal não poderia-se decidir com exatidão todas as implicações possíveis para uma decisão tomada, todavia pode expressar-se em termos quantitativos a incerteza da situação usando o conceito de probabilidade (MOREIRA, 2015).

Embora muito importante no meio científico e social, o ensino de probabilidade é também lembrado pelas dificuldades encontradas para sua execução. Partindo disso, no âmbito do contexto escolar, por meio de vários trabalhos, duas estratégias pedagógicas têm se mostrado eficazes no ensino de conceitos matemáticos, o material concreto que possibilita ao aluno uma maneira mais fácil e palpável de aprender, estimulando seu interesse e desenvolvendo um espaço favorável para a troca de conhecimento (SILVA; SILVA, 2017) e o uso de problemas, constituindo-se como o ponto de partida para que o aluno busque o conhecimento e desenvolva uma aprendizagem duradoura (RIBEIRO, 2019).

Em vista dos benefícios dessas duas metodologias citadas, é interessante trabalhar com algo que seja capaz de contemplá-las, nessa direção, os problemas com lançamento de moedas, como metodologia de ensino, se mais utilizados, certamente é um instrumento com potencial facilitador no estudo de conceitos. Assim, sabendo que no cotidiano da sala de aula, os livros didáticos se fazem bem presentes, é material de estudo e por vezes, o único com o qual o professor pode contar (DANTE, 1996), torna-se importante complementá-lo, seja para ampliar as atividades nele propostas ou melhorá-las.

À vista disso, e acreditando que a abordagem da Probabilidade por meio do lançamento de moedas, já é trabalhada nos livros didáticos, porém muitas vezes de forma fragmentada e voltada para poucos conceitos e sem uma conexão apropriada com eles. Acreditando também, que existe um campo maior de conceitos de probabilidade que permite uma abordagem envolvendo problemas com lançamentos de moedas, buscou-se investigar a indagação: Quais conceitos elementares de probabilidade podem ser abordados por meio de problemas com lançamentos de moedas, complementando os livros didáticos?

Nesta direção, o objetivo geral da presente pesquisa é compreender quais conceitos elementares de probabilidade podem ser abordados por meio de problemas com lançamentos de moedas, complementando os livros didáticos. Para alcançar o proposto, buscou-se os seguintes objetivos específicos: verificar na literatura já existente, os conceitos de probabilidade que já são e quais não são abordados por meio de problemas com lançamento de moedas; analisar se há mais conceitos de probabilidade que são possíveis e adequados de serem abordados com problemas desse tipo; identificar problemas com lançamentos de moedas que nos permite associá-los com os distintos conceitos de probabilidade; apontar quais conceitos é possível e interessante trabalhar com o lançamento de moedas a partir de problemas envolvendo probabilidade; contribuir para que profissionais da área e interessados no assunto tenham um material agregado e sistematizado com respeito ao ponto: conceitos versus problema com lançamento de moedas.

## **2 REFERENCIAL TEÓRICO**

### **2.1 ENSINO DE PROBABILIDADE**

O ensino da matemática já é encarado por muitos anos como algo desafiador, e isso se dá, entre outras coisas, por conta dos variados e interligados conceitos que envolvem cada assunto ou por conta de conceitos abstratos. É do conhecimento geral, que a probabilidade certamente está entre os conteúdos que apresentam mais dificuldades no processo de ensino e aprendizagem. É como diz o caderno do professor, confeccionado pela Secretaria de Educação de São Paulo, “os conteúdos pertinentes à Análise Combinatória e ao Cálculo de Probabilidades, [...] costumam trazer desconforto não apenas aos estudantes, mas também aos professores” (SÃO PAULO, 2008, p. 9). Podendo, assim, dizer que o primeiro passo para a real aprendizagem é o entendimento dos conceitos.

Nesse sentido, a preocupação e a responsabilidade com respeito ao ensino de conceitos de probabilidade têm sido evidenciadas pelas competências e habilidade estipuladas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por exemplo em uma das habilidades, ela propõe que o aluno do ensino médio deve “resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades” (BRASIL, 2018, p. 529). Assim, para aprender probabilidade a ponto de resolver e elaborar problemas o aluno deve estar bem alinhado e seguro dos conceitos envolvidos em cada tema.

De fato, uma das finalidades do ensino da Matemática no contexto escolar é conduzir os alunos a aprenderem conceitos matemáticos (BRASIL, 2018). Porém, como conseguir esses objetivos tão empolgantes, porém desafiadores? A prática docente do professor de matemática está sendo cada vez mais discutida entre pesquisadores da área, atualmente são apresentadas várias possibilidades para minimizar as dificuldades encontradas no ensino dessa disciplina, em tais estudos nota-se o destaque de duas metodologias, quais sejam: a utilização de materiais concretos, e a utilização de problemas para compreensão de conceitos.

## 2.2 RELEVÂNCIA DA PROBABILIDADE NA MATEMÁTICA SOB A PERSPECTIVA DE PROBLEMAS E MATERIAIS CONCRETOS

Como visto anteriormente, o foco primário para compreensão dos temas de probabilidade deve ser o real entendimento de cada conceito, mas uma das dificuldades percebidas no processo de ensino é a abstração dos conceitos, todavia “manipular os materiais concretos permite aos alunos criar imagens mentais de conceitos abstratos” (DA COSTA RIBEIRO, 2011, p.8). Dessa forma o uso de material concreto exerce um papel fundamental na aprendizagem matemática, visto que permite uma explicação mais simples e agradável dos conteúdos. Ainda possibilita a interação entre professor-aluno e desenvolve um espaço favorável para a troca de conhecimentos.

Posto isto, outra metodologia é a resolução de problemas. Normalmente costuma se fazer uma diferença entre problemas e exercícios, porém considerando que, em especial, em se tratando de probabilidade essa diferença na maioria das vezes é muito sutil, e que mesmo reconhecendo que existe essa diferença nas atividades, tanto os exercícios como os problemas cumprem com um papel de destaque nesse trabalho, dessa forma mesmo quando não explicitado, ao se falar de problema refere-se a ambos.

Com isso, sobre a perspectiva de problemas como exercícios, Vila e Callejo (2006) dizem que eles têm como objetivo entre outras coisas ajudar na compreensão de determinados conceitos, podendo comportar tarefas de reconhecimento, de repetição ou de execução. Ainda segundo Peduzzi (1997, p. 230) “é através dele que o estudante desenvolve e consolida habilidades”. E abordando problemas como desafios, Onuchic e Allevato (2011, p. 82) destaca boas razões para se trabalhar com resolução de problemas, afirmam que:

A resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre

as ideias matemáticas e sobre o dar-lhes sentido. Resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.

Analisando a primeira afirmação acima, onde a resolução de problemas ajuda os alunos a se concentrarem nas ideias matemáticas e no sentido delas, notando também, que a segunda afirmação auxilia na compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos, percebe-se que é justamente por esses pontos que o ensino de probabilidade deve ser pensado, tendo em vista vencer os obstáculos que o mesmo apresenta. Portanto, observando que a metodologia do uso de material concreto bem como a metodologia do uso de problemas, tem grande potencial quando aplicadas de modo independente, se aplicá-las de modo combinadas é sem dúvida, um alicerce fundamental para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Com essa ideia, considera-se que o uso de problemas com lançamento de moedas é uma metodologia duplamente excelente por contemplar as duas técnicas de ensino já muito bem recomendadas.

## 2.3 CONCEITOS PROBABILÍSTICOS TRABALHADOS NO ENSINO MÉDIO

Para a compreensão de probabilidade no segundo ano do ensino médio, torna-se importante introduzir, analisar e explorar alguns conceitos probabilísticos, assim sendo, torna-se necessário um embasamento teórico, por isso será usado as definições abordadas nos livros didáticos utilizados nesta pesquisa.

### 2.3.1 Experimento aleatório

**Definição 1:** São experimentos (ou fenômenos) cujo resultado não é previamente conhecido, ou que depende exclusivamente do acaso.

**Exemplo 1:** Temos que no lançamento de uma moeda perfeita ou não viciada, o resultado é imprevisível, ou seja, não sabemos se ele será cara ou coroa antes de realizá-lo.

### 2.3.2 Espaço Amostral( $\Omega$ )

**Definição 2:** Para o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, damos o nome de **espaço amostral**, que é representado em geral pela letra grega  $\Omega$  (lê-se ômega).

**Exemplo 2:** Quando se lança para cima, um dado convencional numerado de 1 a 6 os resultados possíveis, ou seja, o espaço amostral é  $\Omega = (1,2,3,4,5,6)$ .

### 2.3.3 Evento

**Definição 3:** Qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório recebe o nome de **evento**, que é geralmente indicado por uma letra maiúscula.

**Exemplo 3:** Quando se lança para cima, uma moeda convencional os resultados possíveis, ou seja, o espaço amostral é  $\Omega = (\text{Cara}, \text{Coroa})$  e os eventos são: Evento A: “Sair Cara”; Evento B: “Sair Coroa” e Evento C: “Sair Coroa ou Coroa”

#### 2.3.3.1 Evento impossível

**Definição 4:** Quando o evento é o conjunto vazio, ou seja, quando não é subconjunto do espaço amostral.

**Exemplo 4:** Em um lançamento de um dado o evento: “sair o número 7”, é um evento impossível.

#### 2.3.3.2 Evento Certo

**Definição 5:** Quando o evento coincide com o espaço amostral.

**Exemplo 5:** No lançamento de uma moeda perfeita ou não viciada, considere o seguinte evento:

- Evento A: “sair qualquer uma das faces, cara ou coroa” é um evento certo.

#### 2.3.3.3 Evento simples ou elementar

**Definição 6:** Quando o evento é um conjunto unitário.

**Exemplo 6:** No lançamento de uma moeda perfeita ou não viciada, considere os seguintes eventos:

- Evento A: “sair cara”.
- Evento B: “sair coroa”.

Note que B e C são eventos simples, pois são formados por um único elemento do espaço amostral. Já o Evento C: “sair cara ou coroa” não é um evento elementar pois não é unitário.

#### 2.3.3.4 Mutuamente exclusivos

**Definição 7:** Quando a intersecção de dois eventos é o conjunto vazio.

**Exemplo 7:** No lançamento de uma moeda perfeita ou não viciada, considere os seguintes eventos:

- Evento A: “sair cara”
- Evento B: “sair coroa”

Observe que A e B são eventos que não podem ocorrer na mesma tentativa, isto é, a ocorrência do evento A impede a ocorrência de B e vice-versa.

#### 2.3.3.5 Evento complementar

**Definição 8:** Consideremos que A e B sejam eventos do mesmo espaço amostral  $\Omega$ . Se A intersecção B for igual a um conjunto vazio ( $A \cap B = \emptyset$ ), e A união B for igual a o espaço amostral ( $A \cup B = \Omega$ ), dizemos que A e B são eventos complementares.

**Exemplo 8** No lançamento de uma moeda perfeita ou não viciada, considere os seguintes eventos:

- Evento A: “sair cara”
- Evento B: “sair coroa”

Como vimos, os eventos A e B são mutuamente exclusivos, pois se o resultado do lançamento for cara, este resultado não poderá ser ao mesmo tempo coroa. Isto significa que “sair cara” é equivalente a “não sair coroa” e “sair coroa” é equivalente a “não sair cara”, então:

- Complementar de  $\bar{A}$ : “sair coroa” (ou seja, B)
- Complementar de  $\bar{B}$ : “sair cara” (ou seja, A)

### 2.3.3.6 Eventos dependentes

**Definição 9:** Quando a probabilidade de ocorrência de um evento A depende da ocorrência ou não de um evento B.

**Exemplo 9:** Ao fazer dois lançamentos de uma mesma, a probabilidade de sair cara duas vezes depende da ocorrência no primeiro lançamento.

### 2.3.3.7 Eventos independentes

**Definição 10:** Quando a probabilidade da ocorrência de um evento A independe da ocorrência ou não de um evento B.

Analogamente, dois eventos A e B de um espaço amostral  $\Omega$  não vazio (com  $P(A) \neq 0$  e  $P(B) \neq 0$ ) são independentes se, e somente se,  $P(A | B) = P(A)$ , ou, de modo equivalente:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Com isso, podemos afirmar que dois eventos A e B são dependentes quando:

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

**Exemplo 10:** Considere o experimento de lançar uma moeda honesta 2 vezes. Os eventos “sair cara no primeiro lançamento” e “sair coroa no segundo lançamento” são exemplos de eventos independentes.

### 2.3.4 Probabilidade em espaço amostral equiprovável

**Definição 11:** Seja um evento A de um espaço amostral ( $\Omega$ ) finito. A probabilidade  $P(A)$  de o evento A ocorrer é a razão entre o número de elementos de A, indicado por  $n(A)$ , pelo número de elementos de ( $\Omega$ ), indicado por  $n(\Omega)$ , isto é:

$$P(A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\text{números de casos favoráveis}}{\text{números de casos possíveis}}$$

**Exemplo 11:** Considerando o experimento aleatório do lançamento de uma moeda perfeita, a probabilidade de ocorrer cara é uma probabilidade em espaço amostral equiprovável, pois todos os eventos simples têm a mesma probabilidade de ocorrer?

### 2.3.5 Probabilidade em espaço amostral não equiprovável

**Definição 12:** Todos os eventos elementares do espaço amostral não apresentam a mesma probabilidade de ocorrência. Mesmo assim, a soma das probabilidades é igual a 1.

**Exemplo 12:** Em uma moeda viciada, a probabilidade de ocorrer cara é o dobro da probabilidade de ocorrer coroa. Nesse caso, a probabilidade de sair cara é uma probabilidade em um espaço não equiprovável, pois seus eventos simples não têm a mesma chance de ocorrer.

### 2.3.6 Probabilidade da união de dois eventos

**Definição 13:** A probabilidade da união de dois eventos A e B é igual à soma das probabilidades de A e de B menos a probabilidade da intersecção de A com B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Exemplo 13:** Em um experimento aleatório são lançados um dado e uma moeda. A probabilidade de sair uma cara ou um número par é uma probabilidade da união desses dois eventos.

### 2.3.7 Probabilidade da intersecção de eventos

**Definição 14:** Seja A e B eventos não vazios no mesmo espaço amostral ( $\Omega$ ) finito, então:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ e } P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Essas fórmulas são equivalentes, respectivamente, a:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B) \text{ e } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Isso mostra que a probabilidade de que os dois eventos ocorram ao mesmo tempo, ou seja,  $P(A \cap B)$ , é obtida ao se multiplicar a probabilidade de um dos eventos pela probabilidade do outro, dado que o primeiro tenha ocorrido.

**Exemplo 14:** Uma urna contém 14 moedas de tamanhos iguais e mesma massa, sendo 8 douradas e 6 prateadas. Na retirada de 2 moedas ao acaso dessa urna, nesse caso a probabilidade de a primeira moeda ser dourada e a segunda ser prata tem a mesma probabilidade da intersecção de dois eventos. Pois precisa ocorrer um e o outro.

### 2.3.8 Probabilidade condicional

**Definição 15:** Dados os eventos A e B não vazios no mesmo espaço amostral ( $\Omega$ ) finito, a probabilidade da ocorrência de A, tendo B já ocorrido, é a probabilidade condicional de A em relação a B, indicada por  $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Pode-se simplificar a fórmula da probabilidade condicional:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \cdot \frac{n(\Omega)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Observe que uma consequência direta dessa definição é que  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**Exemplo 15:** Quando se lança para cima, dois dados convencionais e observa os números ímpares, a probabilidade de que a soma deles seja 10, tendo saído resultados ímpares, é um evento condicionado.

### 2.3.9 Probabilidade binomial

**Definição 16:** Seja A um evento de um espaço amostral equiprovável  $\Omega$ , finito e não vazio, de um experimento aleatório. A probabilidade de que A ocorra em p de n realizações desse experimento, sendo p e n números naturais com  $p \leq n$ , é dada por:

$$P = C_{n,p} \cdot [P(A)]^p \cdot [P(\bar{A})]^{n-p}$$

**Exemplo 16:** Uma moeda é lançada 7 vezes. A probabilidade de se obter exatamente 5 caras nesses lançamentos é uma probabilidade binomial.

### 3 METODOLOGIA

Com o intuito de analisar a viabilidade desta pesquisa para o ensino de probabilidade, optou-se por realizar um estudo exploratório, que conforme Gil (2008) trata-se de uma pesquisa utilizada para proporcionar uma visão geral acerca de um determinado fato, caracterizando-se como etapa inicial de uma investigação mais ampla. Esse tipo de estudo requer uma pesquisa bibliográfica que, de acordo com Souza, Oliveira e Alves (2021) permite ao pesquisador conhecer melhor o assunto estudado, levantar informações que sejam significativas para o desenvolvimento da pesquisa, bem como investigar as conclusões e pontuar se ainda é viável ou não continuar com o tema.

Partindo disso, para analisar os dados coletados e tabulados, utilizou-se a metodologia de análise de conteúdo. Sobre esse método, Bardin (2011), escreve que o mesmo é “um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não), que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) das mensagens”. Basicamente, nesse método, o objeto de estudo é o registro em si, e para sua aplicação, de acordo com Triviños (1987), é necessário cumprir três etapas: análise prévia, descrição analítica e interpretação inferencial.

Assim sendo, dispondo dos documentos científicos, se estabelece critérios quanto a qualidade, relevância e os objetivos da pesquisa, a fim de contemplar a temática proposta. Além disso, destaca-se o contexto atual da pesquisa visto que na investigação foram examinadas 6 (seis) coleções de livros didáticos da área de Matemática para o Novo Ensino Médio, aprovadas pelo MEC – Ministério da Educação e Cultura no âmbito do PNLD 2021 e que serão viabilizadas para toda a Rede Pública de Ensino no Brasil para o período mínimo de 2022 até 2024, de acordo com o Quadro 1:

Quadro 1 – Coleções de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio aprovadas pelo PNLD 2021

| AUTOR(A)                                                             | LIVRO                                                                                                                | EDITORA    |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| L <sub>1</sub> : ANDRADE, T. M.                                      | Matemática interligada: estatística, análise combinatória e probabilidade. 1 ed. São Paulo, 2020.                    | FTD        |
| L <sub>2</sub> : BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR, J.R.; SOUSA, P. R. C. | Prisma Matemática: estatística, combinatória e probabilidade. 1.ed. São Paulo, 2020.                                 | FTD        |
| L <sub>3</sub> : CHAVANTE, E.; PRESTES, D.                           | Quadrante Matemática e suas tecnologias: estatística, probabilidade e Matemática financeira. 1. ed. São Paulo, 2020. | Edições SM |

|                                          |                                                                                                    |               |
|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| L <sub>4</sub> : DANTE, L. R.; VIANA, F. | Matemática em contextos: análise combinatória, probabilidade e computação. 1. ed. São Paulo, 2020. | Editora Ática |
| L <sub>5</sub> : LEONARDO, F. M. (Org.). | Conexões: Estatística e probabilidade. 1. ed. São Paulo, 2020.                                     | Moderna       |
| L <sub>6</sub> : SOUZA, J. R.            | Multiversos Matemática: Estatística e probabilidade. 1. ed. São Paulo, 2020.                       | FTD           |

Fonte: Elaborada pelos autores (2022).

Na análise das coleções, foi observado quais conceitos elementares de probabilidade estão sendo abordados por meio de problemas com lançamentos de moedas, para isso cabe salientar que tomada a consciência da importância do livro didático para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, tendo em vista que este permanece sendo o elemento base para o acesso dos alunos ao conhecimento científico estruturado, a proposta para essa pesquisa não é de desqualificar ou atribuir menor relevância de uma coleção sobre a outra, mas de buscar problemas envolvendo moedas que nos permite associá-los com distintos conceitos de probabilidade.

Nesse sentido, esta análise foi realizada basicamente em duas etapas: *pré-análise* e *análise*. Na pré-análise, realizou-se a seleção e a preparação do material que foi foco da análise. Esta foi feita basicamente em três momentos: leitura das 10 coleções aprovadas pelo PNLD-2021, referente ao conteúdo de probabilidade do 2º ano do Ensino Médio; identificação e separação das coleções que apresentaram um maior número de conceitos envolvendo problemas com moedas, organização desses problemas em blocos para termos uma visão sistemática dos conceitos que utilizaram problemas com moedas para sua abordagem.

De maneira detalhada, no primeiro momento foi analisado inicialmente o sumário de cada coleção, observando por meio disso, quais conceitos tinham mais recorrência quanto ao tema em estudo. Partindo disso, foi feita a leitura do conteúdo e visto nas coleções os problemas que envolviam moedas, haja vista perceber, quais destas apresentavam um campo maior de conceitos envolvendo problemas desse tipo. No segundo momento foi separado as coleções, assim, das 10 (dez) ponderadas a princípio escolheu-se 6 (seis) para o estudo. Logo, os conceitos e seus respectivos problemas foram vistos de forma isolada em cada coleção, considerando que nem todas abordavam os mesmos conceitos e que foi importante ter a visão de quais são muito ou pouco trabalhados.

Feito essa coleta, seguiu-se para o terceiro momento, onde foi organizado os problemas em blocos para obter-se uma visão detalhada sobre a quantidade de conceitos de probabilidade que são possíveis de serem trabalhados com problemas envolvendo moedas. Para tanto, foi elaborado um quadro que apresenta um olhar objetivo frente aos livros escolhidos, abordando quais destes “usaram”, “não usaram” e “não apresentaram” com lançamento de moedas, os seguintes conceitos: experimento aleatório, espaço amostral, eventos, probabilidade em espaço amostrais equiprováveis e não equiprováveis, probabilidade da união de dois eventos, probabilidade da interseção de eventos, probabilidade de eventos independentes e de eventos dependentes, probabilidade condicional e probabilidade em experimentos binomiais.

### 3 RESULTADO E DISCUSSÃO

Os resultados foram pontuados sob dois ângulos: a frequência de conceitos que são abordados com problemas envolvendo lançamento de moedas, e a construção de um material

agregado e sistematizado, com respeito ao ponto “conceitos versus problemas com lançamento de moedas”. Dessa maneira, sabendo da relevância de apresentar conceitos matemáticos com encadeamento lógico, evitando por exemplo, recorrer a conceitos ainda não definidos para iniciar outro conceito (BRASIL, 2018), teve-se a preocupação de apresentar estes em uma ordem gradativa de aprendizagem. Logo abaixo, apresenta-se o quadro que representa a frequência que determinado conceito é visto nas obras analisadas:

Quadro 2 – Quantidade de livros didáticos que exploraram conceitos de probabilidade com lançamento de moedas

| Conceitos                                           | Usou | Não Usou | Não Abordou |
|-----------------------------------------------------|------|----------|-------------|
| Experimento aleatório                               | 6    |          |             |
| Espaço amostral                                     | 6    |          |             |
| Evento                                              | 6    |          |             |
| Probabilidade em espaço amostrais equiprováveis     | 6    |          |             |
| Probabilidade em espaço amostrais não equiprováveis | 2    |          | 4           |
| Probabilidade da união de dois eventos              | 3    | 2        | 1           |
| Probabilidade da interseção de eventos              | 1    | 2        | 3           |
| Probabilidade de eventos independentes              | 6    |          |             |
| Probabilidade condicional                           |      | 6        |             |
| Probabilidade em experimentos binomiais             | 4    |          | 2           |

Fonte: Elaborada pelos autores (2022).

O ponto de partida para a caracterização dos demais conceitos envolvendo probabilidade, é o entendimento do que seja experimento aleatório, todas as obras analisadas trazem exemplos clássicos envolvendo o lançamento de moedas, onde observa-se que em um lançamento de uma moeda perfeita ou não viciada, o resultado é imprevisível, ou seja, não se sabe se ele será cara ou coroa antes de realizá-lo. A partir do conceito de experimento aleatório, é caracterizado o conceito de espaço amostral e evento, todas as obras trouxeram esses conceitos envolvendo lançamento de moedas, nota-se que algumas dispuseram em média três exercícios envolvendo esses conceitos de forma conjunta, e outras de forma separada, fazendo o índice de exercícios envolvendo espaço amostral passar a ser somente um.

Quanto aos tipos de eventos, nenhuma obra mostrou exercícios direcionados aos conceitos de evento simples, certo, impossível, dependente e mutuamente exclusivo envolvendo lançamento com moedas. Quanto ao evento complementar, 2 (duas) obras trouxeram esse conceito e com relação ao evento independente todas as obras evidenciam exercícios direcionados a esse conceito. Observando os demais conceitos, foi possível verificar a ausência de problemas envolvendo moedas no conceito de probabilidade condicional, a abordagem de apenas 3 (três) obras com relação ao conceito de probabilidade da união de dois eventos, de 1 (uma) obra com respeito ao conceito da probabilidade da intersecção e de 4 (quatro) obras acerca do conceito de probabilidade em experimentos binomiais.

Em se tratando do conceito de probabilidade em espaço amostrais equiprováveis, nota-se que todas as obras vistas trazem exercícios, mas quando observado o conceito de probabilidade em espaço amostrais não equiprováveis, apenas 2 (duas) obras evidenciaram o

lançamento com moedas. Mediante essas informações, nota-se que os problemas com lançamentos de moedas são vistos com mais frequência, naqueles conceitos introdutórios para o estudo de probabilidade, estes que são mais simples. Partindo disso, vê-se também que algumas obras não abordaram conceitos importantes para o estudo do cálculo de probabilidade.

Nesse sentido, vendo que para o ensino desse conteúdo é importante construir uma base sólida para a compreensão dos conceitos mais avançados, aqueles que envolvem problemas mais sofisticados, que são possíveis de serem abordados por meio de moedas, foi montado um material que trabalha de forma separada cada um deles. Diante desse contexto, o Banco de Conceitos versus Problemas a ser construído será alimentado mediante uma avaliação, isto é, será averiguado se determinado conceito permite uma abordagem por meio de um problema com lançamentos de moedas, se encontrado um ou mais problemas no conjunto de amostra, então tanto o conceito como os problemas relacionados serão inseridos no banco de dados.

Com base nisso, para que se tenha um bando de dados de forma organizada e sistemática, houve uma divisão dos conceitos por blocos, conforme abaixo no quadro 3:

Quadro 3 – Divisão dos conceitos por meio de blocos

|           |                                                                                                                                                        |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Bloco I   | Abordará problemas envolvendo os conceitos de espaço amostral e evento                                                                                 |
| Bloco II  | Trará problemas envolvendo os conceitos de probabilidade da união de dois eventos, probabilidade da intersecção de dois eventos e evento complementar; |
| Bloco III | Envolverá problemas quanto aos conceitos de probabilidade em espaço equiprovável e probabilidade em espaço não equiprovável;                           |
| Bloco IV  | Abordará problemas envolvendo os conceitos de probabilidade condicional e eventos independentes.                                                       |
| Bloco V   | Abordará a probabilidade pelo método binomial;                                                                                                         |
| Bloco VI  | Discorrerá sobre outros conceitos envolvendo problemas atrativos com lançamentos de moedas                                                             |

Fonte: Elaborada pelos autores (2022).

Essa divisão dos conceitos por blocos, foi pensada e estruturada de tal forma, que os conceitos abordados possam ser vistos de maneira conjunta, ou seja, aqueles conceitos que têm mais familiaridade entre si serão colocados juntos. Trabalhando dessa forma, o professor será capaz de conduzir uma aprendizagem dinâmica, uma vez que tem acesso a um material que aborda conceitos com seus respectivos problemas, de uma forma que também pode introduzir sua própria sequência didática, posto que a ordem de apresentação dos conceitos poderá ser aos poucos, do mais simples ao mais avançado. Segue os blocos de forma separada:

- **BLOCO I - PROBLEMAS ENVOLVENDO OS CONCEITOS DE ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTO**

**Exemplo 1:** Um dado de seis faces, numeradas de 1 a 6, e uma moeda são lançados simultaneamente e observadas suas faces voltadas para cima. Determine o espaço amostral desses lançamentos simultâneos.

**Exemplo 2:** Um experimento é realizado lançando-se duas moedas distintas simultaneamente. Determine:

- a) o espaço amostral  $\Omega$ .
- b) o evento A, da ocorrência de exatamente duas caras.
- c) o evento B, da ocorrência de pelo menos uma cara.
- d) o evento C, da não ocorrência de cara.

**Exemplo 3:** Uma moeda e um dado cujas faces são numeradas de 1 a 6 são lançados simultaneamente e, em seguida, observam-se as faces superiores. Determine:

- a) o espaço amostral desse experimento;
- b) o evento: sai "cara" e número ímpar;
- c) o evento: sai "coroa" e número par.

**Exemplo 4:** Considere um experimento em que ocorre o lançamento simultâneo de uma moeda comum e um dado com formato que lembra um dodecaedro regular, com as faces numeradas de 1 a 12. Em relação ao espaço amostral desse experimento, pode-se afirmar que é um evento impossível de ocorrer:

- a) cara na moeda e um número ímpar no dado;
- b) coroa na moeda e um número maior do que 12 no dado;
- c) cara na moeda e um número primo no dado;
- d) coroa na moeda e um número par menor do que 5 nos dados.

**• BLOCO II - PROBLEMAS QUANTO AOS CONCEITOS DE PROBABILIDADE EM ESPAÇO EQUIPROVÁVEL E PROBABILIDADE EM ESPAÇO NÃO EQUIPROVÁVEL.**

**Exemplo 5:** No lançamento simultâneo de 5 moedas, qual é a probabilidade de:

- a) obter cara em todas as moedas?
- b) obter somente uma coroa?
- c) obter pelo menos uma coroa?
- d) não obter cara?

**Exemplo 6:** (FGV-SP) Uma moeda é viciada de tal forma que os resultados possíveis, cara e coroa, são tais que a probabilidade de sair cara num lançamento é o triplo da de sair coroa.

- a) Lançando-se uma vez a moeda, qual a probabilidade de sair cara?
- b) Lançando-se três vezes a moeda, qual a probabilidade de sair exatamente uma cara?

**Exemplo 7:** (COPESE UFJF - Técnico (UFJF) / 2012) Ao lançarmos três moedas ao mesmo tempo, qual é a probabilidade de as três caírem com a mesma face voltada para cima?

**Exemplo 8:** (ENEM – 2021) Um apostador deve escolher uma entre cinco moedas ao acaso e lançá-las sobre uma mesa, tentando acertar qual resultado do (cara ou coroa) sairá na face superior da moeda.

Suponha que as cinco moedas que ele pode escolher sejam diferentes:

- duas delas têm “cara” nas duas faces;
- uma delas tem “coroa” nas duas faces;
- duas delas são normais (cara em uma face e coroa na outra).

Nesse jogo, qual é a probabilidade de o apostador obter uma face "cara" no lado superior da moeda lançada por ele?

• **BLOCO III - PROBLEMAS ENVOLVENDO OS CONCEITOS DE PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS, PROBABILIDADE DA INTERSECÇÃO DE DOIS EVENTOS E EVENTO COMPLEMENTAR**

**Exemplo 9:** (OBMEP) Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma casa; quando sai coroa, ele avança duas casas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual é a probabilidade de que ele tire a coroa em sua última jogada?

**Exemplo 10:** Uma urna contém 14 moedas de tamanhos iguais e mesma massa, sendo 8 douradas e 6 prateadas. Na retirada de 2 moedas ao acaso dessa urna, calcule nos casos abaixo a probabilidade de a primeira moeda ser dourada e a segunda ser prateada.

- a) Não existe reposição entre uma retirada e outra.
- b) Existe reposição entre uma retirada e outra.

**Exemplo 11:** (Cuidador Social (Pref Sto A Patrulha) / 2018) Em uma caixa, foram colocadas 3 moedas, uma de ouro, uma de prata e uma de bronze, e, em uma segunda caixa, foram colocadas 4 bolas de cores distintas (azul, vermelho, verde e amarelo). Qual a probabilidade de, ao retirar aleatoriamente uma moeda e uma bola das respectivas caixas, que estas sejam a moeda de ouro e a bola amarela?

**Exemplo 12:** Em um cofre de moedas, foram colocadas apenas duas de R\$ 1,00 e três de US \$0,25. Duas delas serão retiradas do cofre sucessivamente, sem que a primeira seja recolocada no cofre antes de se retirar a segunda. Qual a probabilidade de que seja possível somar os valores de faces das moedas retiradas sem a necessidade de conversões cambiais.

• **BLOCO IV - PROBLEMAS ENVOLVENDO OS CONCEITOS DE PROBABILIDADE CONDICIONAL E EVENTOS INDEPENDENTES**

**Exemplo 13:** Considere o experimento de lançar uma moeda honesta 2 vezes. Os eventos “sair cara no primeiro lançamento” e “sair coroa no segundo lançamento” são dependentes ou independentes?

**Exemplo 14:** Algumas pesquisas estatísticas podem causar constrangimento aos entrevistados com perguntas do tipo “você usa drogas?” e correm o risco de não obter respostas sinceras ou

não obter respostas de espécie alguma. Para estimar a proporção  $p$  de usuários de drogas em certa comunidade, pede-se ao entrevistado que, longe das vistas do entrevistador, jogue uma moeda: se o resultado for cara, responda a “você usa drogas?”, e se o resultado for coroa, responda a “sua idade é um número par?”. Assim, caso o entrevistado diga sim, o entrevistador não saberá se ele é um usuário de drogas ou se apenas tem idade par. Qual o percentual de usuários de drogas em uma comunidade onde 30% dos entrevistados responderam sim a entrevista?

**Exemplo 15:** Escolhe-se uma entre três moedas. Duas dessas moedas são não-viciadas e a outra tem duas caras. A moeda selecionada é lançada e é obtida uma cara. Qual é a probabilidade de ter sido selecionada a moeda de duas caras?

**Exemplo 16:** (UFRJ) Dois jogadores disputam uma série de rodadas de cara ou coroa. No início, cada jogador dispõe de 2 fichas. A cada rodada o vencedor ganha uma ficha do perdedor. O jogo termina quando um dos jogadores fica sem fichas. Determine a probabilidade de haver, ao menos, 100 rodadas.

#### • BLOCO V - PROBLEMAS ENVOLVENDO A PROBABILIDADE BINOMIAL

**Exemplo 17:** Uma moeda é lançada 7 vezes. Qual é a probabilidade de se obter exatamente 5 caras nesses lançamentos?

**Exemplo 18:** Ao se lançar uma moeda 8 vezes, qual é a probabilidade de se obter 6 caras e 2 coroas? 62

**Exemplo 19:** Considere uma moeda não honesta cuja probabilidade de obter coroa na face voltada para cima em um lançamento é igual a  $\frac{5}{9}$ . Se essa moeda for lançada 7 vezes consecutivas, qual é a probabilidade de se obter nesses lançamentos:

a) exatamente 5 coroas;

b) 2 coroas, no máximo

b) 2 coroas, no máximo

**Exemplo 20:** Uma moeda honesta é lançada nove vezes. Qual é a probabilidade de obter seis coroas (K) e três caras (C) nesses lançamentos?

#### • BLOCO VI - PROBLEMAS ATRATIVOS ENVOLVENDO OUTROS CONCEITOS DE PROBABILIDADE COM LANÇAMENTO DE MOEDAS

**Exemplo 21:** (PROFMAT) Em um cofre há seis moedas: duas moedas de 1 real e quatro moedas de 50 centavos. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas moedas do cofre. Qual é a melhor aproximação do valor esperado da média aritmética dos valores das duas moedas retiradas do cofre?

**Exemplo 22:** (Vestibular (UERJ) / 2010) Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores diferentes, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é

expelida ao acaso. Inserindo-se 3 moedas, uma de cada vez, qual é a probabilidade de que a máquina libere 3 bolas, sendo apenas duas delas brancas?

**Exemplo 23:** (Vestibular FGV /2016) Cinco pessoas estão sentadas em cinco cadeiras em linha, cada uma com uma moeda na mão. As moedas são todas bem equilibradas, de modo que a probabilidade de sair cara ou coroa em cada uma delas é de  $1/2$ . Em um determinado momento, as cinco pessoas jogam suas respectivas moedas. Aquelas que obtiverem cara continuam sentadas, e as que obtiverem coroa levantam-se. Após esse procedimento, qual a probabilidade de que NÃO haja duas pessoas adjacentes, ambas sentadas ou ambas de pé.

**Exemplo 24:** (GONÇALVES; ASSUNÇÃO, 2014) Qual deve ser a espessura de uma moeda, para que ela tenha chance de  $1/3$  de não sair nem cara e nem coroa?

**Exemplo 25:** (GONÇALVES; ASSUNÇÃO, 2014) Em um jogo comum de festival, um jogador joga uma moeda a uma distância de 5 metros em uma superfície de uma mesa com uma polegada quadrada. Se a moeda ( $3/4$  polegadas de diâmetro) cair inteiramente dentro do quadrado, o jogador recebe 5 centavos, mas não recebe a sua moeda de volta; caso contrário, ele perde a moeda. Se a moeda cai na mesa, qual é a chance dele ganhar?

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como visto, o uso de problemas com moedas é uma metodologia que, por permitir uma explicação mais simples e agradável dos conteúdos, ajuda os alunos a se concentrar nas ideias matemáticas, nos conceitos e no sentido delas, representando assim, uma ferramenta de grande potencial para o ensino e aprendizagem. Diante do estudo dessa metodologia nos livros didáticos citados, percebe-se que há um uso considerável dela na abordagem de alguns conceitos de probabilidade. Contudo, nota-se que por conta de sua excelência, a mesma poderia ser melhor explorada, tanto quantitativamente como qualitativamente. Por exemplo, ao analisar cuidadosamente as 6 (seis) publicações, nenhuma usou problemas com moedas na abordagem de probabilidade condicional, e somente um livro usou essa metodologia com respeito à probabilidade da intersecção dos eventos.

Nesse sentido, observa-se uma primeira contribuição desta pesquisa, pois ela possibilita ao professor identificar quais publicações utilizam melhor essa metodologia, e como consequência talvez, ele leve em conta uma possível escolha de publicação. Desse modo, percebendo que seria uma excelente alternativa, se houvesse mais problemas relacionados aos conceitos de probabilidade, de preferência contemplando todos os conceitos. Realizou-se uma busca por problemas dessa natureza, e o resultado como visto anteriormente foi um bloco de questões bem arranjadas com problemas envolvendo moedas e associados a conceitos de probabilidade. Dessa forma, esse trabalho contribui também para que o professor ao trabalhar um determinado conceito de probabilidade, tenha a sua disposição, caso deseje, problemas com moedas associados a esse conceito.

Fazendo uma avaliação geral, pode-se concluir que os problemas com lançamento de moedas se apresentando como ferramenta eficiente, pode estar mais presentes nas publicações, oportunizando o professor uma alternativa de ensino para cada conceito de probabilidade, além disso, considerando o proveitoso material de problemas versus conceitos organizado pelo autor, fica como sugestão para trabalhos futuros, incorporar mais problemas relacionados a uma dimensão maior de conceitos.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, T. M. **Matemática interligada: estatística, análise combinatória e probabilidade**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições, v. 70, 2011.
- BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma Matemática: estatística, combinatória e probabilidade**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.
- BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base nacional comum curricular: ensino médio**. Brasília: MEC/SEF, 2018.
- CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática e suas tecnologias: estatística, probabilidade e Matemática financeira**. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2020.
- DA COSTA RIBEIRO, E. **Material concreto para o ensino de trigonometria**. 2011.
- DANTE, L. **Livro didático de matemática: uso ou abuso?**. Em aberto, v. 16, n. 69, 1996.
- DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos: análise combinatória, probabilidade e computação**. 1. ed. – São Paulo: Editora Ática, 2020.
- GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- LEONARDO, F. M. (Org.). **Conexões: Estatística e probabilidade**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.
- MOREIRA, Andrea de Paula Machado. **Aplicações da teoria da decisão e probabilidade subjetiva em sala de aula do ensino médio**. 2015.
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, Avanços e Novas Perspectivas**. Bolema, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98. 2011.
- PEDUZZI, L.O.Q. Sobre a resolução de problemas no ensino da Física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 14, n. 3, p. 229-253, dez. 1997.
- RIBEIRO, G.H. **Matemática, aprendizagem baseada em problemas: metodologia inovadora no 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública**. 2019.
- SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Caderno do professor: matemática**. São Paulo: SEE, 2008. (Ensino Médio 2ª série, 3º bimestre).
- SILVA, K.C.J; SILVA, V.G. da. Material concreto: uma estratégia pedagógica no ensino e aprendizagem de matemática. **DiversaPrática**, v. 4, n. 1, 2017.
- SOUZA, J. R. **Multiversos Matemática: Estatística e probabilidade**. 1. ed. – São Paulo: FTD, 2020

SOUSA, A.S; OLIVEIRA, G.S. de; ALVES, L.H. A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos. **Cadernos da FUCAMP**, v. 20, n. 43, 2021.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VILA, A; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.